

高ランクな半単純リー群における Kunze-Stein 現象の端点評価について

慶応大学 河添 健

Takeshi Kawazoe

Keio University

1 背景

実ランク 1 の非コンパクト半単純リー群上の Kunze-Stein 現象の端点評価

$$\|f * g\|_{L^{2,\infty}(G)} \leq c \|f\|_{L^{2,1}(G)} \|g\|_{L^{2,1}(G)} \quad (1)$$

は A. Ionescu ([4]) によって得られた。ここで f, g は Lorentz 空間 $L^{p,q}(G)$ に属し、 $\|\cdot\|_{L^{p,q}(G)}$ はそのノルムである。この評価は J. Liu によりヤコビ hyper 群上でも成立することが示され ([7])、さらに河添により Abel 変換を用いた別証明が得られた ([5])。本稿ではその手法を用いて、高ランクな場合の端点評価について考える。とくに複素単純リー群の場合に次のような修正した形の不等式を紹介する。

$$\|f * M_m g\|_{L^{2,\infty}(\Delta)} \leq c \|f\|_{L^{2,1}(\Delta)} \|g\|_{L^{2,1}(\Delta)}. \quad (2)$$

ここで $L^{p,q}(\Delta)$ は $L^{p,q}(G)$ の K 両側関数全体からなる部分空間であり、 M_m は A のリー環の双対空間 $\mathfrak{a}^*$ 上の関数 m に対応するフーリエ multiplier である。 m が良い性質 (3.1) を満たすとき、この不等式が成立し対応するフーリエ multiplier を $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ 型と呼ぶこととする。以下では M_m が $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ 型となる十分条件を導き、その例を $G = Sp(4, \mathbb{C})$ と $SL(3, \mathbb{C})$ の場合に具体的に与える。これらの成果は J. Liu 氏との共同研究 ([6]) である。また修正端点評価は $SU(n, m)$ でも例が得られている。

2 準備

G を複素半単純リー群とし、 $G = KAN$ および $G = KAK$ をそれぞれ、 G の岩沢分解およびカルタン分解とする。部分群 K, A, N はそれぞれ G の極大コンパクト、ベクトル、べき例部分群である。 G のリー環を $\mathfrak{g}$ 、 A のリー環を $\mathfrak{a}$ とする。 $A = \exp \mathfrak{a}$ である。 $\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の双対空間とし、 Σ_+ を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ の正ルートの全体とする。 $\rho(H) = \sum_{\alpha \in \Sigma_+} \alpha(H)$ とする。 W を (G, A) のワイル群とし、 $\mathfrak{a}_+$ を $\mathfrak{a}$ の正ワイル chamber とし、 $A_+ = \exp \mathfrak{a}_+$ とする。 dg, da, dk, dn, dH をそれぞれ、 $G, A, K, N, \mathfrak{a}$ 上の不変測度とし、[9], §1 のように正規化する。このとき $d(\exp H) = dH$ および $dg = e^{2\rho(\log a)} dk da dn$ となる。 A 上の関数 D を

$$D(\exp H) = \sum_{w \in W} \det w \cdot e^{w\rho(H)} = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} (e^{\alpha(H)} - e^{-\alpha(H)})$$

と定義し、 $\Delta = D^2$ する。このとき $\Delta(\exp H) = O(e^{2\rho(H)})$ である。また $\mathfrak{a}^*$ 上の関数 π を

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} \lambda(H_\alpha)$$

と定義する。ここで H_α は α のルート空間に属する要素で $\alpha(H) = \langle H, H_\alpha \rangle$ を満たすものである。このとき G 上の K 両側不変関数 f に対して

$$\int_G f(g) dg = C_0 \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H) \Delta(\exp H) dH$$

となる。 A 上の正值関数 w に対して $L^p(w)$, $1 \leq p \leq \infty$ を G 上の K 両側不変関数 f で

$$\int_{\mathfrak{a}} |f(\exp H)|^p w(\exp H) dH < \infty$$

を満たすもの全体とする。同様に $L^{p,q}(w)$ を G 上の K 両側不変関数 f で、 $f \circ \exp$ が $w \circ \exp$ を重みとする $\mathfrak{a}$ 上のローレンツ空間 $L^{p,q}(w \circ \exp)$ (cf. [3]) に属するもの全体とする。

ここで G 上の球変換および Abel 変換を復習する。詳しくは [2], §14, [8], §4 and [9] を参照されたい。 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して G 上の球関数 ϕ_λ は

$$D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \frac{\pi(\rho)}{\pi(i\lambda)} \sum_{w \in W} \det w \cdot e^{iw\lambda(H)} \quad (3)$$

と定義される。 G 上の K 両側不変関数 f に対して球変換 $\widehat{f}$ および Abel 変換 $\mathcal{A}f$ は以下のように定義される。 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda) &= \int_G f(x) \phi_\lambda(g^{-1}) dg, \\ \mathcal{A}f(\exp H) &= e^{\rho(H)} \int_N f(\exp H \cdot n) dn.\end{aligned}$$

このとき

$$\widehat{f}(\lambda) = (\mathcal{A}f \circ \exp)^\sim(\lambda) = \int_{\mathfrak{a}} \mathcal{A}f(\exp H) e^{-i\lambda(H)} dH \quad (4)$$

となる。ここでは $\sim$ は $\mathfrak{a}$ 上のフーリエ変換を表す。このことから

$$\mathcal{A}(f * g) = \mathcal{A}f \otimes \mathcal{A}g \quad (5)$$

である。ただし $*$ は G 上の結合積であり $\otimes$ は A 上の結合積である。

$\pi(\partial_H)$ を次の式で定義される $\mathfrak{a}$ 上の定数係数の微分作用素とする。

$$\pi(\partial_H)\phi(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} \langle \alpha, \phi'(H) \rangle.$$

すると $\pi(-i\lambda)\widehat{f}(\lambda) = C_0\pi(\rho)|W|(D \cdot f \circ \exp)^\sim(\lambda)$ ([9], (25)) となる。 $\pi(-i\lambda)\widehat{f}(\lambda) = (\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \circ \exp)^\sim$ に注意すれば、Abel 変換の反転公式

$$f(\exp H) = \frac{C}{D(\exp H)} \pi(-\partial_H)\mathcal{A}f(\exp H) \quad (6)$$

が得られる。 $C^{-1} = C_0\pi(\rho)|W|$ である (cf. [9], Theorem 6)。とくに (5) に注意すれば

$$f * g(\exp H) = \frac{C}{D(\exp H)} \pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \otimes \mathcal{A}g(\exp H) \quad (7)$$

となる。

3 修正端点評価

修正端点評価 (2) を得るためのフーリエ multiplier を導入する。 $\mathfrak{a}$ 上の有界 W 不変関数 m に対して対応するフーリエ multiplier M_m を、 $f \in L^2(\Delta)$ に対して $\widehat{M_m f}(\lambda) = m(\lambda)\widehat{f}(\lambda)$ と定義する。同様に M_m は $L^2(\mathfrak{a})$ 上の通常のフーリエ multiplier でもあることに注意する。ここで

Definition 3.1. M_m is of type $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ if M_m satisfies

$$\|M_m(\mathcal{A}f \circ \exp)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} \leq c\|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \quad (8)$$

for all $f \in L^1(\sqrt{\Delta})$.

と定義する。次の2つの補題は修正端点評価 (2) の証明に有効である。

Lemma 3.2. Let f be a smooth K -bi-invariant function on G and $f \in L^1(\sqrt{\Delta})$. Then there exists a positive constant c such that

$$\|\pi(-\partial_H)\mathcal{A}f \circ \exp\|_{L^1(\mathfrak{a})} \leq c\|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})}. \quad (9)$$

Proof. $\sqrt{\Delta} = D$ より、(6) から明らかである。 $\square$

Lemma 3.3. Let $E(\exp H) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} e^{\alpha(H)} = e^{\rho(H)}$. For all functions $f \in L^1(E)$,

$$\|f\|_{L^1(E)} \leq c\|f\|_{L^{2,1}(E^2)}.$$

Proof. 正単純ルートの全体を $\Sigma_+^0 = \{\alpha_i \mid 1 \leq i \leq n = \dim \mathfrak{a}\}$ とすれば $\mathfrak{a}$ と $\mathbf{R}^n$ は $H \in \mathfrak{a}$ に $(\alpha_i(H))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$ を対応させることにより同一視できる。よって $\mathfrak{a}_+$ に対応する領域を $\mathbf{R}_{++}^n$ とし、 $\delta = E \circ \exp$ とすれば $\mathbf{R}_{++}^n$ 上の関数 F に対して $\|F\|_{L^1(\delta)} \leq c\|F\|_{L^{2,1}(\delta^2)}$ を示せばよい。ここで $d_i > 0$, $1 \leq i \leq n$ が存在して、 $\delta(H) = \prod_{\alpha \in \Sigma_+} e^{\alpha(H)} = \prod_{i=1}^n e^{d_i \alpha_i(H)}$ と書けることに注意する。また F は $\mathbf{R}_{++}^n$ 内の直方体 S 上の特性関数 χ_S として一般性を失わない。 S を $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ とすれば $\{x \mid |\chi_S(x)| > \lambda\}$ の δ^2 に関する体積は $0 \leq \lambda \leq 1$ のとき $V(S) = \int_S \delta^2(x) dx$ であり、その他では0である。よって再配置関数 $\chi_S^*(t)$ は $0 \leq t \leq V(S)$ のとき1であり、その他では0である。よって

$$\|\chi_S\|_{L^{2,1}(\delta^2)} = c \int_0^\infty |\chi_S^*(t)| t^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = cV(S)^{\frac{1}{2}}$$

となる。一方で

$$\begin{aligned} \|\chi_S\|_{L^1(\delta)} &= \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} e^{d_i \alpha_i(H)} dH \leq c \prod_{i=1}^n (e^{2d_i b_i} - e^{2d_i a_i})^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} e^{2d_i \alpha_i(H)} dH \right)^{\frac{1}{2}} = cV(S)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

である。よって求める結果を得る。 $\square$

主定理は以下である。

Theorem 3.4. *Let G be a connected complex semisimple Lie groups. Let M_m be a Fourier multiplier of type $(\sqrt{\Delta}, \infty)$. Then (2) holds for all $f, g \in L^{2,1}(\Delta)$.*

Proof. [7] で (1) を示したときと同様に、(2) を示すにはローレンツ空間の双対性を用いて、 $h \in L^{2,1}(\Delta)$ に対して

$$\left| \int f * M_m g(\exp H) h(\exp H) \Delta(\exp H) dH \right| \leq c \|f\|_{L^{2,1}(\Delta)} \|g\|_{L^{2,1}(\Delta)} \|h\|_{L^{2,1}(\Delta)} \quad (10)$$

を示せばよい。ここで R を $\mathfrak{a}$ のコンパクト集合で原点を含まないものとする。今、 f, g, h のいずれかが $\exp R$ に台を持つとする。 f とすれば

$$\begin{aligned} |M_m(f * g * h)(e)| &\leq \|f * g\|_{L^2(\Delta)} \|M_m h\|_{L^2(\Delta)} \leq \|f\|_{L^1(\Delta)} \|g\|_{L^2(\Delta)} \|h\|_{L^2(\Delta)} \\ &\leq \left(\int_R \Delta(\exp H) dH \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Delta)} \|g\|_{L^2(\Delta)} \|h\|_{L^2(\Delta)} \end{aligned}$$

である。 $L^{2,1}(\Delta) \subset L^2(\Delta)$ より求める評価が得られる。 $\exp R$ に台を持つ関数を g, h としても同様である。よって、 f, g, h は $\exp R$ の外 $(\exp R)^c$ に台を持つと仮定してよい。このとき (7), (8), Lemma 3.2 より

$$\begin{aligned} &\left| \int f * M_m g(\exp H) h(\exp H) \Delta(\exp H) dH \right| \\ &\leq c \|\pi(-\partial_H) \mathcal{A}f \otimes M_m \mathcal{A}g(\exp H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} \|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \\ &\leq c \|\pi(-\partial_H) \mathcal{A}f \circ \exp\|_{L^1(\mathfrak{a})} \|M_m \mathcal{A}g \circ \exp\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} \|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \\ &\leq c \|f\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \|g\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \|h\|_{L^1(\sqrt{\Delta})}. \end{aligned}$$

ところで関数 a が $(\exp R)^c$ に台を持つとき補題 3.3 より

$$\|a\|_{L^1(\sqrt{\Delta})} \leq c \|a\|_{L^1(E)} \leq c \|a\|_{L^{2,1}(E^2)} \leq c \|a\|_{L^{2,1}(\Delta)}$$

である。よって (10) が得られた。 $\square$

ここで M_m が $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ 型となる十分条件を求める。球関数 $\phi_\lambda(\exp H)$ が λ の関数として、 $\mathfrak{a}$ 上のコンパクトな台を持つ L^1 関数 $A_H(S) = A(S, H)$ のフーリエ変換として得られること、すなわち

$$D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} A(S, H) e^{i\lambda(S)} dS$$

となることに注意する ([1])。よって (4) より $f \in L^1(\Delta)$ に対して

$$\mathcal{A}f(\exp S) = \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H) D(\exp H) A(S, H) dH$$

である。 $A(S, H)$ の第 1 変数に M_m を作用させたものを $M_{m,1}A(S, H)$ と書く。もし $M_{m,1}A(S, H)$ が S の関数として $L^1(\mathfrak{a})$ に属するならば

$$m(\lambda) D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} M_{m,1}A(S, H) e^{i\lambda(S)} dS$$

となり

$$M_m(\mathcal{A}f \circ \exp)(S) = \int_{\mathfrak{a}} f(\exp H) D(\exp H) M_{m,1}A(S, H) dH$$

である。よってある定数 $c > 0$ が存在して、すべての $H \in \mathfrak{a}$ に対して $\|M_{m,1}A(\cdot, H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} < c$ となるならば (8) が得られる。以上のことから次の系が得られた。

Corollary 3.5. *Let us suppose that*

$$m(\lambda) D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = \int_{\mathfrak{a}} B(S, H) e^{i\lambda(S)} dS, \quad (11)$$

where $B(S, H) \in L^1(\mathfrak{a})$ as a function of S and $B \in L^\infty(\mathfrak{a}^2)$. Then M_m is of type $(\sqrt{\Delta}, \infty)$ and thus, (2) holds for $f, g \in L^{2,1}(\Delta)$.

4 例

系 3.5 の条件 $B_H(S) \in L^1(\mathfrak{a})$, $B(S, H) \in L^\infty(\mathfrak{a}^2)$ 、すなわち、ある定数 $c > 0$ が存在して、すべての $H \in \mathfrak{a}$ に対して $\|M_{m,1}A(\cdot, H)\|_{L^\infty(\mathfrak{a})} < c$ となる m を求める。

(I) 実ランク 1 の場合: $\dim A = 1$ のとき

$$D(\exp H) \phi_\lambda(\exp H) = c \frac{\sin \lambda(H)}{\lambda} = c \int_{-H}^H e^{i\lambda(S)} dS$$

である。よって $m(\lambda) = 1$ とすれば $B(S, H)$ は $[-H, H]$ の特性関数である。したがって修正の必要は無く Kunze-Stein 現象 (1) が成立する。

(II) $Sp(4, \mathbb{C})$ の場合: $\mathfrak{a} = \{H(a_1, a_2) = \text{diag}(a_1, a_2, -a_1, -a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$ である。 $e_i \in \mathfrak{a}^*$, $i = 1, 2$ を $e_i(H(a_1, a_2)) = a_i$ で定義すれば $\Sigma_+ =$

$\{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$ である。 $\alpha = e_1 - e_2$ および $\beta = 2e_2$ とする。 s_γ を $\gamma \in \Sigma_+$ に関する $\mathfrak{a}^*$ の鏡映とする。このときワイル群 W は $W = \{I, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta s_\alpha, s_\beta s_\alpha s_\beta, (s_\alpha s_\beta)^2\}$ となる。 $\mathfrak{a}^*$ の要素 λ を $\lambda = \lambda_1(2\alpha + \beta) + \lambda_2\beta = 2\lambda_1e_1 + 2\lambda_2e_2$ と表示する。 $w \in W$ の λ への作用を計算して (3) を用いると

$$D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H) = \frac{1}{16} \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \\ \times \left(-\frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right. \\ \left. + \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

となる。ここで

$$m(\lambda) = \sin^2 \lambda_1 \sin^2 \lambda_2$$

とすれば m は W 不変であり

$$m(\lambda)D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H) = c \frac{\sin^2 \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2} \\ \times \left(-\frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right. \\ \left. + \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

となる。ところで

$$\frac{\sin^2 \lambda_1}{\lambda_1} \frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2}$$

は $u(x, y) = -\frac{1}{4} \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y$ と $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ の特性関数の積のフーリエ変換であり

$$\frac{\sin(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

は $v(x, y) = \frac{1}{2}$ と $\{(x, y) \mid |x + y| \leq |a_1 + a_2|, |x - y| \leq |a_1 - a_2|\}$ の特性関数の積のフーリエ変換である。よって $B(S, H)$ は

$$u \otimes v(S) + u \otimes s_\beta v(S)$$

の定数倍である。以上のことから $B(S, H)$ は系 3.5 の条件を満たす。

(III) $SL(3, \mathbf{C})$ の場合: $\mathfrak{a} = \{H(a_1, a_2) = \text{diag}(a_1, a_2, -(a_1 + a_2)) \mid a_1, a_2 \in \mathbf{C}\}$ である。 $e_i \in \mathfrak{a}^*$, $i = 1, 2$ を $e_i(H(a_1, a_2)) = a_i$, $e_3(H(a_1, a_2)) = -(a_1 + a_2)$ と定義すれば $\Sigma_+ = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_3\}$ である。 $\alpha = e_1 - e_2$, $\beta = e_2 - e_3$ とする。 $W = \{I, s_\alpha, s_\beta, s_\alpha s_\beta, s_\beta s_\alpha, s_\alpha s_\beta s_\alpha\}$ である。 $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ を $\lambda = \lambda_1 \frac{4}{3}(2\alpha + \beta) + \lambda_2 \frac{4}{3}(-\alpha + \beta) = 4\lambda_1 e_1 + 4\lambda_2 e_2$ と表示する。 W の $\mathfrak{a}^*$ への作用を計算して (3) を用いると、 $D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H)$ は

$$\begin{aligned} & 4(2i \sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2) e^{2i(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)} \sin \lambda_1(a_1 - a_2) \sin \lambda_2(a_1 - a_2) \\ & - e^{-i(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)} \sin 2\lambda_1(a_1 - a_2) \sin 3(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2) \\ & + 2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2) e^{-i(\lambda_1 - 2\lambda_2)(a_1 + a_2)} \sin 3\lambda_1(a_1 + a_2) \\ & \quad \times \cos(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2)) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$m(\lambda) = \sin^2 \lambda_1 \sin^2 \lambda_2 \sin^2(\lambda_1 - \lambda_2)$$

とすれば、 m は W 不変であり、 $m(\lambda)D(\exp H)\phi_\lambda(\exp H)$ は

$$\begin{aligned} & \frac{i}{16} \sin^2 \lambda_1 \frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2} \sin^2(\lambda_1 - \lambda_2) \\ & \times \left(2i \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{2i(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)} \frac{\sin \lambda_1(a_1 + a_2)}{\lambda_1} \sin \lambda_2(a_1 - a_2) \right. \\ & - e^{-i(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 + a_2)} \frac{\sin 2\lambda_1(a_1 - a_2)}{\lambda_1} \frac{\sin 3(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 + a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ & + 2 \frac{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 - a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-i(\lambda_1 - 2\lambda_2)(a_1 + a_2)} \frac{\sin 3\lambda_1(a_1 + a_2)}{\lambda_1} \\ & \quad \left. \times \cos(\lambda_1 + \lambda_2)(a_1 - a_2) \right) \end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{\sin^2 \lambda_2}{\lambda_2}$ は $-i \text{sgn } y$ と $\{y \mid |y| \leq \frac{1}{2}\}$ の特性関数の積の 1 次元フーリエ変換の $4\lambda_2$ での値であり

$$\frac{\sin c(\lambda_1 - \lambda_2)(a_1 \mp a_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\sin d\lambda_1(a_1 \pm a_2)}{\lambda_1}$$

は $\{(x, y) \mid |y| \leq |\frac{c}{4}(a_1 \mp a_2)|, |x + y| \leq |\frac{d}{4}(a_1 \pm a_2)|\}$ の特性関数のフーリエ変換の 4 倍である。他の項はフーリエ multipliers としては、これらの特性関数の平行移動である。よって $B(S, H)$ は系 3.5 の条件を満たす。

References

- [1] M. Flensted-Jensen and D. L. Ragozin, *Spherical functions are Fourier transforms of L^1 -functions*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 6 (1973), pp.457-458.
- [2] Harish-Chandra, *Spherical functions on a semisimple Lie group, I*, Amer. J. Math. 80 (1958), pp. 241-310.
- [3] R. A. Hunt, *On $L(p, q)$ Spaces*, L' Enseignement Math. 12 (1966), pp.249-276.
- [4] A. D. Ionescu, *An endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon and the related maximal operators*, Ann. of Math. 152 (2000), pp.259-275.
- [5] T. Kawazoe, *Applications of an inverse Abel transform for Jacobi analysis: weak- L^1 estimates and the Kunze-Stein phenomenon*, to appear in Tokyo J. Math.
- [6] T. Kawazoe and J. Liu, *A modified endpoint estimates of the Kunze-Stein phenomenon associated with complex semisimple Lie groups*, Scientiae Mathematicae Japonicae, online, 2018-3, pp. 1-10.
- [7] J. Liu, *The Kunze-Stein phenomenon associated with Jacobi transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), pp.1817-1821.
- [8] C. Meaney, *Spherical functions and spectral synthesis*, Compositio Mathematica 54 (1985), pp.311-329.
- [9] F. Rouvière, *Sur la transformation d'Abel des groupes de Lie semisimples de rang un* Ann. Scuola. Norm. Sup. 10 (1983), pp.263-290.