

渦度の凍結運動と渦のつなぎかえ

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

京大理 高岡正憲 (Masanori Takaoka)

1. はじめに

最近、大きな構造をもつ渦のつなぎかえが、数値的にも実験的にもよく調べられるようになってきた。「渦のつなぎかえ」という言葉は、「渦」同様、明確な定義（あるいは「渦度」との関係）を明らかにすることなく使われてきているように思われる。

実験における理解は、ほぼ反平行の渦管が打ち消し合い、もとの渦管に垂直な方向に新しい渦管ができるといったものであった。しかしながら、実験で観測されている色素や煙などのパッシブスカラーは、必ずしも渦運動を忠実に表さないので、「Vortex Reconnection」と「Scalar Reconnection」とを区別することが必要である。また、渦の強い部分のつなぎかえは、必ずしも渦線のそれを意味しない。つまり、等渦度面は渦面とは異なり、非粘性に於いてもそのトポロジーをかえ得るのである。これらを区別するために、それぞれ「Vortex Reconnection」と「Vorticity Reconnection」という言葉を使うことにする。

さて、図1のような2次元的な渦の構造を考えよう。つなぎかえをしている(?)点の近傍の拡大図と思ってもよい。図中に示された“矢印”がなかったら、どちら向きにつなぎかわっているか分かるであろうか? つなぎかえが起こっているか否かを確認するためには、何かマーカーをつけて渦線を時間的に追いかけることが必要である。ところで、非粘性流体中ではHelmholtzの定理により、渦線のつなぎかえはありえない。これは渦線と流体粒子の凍結運動に対応するものである。つまり、渦のつなぎかえにとっては粘性の効果はなくてはならないものであるが、そのために、流体粒子によって渦線を追いかけることが難しくなるという皮肉なことになっている。

2. 渦線の凍結運動からのずれ

渦度場の時間発展を決める渦度方程式は

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

である。ここに、 ∇ は勾配オペレータで、 ν は運動粘性率である。まず、粘性による凍結運動の破れを見てみよう。ある時刻 t で、ある一本の渦線上で δx だけ離れた二点を考える。微小な

時間 (Δt) の後にその二点の位置の差が $\delta \mathbf{x}'$ になったとすると、

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}' &\approx \delta \mathbf{x} + \{ \mathbf{u}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \} \Delta t \\ &\approx \delta \mathbf{x} + (\delta \mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t\end{aligned}\quad (2)$$

で、その時の渦度は

$$\begin{aligned}\omega' &\equiv \omega(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t, t + \Delta t) \\ &\approx \omega(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \omega(\mathbf{x}, t) \Delta t + \frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}, t) \Delta t \\ &= \omega(\mathbf{x}, t) + (\omega(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Delta t + \nu \nabla^2 \omega(\mathbf{x}, t) \Delta t\end{aligned}\quad (3)$$

となる。ただし、途中 (1) 式を用いた (図 2 参照)。さて、この (2)、(3) 式から分かるように、非粘性 ($\nu = 0$) 流では、初期に $\delta \mathbf{x} \parallel \omega$ ならずとそうである。つまり、流体粒子は渦線に凍結されて運動する。 $\nu(\nabla^2 \omega)_{\parallel}$ (スカラー) は渦線に沿っての引き伸ばしによるずれを、 $\nu(\nabla^2 \omega)_{\perp}$ (ベクトル) は方向のずれに渦度の重みを掛けたものを表す。すなわち、 $\delta \mathbf{x}'$ と ω' の間の角を θ とすると、その時間変化は

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\nu(\nabla^2 \omega)_{\perp}}{|\omega|}\quad (4)$$

で表される。

「Vorticity Reconnection」の定量化の問題に戻ってみよう。Vorticity Reconnection を表す物理量に対して要請されることとしては、(i) 非粘性ではつなぎかわらない、(ii) ガリレイ変換に対して不変、(iii) 局所的な量である、(iv) 渦のつなぎかえに対する我々の直感に反しない、等々が挙げられる。その一つの候補として

$$\mathbf{R} = \nu(\nabla^2 \omega)_{\perp}\quad (5)$$

が考えられる。例えば、すべての時刻及び空間で $\mathbf{R} \equiv 0$ ならば、渦面はアイデンティティを保つ。ただし、その強さ (循環) は $\nu(\nabla^2 \omega)_{\parallel}$ により変化する。以下に、いくつかの具体的な流れについてこの量を調べてみる。

3. R 場の空間構造

3.1 解析的な流れ

(a) 粘性 ABC 流

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} = (A \sin x_3 + C \cos x_2, B \sin x_1 + A \cos x_3, C \sin x_2 + B \cos x_1), \quad (6)$$

$$A = A_0 \exp(-\nu t), \quad B = B_0 \exp(-\nu t), \quad C = C_0 \exp(-\nu t), \quad (7)$$

はナビエ-ストークス方程式の解である。この流れはベルトラミ特性 ($\mathbf{u} \parallel \boldsymbol{\omega}$) を持ち、 $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\omega}$ つまり $\mathbf{R} \equiv 0$ である。基本周期領域 ($0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2\pi$) 内のヘリシティは指数的に減少するが、場の構造は不変である。すなわち、渦線はつなぎかわらない。このヘリシティの減少は、渦度強度の減少から来るもので、渦線のトポロジーの変化からではないのである。

(b) 粘性 Burgers 渦

粘性 Burgers 渦は、円柱座標系で

$$\mathbf{u} = \left(-\frac{A}{2}r, \frac{C}{2\pi r} \left[1 - \exp \left(-\frac{Ar^2 e^{At}}{4\nu(e^{At} - 1) + Aa^2} \right) \right], Az \right), \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \left(0, 0, \frac{AC}{4\pi\nu(e^{At} - 1) + \pi Aa^2} \exp \left[At - \frac{Ar^2 e^{At}}{4\nu(e^{At} - 1) + Aa^2} \right] \right) \quad (9)$$

と表される。渦度は z -成分のみしかなくつなぎかえを起こさない。この流れもまた、至るところ $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} \parallel \boldsymbol{\omega}$ すなわち、 $\mathbf{R} \equiv 0$ である。

(c) ねじれた渦層

場が空間一変数 (x_3) のみに依存し、速度場がそれに直交している ($u_3 = 0$) とすると、渦度 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, 0)$ は、拡散方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (10)$$

に従い、その解は

$$\omega(x_3; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi; 0) \exp \left[-\frac{(\xi - x_3)^2}{4\nu t} \right] d\xi \quad (11)$$

と書ける。渦度の方向が空間的に一定でないならば、それは時間と共に変化する。これは一種のつなぎかえとみなせよう。もっとも簡単な初期条件として、

$$\omega_1(x_3, 0) = \omega_0 \delta(x_3 + a), \quad \omega_2(x_3, 0) = \omega_0 \delta(x_3 - a), \quad (12)$$

を考える。図3 (a) に $\omega_0 = a = \nu = 1$ としたときの $t = 0.3$ に於けるベクトル場の様子
を示す。 x_3 軸上のベクトルで代表してある。図3 (b) には、 $|\omega|$ (実線)、 $\nu|(\nabla^2\omega)_\perp|^\pm =$
 $|R|^\pm$ (破線)、 $\nu(\nabla^2\omega)_\parallel$ (一点鎖線) を描いてある。但し $|^\pm$ は、 x_3 軸方向を向いたとき
に反時計回りとなる方をプラス、時計回りとなる方をマイナスとすることを示す。 R が、 $x_3 =$
 $\pm 0.3a$ 付近で大きい値をとっていることが分かる。

(d) 直状ジェット

空間二変数 (x_1, x_2) に依存する速度場がその法線方向 (x_3) 成分のみとする。これに線
形よどみ流を加えた場の時間発展も拡散方程式に帰着される。つなぎかえを見るための簡単な
特解として

$$\mathbf{u} = (-Ax_1, 0, Ax_3 + \bar{u}_3(x_1, x_2; t)), \quad (13)$$

$$\omega = \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_2}, -\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_1}, 0 \right) \quad (14)$$

を考える。ここに、

$$\bar{u}_3(x_1, x_2; t) = \frac{u_0 r_0^2 e^{-2At}}{\sigma_1 \sigma_2} \left\{ \exp \left[-\frac{(x_1 - ae^{-At})^2}{\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right] + \exp \left[-\frac{(x_1 + ae^{-At})^2}{\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}, \quad (15)$$

$$\sigma_1^2 \equiv \frac{2\nu}{A} (1 - e^{-2At}) + r_0^2 e^{-2At}, \quad (16a)$$

$$\sigma_2^2 \equiv 4\nu t + r_0^2 \quad (16b)$$

である。初期の速度場は、 $(x_1, x_2) = (\pm a, 0)$ に中心を持つ二つの円形ジェットの重ね合わせ

$$\bar{u}_3(x_1, x_2; 0) = u_0 \left\{ \exp \left[-\frac{(x_1 - a)^2 + x_2^2}{r_0^2} \right] + \exp \left[-\frac{(x_1 + a)^2 + x_2^2}{r_0^2} \right] \right\} \quad (17)$$

である。また、(14) 式から分かるように $\bar{u}_3$ は二次元流に於ける流れ関数のような役割をし、
その等高線は渦線に相当する。

図4に (i) 渦度ベクトル ω 、(ii) 渦面 $\bar{u}_3$ 、(iii) 等渦度面 $|\omega|$ 、(iv) $\nu(\nabla^2\omega)_\parallel$ 、(v) R の
(a) $t = 0$ と (b) $t = 0.6$ における x_3 一定の平面内の様子を示す。ただし、 $A = \nu = r_0 =$
 $u_0 = 1, a = 1.5$ である。図4 a、b (i) -(iii) から明らかなように二つの渦輪が「つなぎかわっ
て」一つの大きな渦輪となっている。しかも、等渦度面の図 (a(iii)) で見えるブリッジは、渦
面の図にはないといった違いも分かるであろう。

この解を、 x_3 軸（ゼロ点）の周りで展開してみると、

$$\bar{u}_3(x_1, x_2; t) = \frac{2u_0 r_0^2}{\sigma_1 \sigma_2^3} \exp \left[-2At - \frac{a^2 e^{-2At}}{\sigma_1^2} \right] \left\{ \sigma_2^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^4} (2a^2 e^{-2At} - \sigma_1^2) x_1^2 - x_2^2 + O(x_1^4, x_2^4, x_1^2 x_2^2) \right\} \quad (18)$$

となり、今のパラメータの場合、 $t_c = (1/2A) \ln[1 + (A/2\nu)(2a^2 - r_0^2)] \approx 0.506$ という時刻で、渦面の局所構造が双曲型から楕円型に変わることが分かる。双曲型の時

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2} \sqrt{2a^2 e^{-2At} - \sigma_1^2} x_1 = \pm x_2. \quad (19)$$

なる漸近線を持ちその傾きは時間的に変化するが、そのことは必ずしもつなぎかえが起こっていることを意味しない。 $\nu = 0$ の時もそうだからである。しかし、双曲型から楕円型に変化したときには、つなぎかえが起こったと言ってよい。図4 a、b (iv)、(v) で陰をつけている部分は、それぞれ正值と反時計周りの回転であることを示す。 $|R|$ が、相互作用（つなぎかえをしていると思われる）部分で大きい値をとっていることが分かる。

3.2 数値的な流れ

(a) 二つの円形渦輪

実験でよく調べられてきた二つの渦輪のつなぎかえの数値シミュレーションを行なった。第一つなぎかえを起こしつつあるときの様子を図5に示す。等値面は、すべてその時の最大値の25%としてある。図5 aは全体の様子を示す等渦度面 $|\omega|$ 、b-dはそれぞれ $\nu|(\nabla^2 \omega)|$ と $|\omega|$ 、 $|R|$ と $|\omega|$ 、 $\nu|(\nabla^2 \omega)|$ と $|R|$ である。太線は両方の場が重なっていることを、細線はどちらかの場が敷居値をとっていることを示す。 $\nu|(\nabla^2 \omega)|$ の渦管内の部分は負で、外は正である。 $|R|$ は、相互作用（つなぎかえ、自己変形）の激しい部分で大きい値をとっていることが分かる（図4と比較）。

(b) 三葉型渦輪

ヘリシティ（あるいは絡まり）を持つもっとも簡単な場合として、我々はまた三葉型の渦輪に於ける自己つなぎかえの数値シミュレーションも行なった。バースト型のブリッジが成長しつつあるときの様子を、図6に図5と同様の形で示す。（但し敷居値は20%である。）結果は二つの渦輪の時と同じで、 $\nu|(\nabla^2 \omega)|$ は渦管内で負、外で正の値を取り、 $|R|$ はブリッジの付近で大きい値を取っている。

(c) 乱流場

最後に、一般の高レイノルズ数の流れに於ける様子を調べる為に、木田と村上によってシミュレーションされた乱流場を調べてみる。図 7 b-e に図 5、6 と同様の図を示す。但しこの場合、渦度の向きは前二例ほど明かでないので、図 7 a に渦ベクトルの様子を示した。このような一般流に於いても同様に、大きい渦構造の内部で $\nu|(\nabla^2 \omega)_\parallel|$ が大きい値をとり、相互作用していると思われる部分で $|R|$ が大きい値をとっていることが分かる。(図 7 d で $|R|$ が大きい渦構造の後ろにあり隠面処理されている。 $|R|$ は図 7 e に見られる。)

参考文献

- 1) S. Kida and M. Takaoka: J. Phys. Soc. Jpn. 60 (1991) 2184.
- 2) A. Otto, M. Hesse and K. Schindler: in *Proc. IUTAM Symp. 1989* (eds. H.K. Moffatt and A. Tsinober, Cambridge Univ. Press 1990), pp. 225 - 234.
- 3) W.I. Axford: in *Magnetic Reconnection in Space and Laboratory Plasmas* (ed. E.W. Hones, Jr., Geophy. Mono. Ser. vol. 30, A.G.U., Washington, D.C., 1984), pp. 1 - 8.

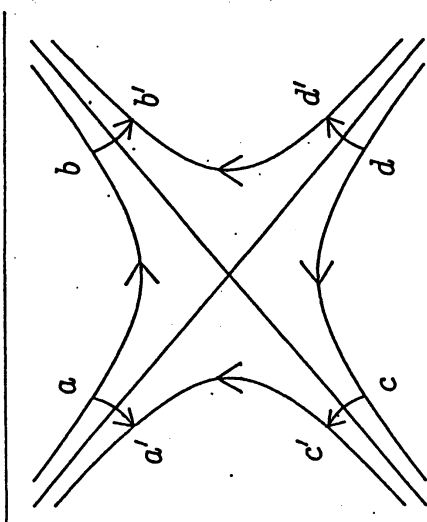


图 1

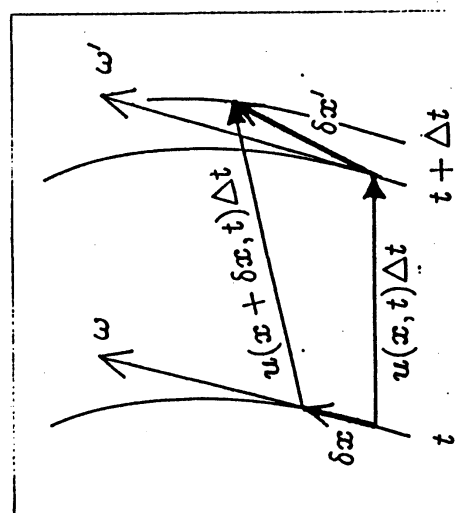
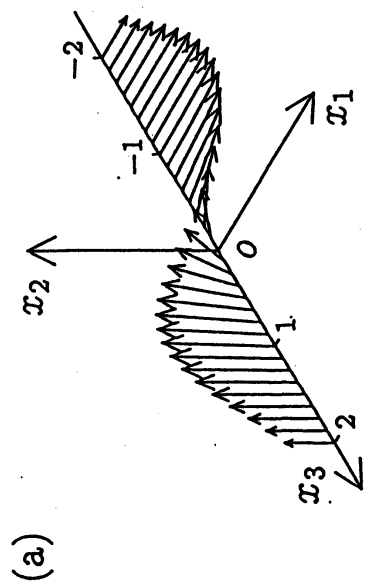
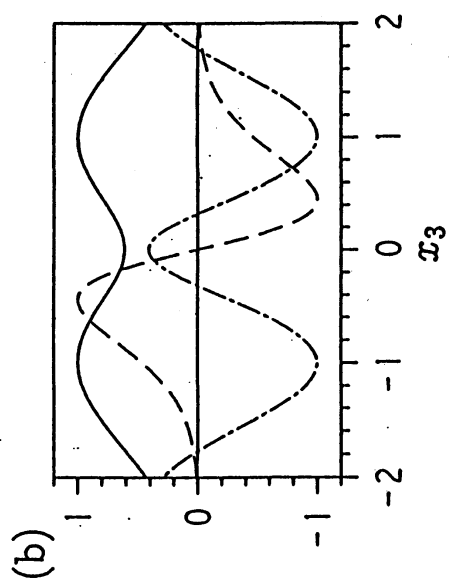


图 2



(a)



(b)

图 3

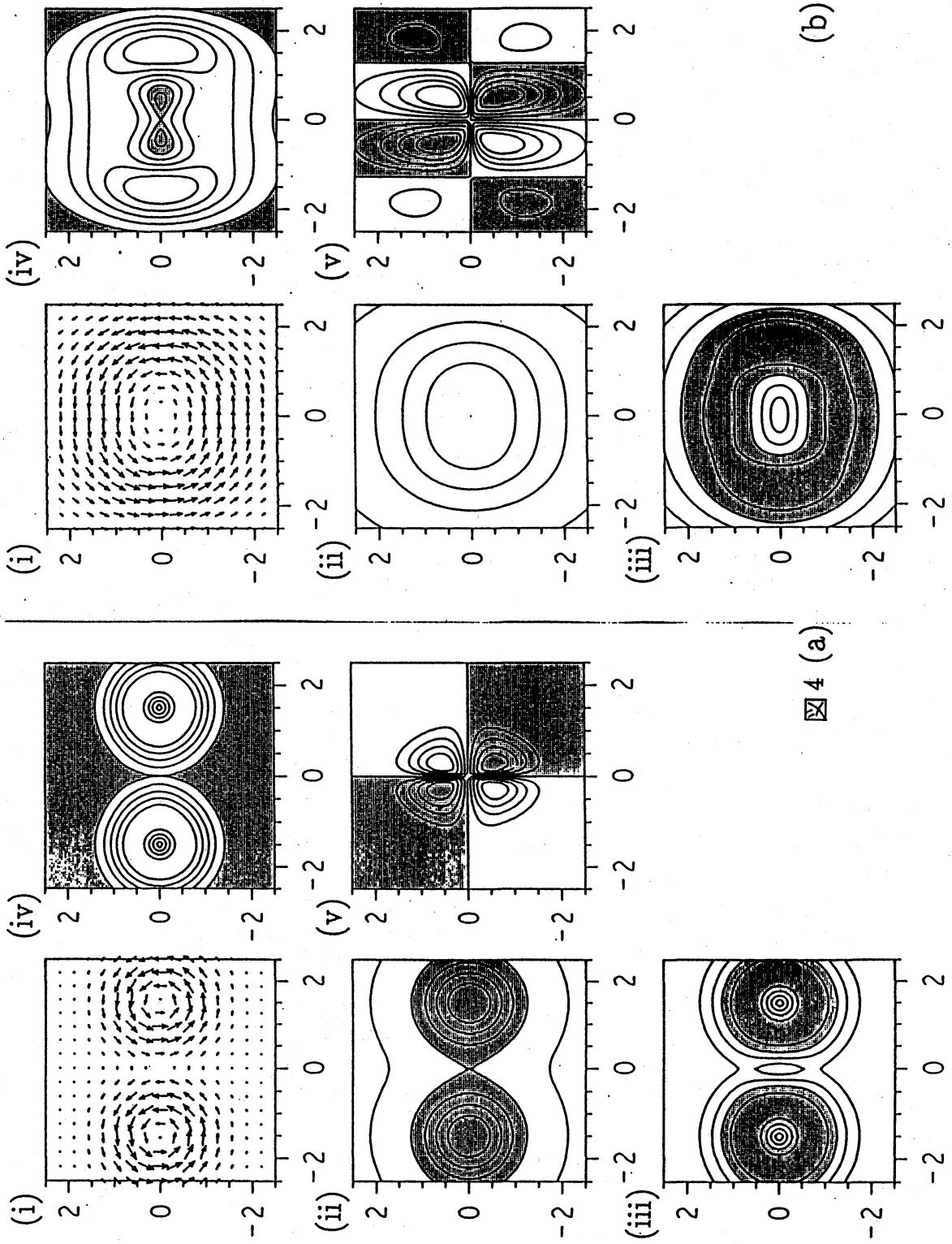
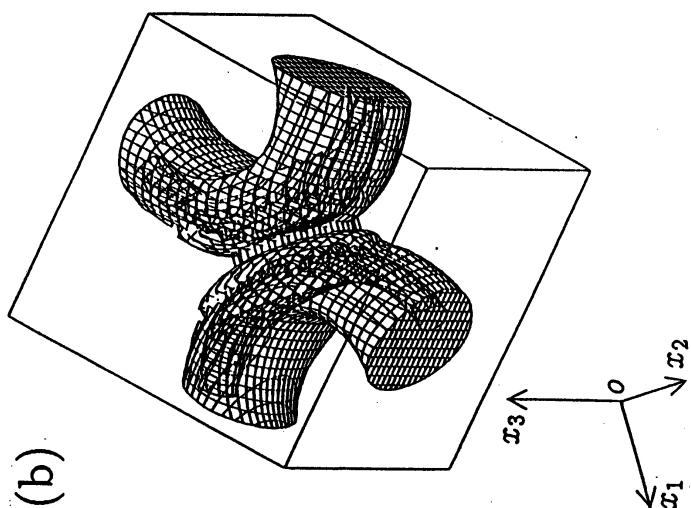
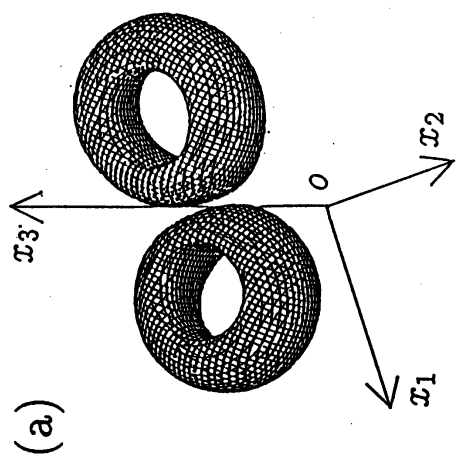
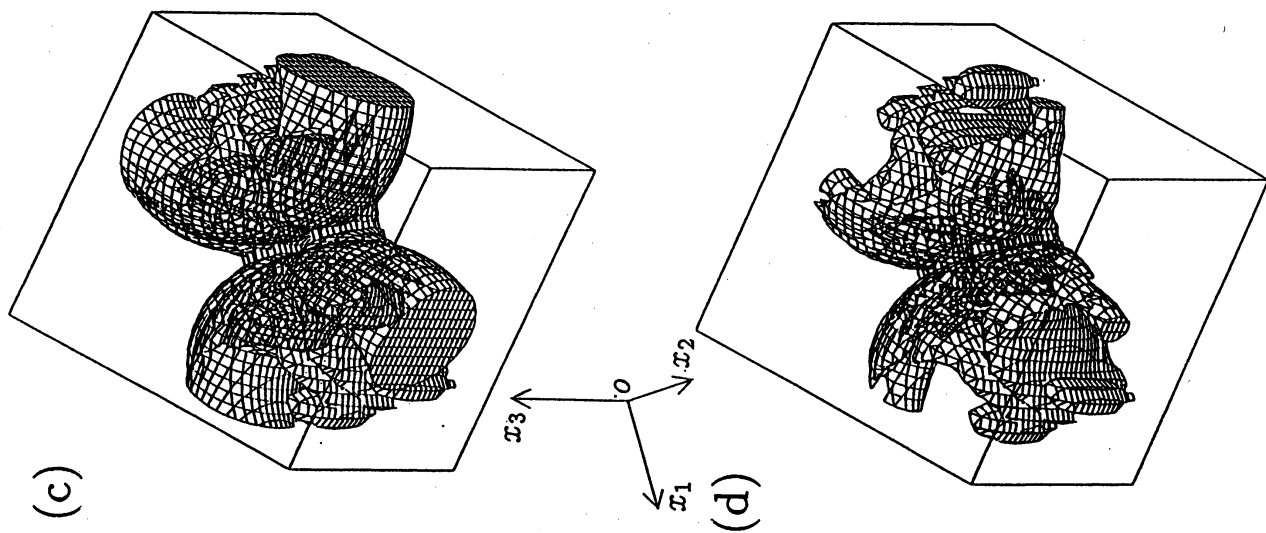
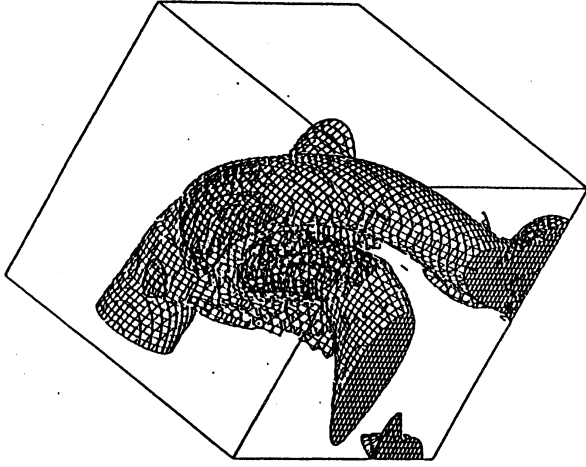


Fig 4 (a)

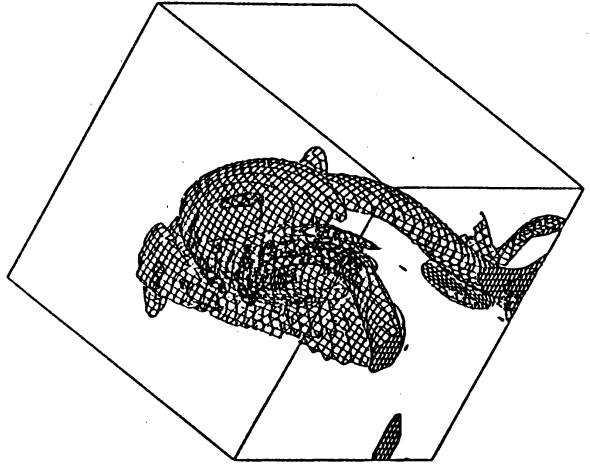
(b)



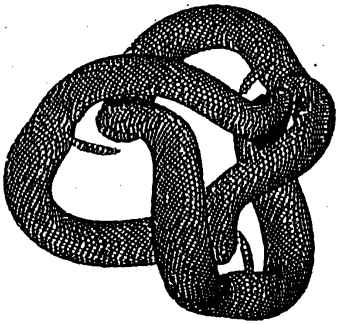
5



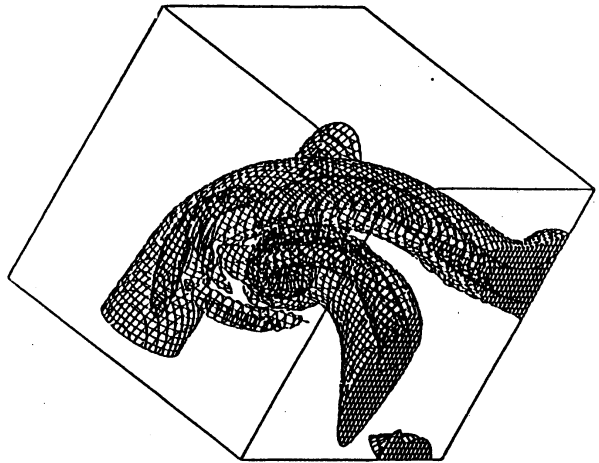
(c)



(d)

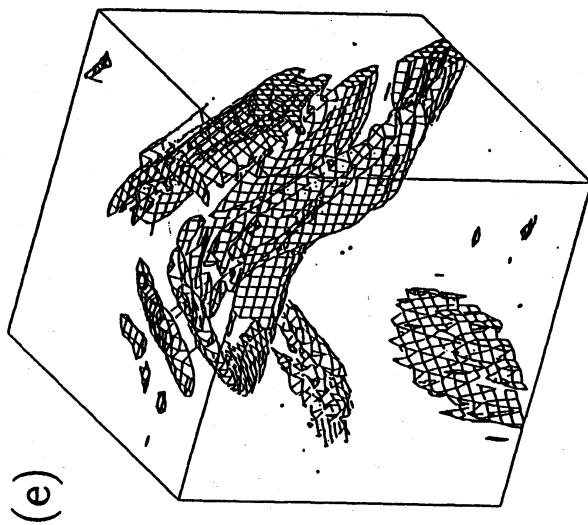
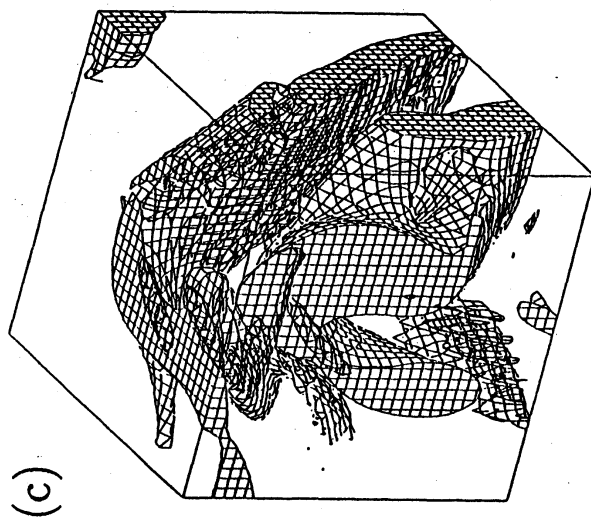
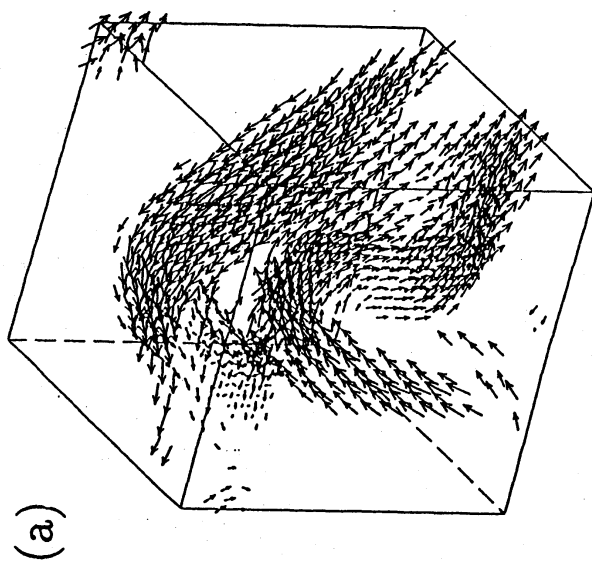


(a)



(b)

6



=

