

液膜流の有限振幅波を長波展開で記述できないか？

京大(理) 大信田 丈志 (OOSHIDA Takeshi)

液膜流を記述する長波方程式の有効範囲を拡張するために、長波展開の結果を積分方程式に代入し、液膜の厚さの発展方程式を得る。この方程式では各項に物理的な意味づけができる。液膜流の不安定化の機構は Whitham の波動階層によって説明される。方程式の有効性を検証するために数値計算を行なった結果、少なくとも表面張力の効果が大きい場合にはもっともらしいふるまいをすることが分かった。

1 はじめに

1.1 液膜流とは

斜面を薄膜状に流れる粘性流を称して液膜流とよぶ。液膜流は非保存系であって、エネルギーは重力によって供給され、粘性によって散逸する。これらの効果は全体としてつりあっていなければならない。非保存系はこのようにつりあいを『実現しようとして』何らかの非線形動力学的な構造を自発的に作ることがある。構造の種類は Bénard 対流や液晶のパターンから乱流中の渦構造に至るまでさまざまであるが、これらは『初期条件の記憶に支配されている』わけではないという点で、たとえば保存系のソリトンとは決定的に異なっている。

液膜流を記述する Navier-Stokes 方程式の解として、任意の厚さの一樣流が可能であるが、Reynolds 数 R (厚さの 3 乗に比例) が臨界値を超えると一樣状態は長波攪乱に対して不安定になる。このとき流れは依然として層流的であるが、実験によると液膜の厚さは空間的にゆるやかに変化し、規則的あるいは不規則な波動が観察される。液体層の厚さがきわめて大きいときには乱流状態となり、いわゆる転波が生じるが、それはもはや液膜流とは呼べないだろう。物理的には、Reynolds 数があまり小さくなく (膜の厚さが粘性が効くスケールと同程度)、また表面張力の効果が比較的大きい (表面の急峻化がおさえられる) 場合を考えることになる。

液膜流では最初に不安定になる波数がゼロであるため、Stuart-Landau 流の Fourier 相互作用に基づいたアプローチは適用しにくい。かといって Navier-Stokes 方程式の直接数値計算は困難である。これはひとつには表面が変形するからであるが、また長さスケールの範囲が大きいからでもある (たとえば Jun Liu らの実験 [1, 2] では液膜の厚さが 1mm 程度であるのに対し、波長は数 cm のオーダー、系の全長は 2m に及ぶ)。だが、液膜の『薄さ』を利用して z 方向の自由度を消去できれば、方程式は簡略化され、比較的容易に解を求めることができるようになる。この方向でのアプローチには、大きくわけて二つの流派があるように思われる。ひとつはいわゆる長波展開のアプローチであり、もうひとつは積分境界層近似の方法と呼ばれているものであって、後述するように、それぞれに利点・欠点があり、適用範囲が限られていたり、結果が正しくなかったりする。本研究は、これらの手法を統合することによって、より適用範囲が広くまた物理的な意味の明確な近似方程式を得ようとする試みである。

1.2 基礎方程式と無次元パラメータ

まず基礎方程式系として、非圧縮 2 次元 Navier-Stokes 方程式をとり、表面張力を含む自由表面境界条件を課す (詳細は Appendix A を参照)。基礎方程式系には

傾斜角 α [rad], 重力加速度 g [m/s²], 密度 ρ [kg/m³], 動粘性率 ν [m²/s], 表面張力係数 T [N/m]

という 5 つの『物性定数』が含まれる。なお $K = T/(\rho g^{1/3} \nu^{4/3})$ を Kapitza 数と称し、物性 (と重力) のみで決まる無次元パラメータである。水の場合 $K = 3000$ くらいであり、粘性の割に表面張力が大きい物質であることが分かる。

液膜の特徴的な厚さが定まっている場合を考えよう。このとき、無次元量としてさらに Reynolds 数と Weber 数が定義される。まず厚さ h_0 の一樣定常流は放物線型の速度プロファイル

$$u = u\hat{x} = U_0 \left[\frac{2z}{h_0} - \left(\frac{z}{h_0} \right)^2 \right] \hat{x}, \quad U_0 = \frac{h_0^2 g \sin \alpha}{2\nu} \quad (1)$$

を持ち、表面速度 U_0 は h_0^2 に比例して定まる。これより Reynolds 数 $R = h_0 U_0 / \nu = [g \sin \alpha / (2\nu^2)] h_0^3$ は h_0^3 に比例することが分かる。定数 h_0 の代わりに局所的な h を用いることにより、局所 Reynolds 数

$R_{\text{local}} = R(h/h_0)^3$ が与えられる。また、表面張力の効果の尺度として Weber 数 $W = [T/(\rho g \sin \alpha)] h_0^{-2}$ を定義する。これはもちろん R, K, α から求めることができる。

1.3 長波展開

線形安定理論によると、 $R > R_c = (5/4) \cot \alpha$ のとき一様状態は $k_c = k_c(R)$ 以下の波数の攪乱に対して不安定である。ここで k_c は

$$k_c \propto h_0^{-1} \sqrt{\frac{R - R_c}{W + C(R)}} \quad (2)$$

で与えられ、臨界の近くでは $(R - R_c)$ が小さいのでゼロに近い。また W が大きいときは $R - R_c$ が $O(1)$ であっても k_c はゼロに近い。よって長波パラメータ $\mu \sim k_c h$ を用いた展開を考えることができる。つまり、変数の空間変化がゆるやかであると考え、 $\partial_x = \mu \partial_{x_1}$, $\partial_t = \mu \partial_{t_1} + \mu^2 \partial_{t_2} + \dots$ のように長波パラメータ μ を用いて微分演算子および速度場を展開して、これを基礎方程式に代入し次数の低い方から順に解いていく [3, 4, 5]。

特に、表面張力が大きい場合には、 h の発展方程式として

$$\partial_t h + \partial_x \left[\frac{2}{3} h^3 + \left(\frac{8}{15} R h^6 - \frac{2}{3} \cot \alpha \cdot h^3 \right) \partial_x h + \frac{2}{3} W h^3 \partial_x^3 h \right] = 0 \quad (3)$$

を得る (導出については Appendix B を参照)。便宜上、ここでは方程式 (3) を『Benney-Gjevik 方程式』と呼ぶことにする。変数は無次元化してある。

Pumir ら [6] は Benney-Gjevik 方程式 (3) の解を数値的に求めた。彼らの例では Reynolds 数 R は 10 程度であり、 R/R_c は 2 程度以下である。また Weber 数 W は数千のオーダーである。このとき、方程式 (3) で $\partial_t = -c \partial_\zeta$, $\partial_x = \partial_\zeta$ とおいた力学系の homoclinic orbit として孤立波を記述する定常進行解が得られ、また初期値問題の解としても孤立波が実現する場合があることがわかった。しかし、同じ論文 [6] で、方程式 (3) の初期値問題は有限時間で破綻する場合があることが示されている。このとき起きるのは孤立波の自己収束であり、孤立波の幅が減少するとともに高さが急激に増加し発散する。まぎれもなくこれは非物理的な解であり、もちろん長波展開の適用範囲外である。

方程式 (3) は $\partial_x^2 (h^7)$ のような非線形の不安定項を含んでいる。この形が適切でないために、上記のような非物理的なふるまいを示すのだと考えられる。ただし、非線形の不安定性の存在そのものは物理的に正しい。なぜなら、不安定性は R_{local} (局所的な R) に依存し、 R_{local} は h (の低波数成分) に依存するからである。Benney-Gjevik 方程式 (3) はおそらく中高波数領域でこの効果を過大評価している。

いっぽう、(3) で $h = 1 + \eta$, $|\eta| \ll 1$ として得られる Kuramoto-Sivashinsky 方程式

$$\partial_t \eta + (2 + 4\eta) \partial_x \eta + \left[\frac{8}{15} R - \frac{2}{3} \cot \alpha \right] \partial_x^2 \eta + \frac{2}{3} W \partial_x^4 \eta = 0 \quad (4)$$

は非線形の不安定項を含まないので、初期値問題が破綻することはない。しかしそもそも $|\eta| \ll 1$ という条件があり、方程式 (4) の正当な適用範囲は極めて限られている。また高階微分項の係数がすべて定数であるため、方程式 (4) は特徴的な長さスケールを固定されていることになり、したがってパルスの幅や間隔が決められてしまう (特に一様状態は必ず不安定である)。つまり、局所 Reynolds 数の効果を全く無視していることになる。この事情は、 $\partial_x^3 \eta$ 項 (Q_2 に由来) を方程式 (4) に付け加えた場合 (いわゆる Benney 方程式) でも同じである。

大振幅の孤立波では、局所的に中高波数の成分が生じる。実験では液膜の厚さの $1/3$ 程度におよぶ振幅の波が確かに観察されているのだが、(3) でも (4) でも大振幅波は記述できそうにない。原因は長波展開の結果を中高波数領域に外挿できないこと、特に局所 Reynolds 数の効果が適切に取り入れられていないことにある。

また、単純に展開の次数を上げて結果が改善されるとは限らないことに注意しよう。長波展開を μ の高次まで実行すると、(4) に相当する式で、4 階以上の偶数階微分項はすべて正の係数をもつことがわかる。図 (1) に示す線形成長率 $\Re \sigma(k)$ の多項式展開において、 $k > 0.3$ では項数を増やしても値が収束しない (なお太線は式 (18) による)。高波数側で $\Re \sigma$ が正だと初期値問題が ill-posed になってしまうので、6 次までの展開は 4 次までの展開より悪い。

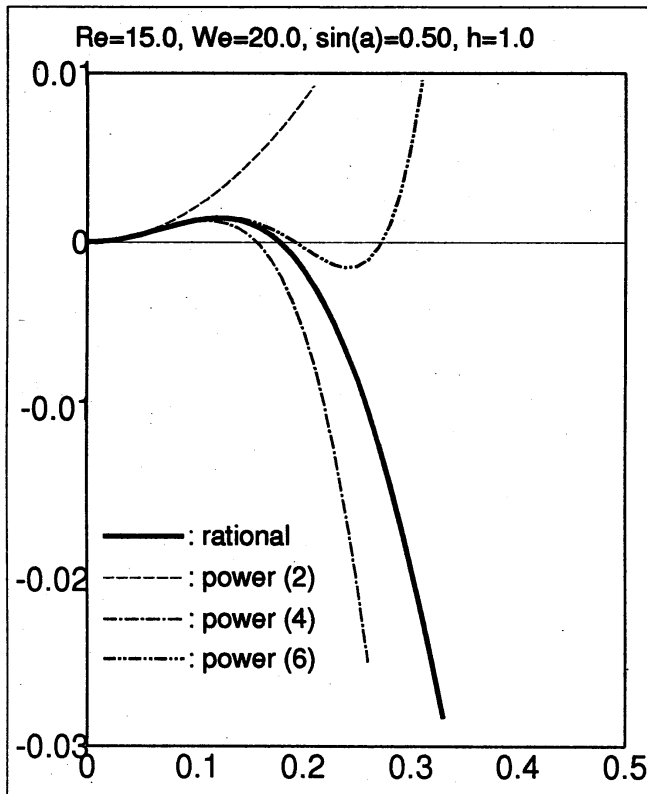


Figure 1: 成長率 σ を波数 k の有限べき級数で表すとき、高波数側ではいくら次数を上げてても級数は収束しない。特に ill-posedness という意味で 6 次は 4 次より悪い。

1.4 積分近似

長波展開は、いわば『ばらばらにする』アプローチであった。これに対して、同様に液膜の薄さを利用しながら逆に『まとめてしまう』方向で方程式を縮約する手法として、Navier-Stokes 方程式を z 方向に積分する方法がある [7]。このアプローチは、境界層の運動量方程式による解析 [8] との類似から、しばしば境界層積分近似の方法と呼ばれる。積分を実行するために、速度プロファイルはどこでも放物線型つまり (1) で h_0 の代わりに h としたものである、と天下り的に仮定する。

Prokopiou ら [7] は この手法を進めて粘性項の寄与を $\partial_z^2 u$ だけでなく $\partial_x^2 u$ まで取り込むことにより、比較的高い Reynolds 数でも 周期解が定常進行解として存在しうることを示した。ただし彼ら自身が論文の appendix で説明しているように、得られる臨界 Reynolds 数は係数のおんだけおかしい。これは放物型の速度プロファイルを 天下りに仮定したためである。また、彼らの論文の図を見る限り、液膜流の実験で見られるような、著しく前後非対称な孤立波解は出ないらしい。おそらくこれは表面張力を無視したからであろう。

2 モデル方程式の導出

2.1 基本的発想

前章では 液膜流の近似方程式についてのこれまでの研究を概説した。

長波展開の長所は、系統的な展開であるため、展開の前提条件 (変数の空間変化がゆるやかであること) が満たされている限り定量的に正確な結果を与えることである。ただし いったん中高波数の成分が、たとえ局所的にせよ励起されると、長波展開で得られた方程式は もはや有効でない。特に、不安定項の非線形性によって 解が有限時間で特異性を生じることがある。

積分近似の方法は、天下り的な仮定を含んではいるが、基本的には 運動量のバランスという 明確な物理的概念に基づいている。高い Reynolds 数でも (波形の正確さはともかく) 妥当な速度で進行する定常解を持つのは、おそらくそのためである。

積分近似の頑強さと物理的な明解さを受けつぎ、かつ長波展開の正確さをあわせもつ手法はないだろうか。考えられるのは次のような方法である。積分近似の方法で天下りの放物型を仮定するかわりに、長波展開で得られた速度プロファイルを代入すればよい。すると適当な近似のもとで、運動量バランスの式は h と Q の関係式として

$$\left[1 + \hat{L}_1 + \dots\right] Q = [h, \partial_x h, \dots \text{の式}] \quad (5)$$

のように書けるだろう。(ここで $\hat{L}_1 \sim O(\mu)$ である。) これを $\partial_t h + \partial_x Q$ と連立させればよい。

Benney-Gjevik の式 (3) は本来 (52) のような式で、 $Q = [h, \partial_x h, \dots \text{の関数}]$ という形である。関係式 (5) に $\left[1 + \hat{L}_1 + \dots\right]^{-1}$ を作用させたものは、 $\mu \rightarrow 0$ の極限で (52) に一致しなくてはならない。しかしだからといって (3) は (52) と同等だとは言えない。たとえば Padé 近似はべき級数と同等ではない。後者が外挿できなくても、前者は外挿できることが多いのである。この類推から、(52) のような式は (3) の有効範囲を広げたものになっているかもしれないと期待できる。もちろんこれは検証されなければならない。

2.2 近似方程式の導出

Navier-Stokes 方程式 (26) の x 方向の成分

$$[\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla] u = -\rho^{-1} \partial_x p + g_x + \Delta u \quad (6)$$

に $\int_0^h$ を作用させ、運動量バランスの式を求める。まず

$$[\text{式 (6) の左辺}] = \partial_t Q + \partial_x A \quad (7)$$

と書ける。ここで $Q = \int_0^h u \, dz$, $A = \int_0^h u^2 \, dz$ である。いっぽう

$$[\text{式 (6) の右辺}] = \rho^{-1} [-\partial_x P + (\partial_x h) p_{\text{surf}}] + g_x h + [\text{摩擦}] + [\text{運動量拡散}] \quad (8)$$

であり、ここで

$$P = \int_0^h p \, dz, \quad [\text{摩擦}] = \int_0^h \nu \partial_z^2 u \, dz \simeq -\partial_z u|_{z=0}, \quad [\text{運動量拡散}] = \int_0^h \nu \partial_x^2 u \, dz \simeq \nu \partial_x^2 Q + \dots \quad (9)$$

と定義している。また、粘性項を二つに分け、運動量が壁に伝わる場合 (摩擦) と前後の流体要素に伝わる場合 (運動量拡散) とを区別している。

ここで積分を計算するために u や p の z 依存性に関する情報が必要である。長波展開の結果 (詳細は Appendix B を参照) より

$$\begin{aligned} u &= Q \cdot \left[\frac{3}{h^2} z - \frac{3}{2h^3} z^2 \right] + u_1^* + u_2^* + \dots, \\ u_1^* &= \mu \left\{ u_1 - \left[\frac{3}{h^2} z - \frac{3}{2h^3} z^2 \right] \int_0^h u_1 \, dz \right\} = (g_x^2 / \nu^3) \cdot \left[-\frac{h^4}{15} z + \frac{h^3}{5} z^2 - \frac{h^2}{6} z^3 + \frac{h}{24} z^4 \right] \partial_x h, \\ u_2^* &= \mu^2 \left\{ u_2 - \left[\frac{3}{h^2} z - \frac{3}{2h^3} z^2 \right] \int_0^h u_2 \, dz \right\} = \dots, \\ \int u_1^* \, dz &= 0, \quad \int u_2^* \, dz = 0, \quad Q = \int u \, dz, \\ p &= g_z \cdot (h - z) - W \partial_x^2 h + \dots \end{aligned}$$

として代入する。ここで u_1^* 以下は放物線型の速度プロファイルからのずれを表している。なお $g_z = g \cos \alpha$, $g_x = -g \sin \alpha$ であり、長波パラメータは ∂_x のなかに含めている。

代入の結果、

$$\partial_t Q + \frac{6}{5} \partial_x \left[\frac{Q^2}{h} \right] = -g \cos \alpha \cdot h \partial_x h + \frac{T}{\rho} h \partial_x^3 h + g \sin \alpha \cdot h - \frac{3\nu Q}{h^2} + \frac{(g \sin \alpha)^2 h^4}{15\nu^2} \partial_x h + O(\mu^2) \quad (10)$$

のような関係式を得る。各項はそれぞれ物理的な意味をもつ (表 1 を参照)。

関係式 (10) の左辺は Q について非線形なので扱いにくい。また、 $\partial_t Q$ を含んでいるので、流量の式 (32) と組み合わせた方程式は全体として時間に関して 2 階の偏微分方程式となり、よけいな自由度を含むことに

左辺: 慣性項、移流項	Q : 摩擦抵抗
$-g \cos \alpha \cdot h \partial_x h$: 静水圧	$-[(2/5)g \sin \alpha / \nu^2] h^4 \partial_x Q$: 『慣性』
$(T/\rho) h \partial_x^3 h$: 表面張力	$[g \sin \alpha / (3\nu)] h^3$: 重力
$g \sin \alpha \cdot h$: 重力 (横方向)	$-[g \cos \alpha / (3\nu)] h^3 \partial_x h$: 静水圧
$(3\nu Q / h^2)$: 摩擦	$-[(4/15)(g \sin \alpha)^2 / \nu^3] h^6 \partial_x h$: 『移流項』
$\frac{(g \sin \alpha)^2}{15\nu^2} h^4 \partial_x h + O(\mu^2)$: 補正項	$[T / (3\rho\nu)] h^3 \partial_x^3 h$: 表面張力

Table 1: 関係式 (10)(14) の各項の物理的な意味

なる。これらの問題点を回避するために、逐次近似的な方法で左辺を書きかえる。まず関係式 (10) で $O(\mu)$ の項を無視すると

$$Q = \frac{g \sin \alpha}{3\nu} \cdot h^3 + O(\mu) \quad (11)$$

であり、これと $\partial_t h + \partial_x Q = 0$ より

$$[\partial_t + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \cdot h^2 \partial_x] h \simeq 0 \quad (12)$$

のような 1 階双曲型方程式を得る。よって (11)(12) を用いて

$$\begin{aligned} [(10) \text{ の左辺}] &= \left[\partial_t + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \partial_x \right] Q + \left[\frac{12}{5h} Q - \frac{g \sin \alpha}{\nu} \right] \partial_x Q - \frac{6}{5h^2} Q^2 \partial_x h \\ &= -\frac{6g \sin \alpha}{5\nu} \partial_x Q + \frac{13(g \sin \alpha)^2}{15\nu^2} \partial_x h \end{aligned} \quad (13)$$

のように書き直すことができる。

こうして左辺を書き直したあと、(10) 全体に $h^2/(3\nu)$ をかけて整理すると

$$Q - \frac{2g \sin \alpha}{5\nu^2} h^4 \partial_x Q = \frac{g \sin \alpha}{3\nu} \left[h^3 - \cot \alpha \cdot h^3 \partial_x h - \frac{4g \sin \alpha}{5\nu^2} h^6 \partial_x h \right] + \frac{T}{3\rho\nu} h^3 \partial_x^3 h \quad (14)$$

となる (各項の物理的由来については表を参照)。なお (3) と比較するため、同様に無次元化すると

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0, \quad Q - \frac{4}{5} R h^4 \partial_x Q = \frac{2}{3} \left[h^3 - \cot \alpha \cdot h^3 \partial_x h - \frac{8}{5} R h^6 \partial_x h + W h^3 \partial_x^3 h \right] \quad (15)$$

のようになる。長波極限で $\left[1 - \frac{4}{5} R h^4 \partial_x\right]^{-1} \simeq 1 + \frac{4}{5} R h^4 \partial_x = 1 + O(\mu)$ であるから、(15) は (3) に漸近的に一致する。

3 考察

3.1 振幅展開

方程式 (15) において $h = h_0(1 + \eta)$, $|\eta| \ll 1$ とし、変数を適当にスケールしなおすと

$$\partial_\tau \eta + a_0(1 + 2\eta) \partial_\xi \eta - \partial_\xi (\partial_\tau + \partial_\xi) \eta + W \partial_\xi^4 \eta = 0 \quad (16)$$

のような方程式が得られる。これは Kuramoto-Sivashinsky 方程式 (4) とは異なる形の不安定項 $\partial_\xi \partial_\tau \eta$ をもつ。この項は慣性項に由来している。

方程式 (15) の定常進行解を求めるため、 $\partial_\tau = -c \partial_\zeta$, $\partial_\xi = \partial_\zeta$ とおくと

$$-c\eta + a_0(\eta + \eta^2) - (1 - c) \partial_\zeta \eta + W \partial_\zeta^3 \eta = 0 \quad (17)$$

のような常微分方程式が得られる。Reynolds 数が R_c 以上ならば $a_0 > 1$ であり、このとき (17) を変数変換によって Kuramoto-Sivashinsky 方程式の定常解の式に帰着させることが可能であるから、(16) は Kuramoto-Sivashinsky 方程式と同様な定常進行解を持つことがわかる。特に homoclinic orbit として 孤立波解を求めることができる。

いっぽう、一様状態の安定性を調べるため、 $\eta = \eta_0 + \epsilon e^{ik\xi + \sigma\tau}$ ($\epsilon \ll |\eta_0| \ll 1$) として (16) に代入すると

$$\sigma = \frac{-a_0(1+2\eta_0)ik - k^2 - Wk^4}{1 - ik} \quad (18)$$

のようになり、 $\Re\sigma$ が η_0 に依存することがわかる。つまり、方程式 (16) は Kuramoto-Sivashinsky 方程式と違って、ある程度 局所 Reynolds 数の効果を含んでいる。

3.2 物理的機構

式 (14) に $\partial_t h + \partial_x Q = 0$ を用いて Q を消去すると h の発展方程式が得られるが、このとき 奇数階微分の項は 波動において保存的な効果 (移流・分散など) に寄与し、偶数階微分の項は 非保存的な効果 (不安定化・減衰など) にかかわっている。いっぽう (14) の各項の物理的出自がはっきりしているので、波動の安定化や不安定化の物理的なメカニズムを論じることが可能になる。表 1 と h の発展方程式を見比べると、

- 物理的にエネルギーを保存しない項 (粘性、外力など) $\leftrightarrow$ 波動にとっての保存項
- 物理的にエネルギーを保存する項 (圧力、表面張力、慣性など) $\leftrightarrow$ 波動にとっての非保存項

という、一見 逆説的な結論が得られる。どうしてこのようなことになっているのであろうか。

いま仮に、エネルギーを保存しない項の寄与だけがあるとしよう (重力 g_x は外力なので エネルギーの供給源と見なす)。一様状態に近い場合には、 g_x (横方向の重力) と摩擦のみを考えればよく、

$$0 = g \sin \alpha \cdot h - \frac{3\nu Q}{h^2}, \quad \partial_t h + \partial_x Q = 0 \quad (19)$$

より 1 階双曲波動方程式であって、波動は保存的である。また 運動量拡散 $\partial_x^2 Q$ を つけ加えて得られる方程式は やはり純分散であり、振幅展開すると RLW 方程式

$$[\partial_t + (1 + \eta)\partial_x]\eta - \partial_x^2 \partial_t \eta = 0 \quad (20)$$

に帰着する。これらの項の寄与する波動に特徴的な速度を u_D としよう。重力 (横方向) $\sim g \sin \alpha$ と摩擦 $\sim u_D \cdot \nu / h^2$ がつりあうとすれば

$$u_D \sim \frac{g \sin \alpha}{\nu} \cdot h^2 \quad (21)$$

である。

いっぽう、エネルギーを保存する項だけの寄与があったとしよう。最低次では静水圧と慣性のみを考えればよく、

$$\partial_t Q = -g \cos \alpha \cdot h \partial_x h, \quad \partial_t h + \partial_x Q = 0 \quad (22)$$

より 2 階の波動方程式になり、やはり保存的な波動になる。さらに表面張力を付け加えて得られる方程式も純分散であって、振幅が小さいとき Boussinesq 型の方程式になる (高波数のモードほど速度が大きい)。これらの項の寄与する波動に特徴的な速度を u_C とすると、静水圧勾配 $\sim \mu \cdot g \cos \alpha$ と慣性 $\sim \mu u_C^2 / h$ をつりあわせて

$$u_C \sim \sqrt{gh \cos \alpha} \quad (23)$$

となる。

このように、エネルギーを保存する項だけが合った場合も、逆にエネルギーを保存しない項だけが合ったばあいも、どちらも純分散の波動になることが分かった。知りたいのは、これらの両方の種類の効果が共存している場合である。そこで、両方の波動を支配する方程式の最低次での微分階数を比べてみると、『エネルギーを保存しない波』のほうが最低次で 1 階波動方程式なので次数が低い。したがってこちらの波が長波を支配し、波の進む速度は $c_D \sim u_D \sim (g \sin \alpha / \nu) \cdot h^2$ となる。いっぽう『エネルギーを保存する波』はより波長の短い波に寄与し、したがって信号伝播速度は $c_C \sim u_C \sim \sqrt{gh \cos \alpha}$ によって規定される。

すると

$$\frac{c_D}{c_C} \sim \left[\frac{g \sin^2 \alpha}{\nu^2 \cos \alpha} \cdot h^3 \right]^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{R \tan \alpha} \quad (24)$$

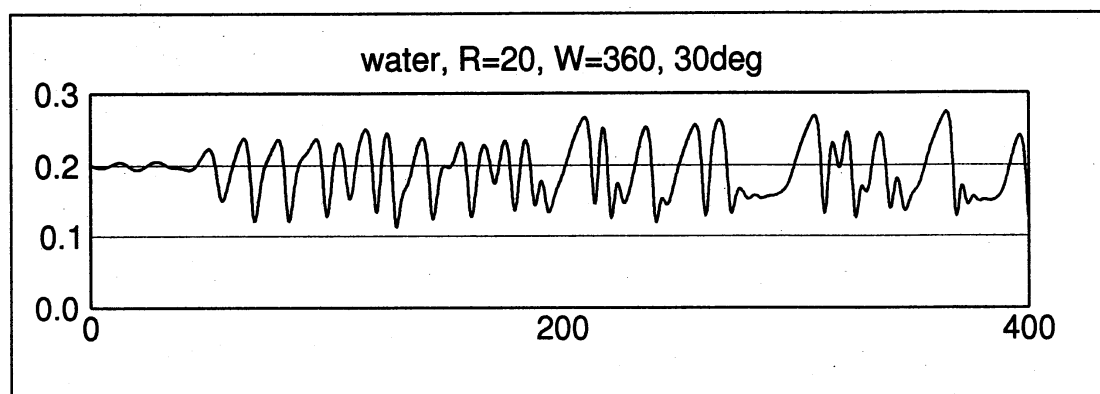


Figure 2: 常温の水の場合。流入端での液膜厚さは $h_0 = 0.2\text{mm}$ で、10Hz と 12Hz で同時に加振。

(ただし $R \sim u_D h / \nu$) であるから、 R が $\cot \alpha$ に比べて大きいとき $c_D > c_C$ となる。つまり線形長波の進む速度が信号伝播速度を超えてしまうことになり、このような線形波は安定に存在できない。これが不安定性の生じる原因であり、また臨界 Reynolds 数の説明になっている。

もともとこのような信号伝播速度による線形波の安定性の議論は、Whitham が交通流の線形波に関して言い出したものである [9]。彼は『Wave Hierarchy (波動階層)』という名前でこの問題を論じ、1 階と 2 階の線形波動方程式が結合した方程式の初期値問題が well-posed であるためには、1 階の方程式の特性線は 2 階の方程式の特性線の間になければならないと言っている。

しかしもし適切な分散性と非線形性があれば、低波数領域は不安定であっても系全体としては非線形領域で安定化することが可能である。筆者ら [10] の研究によると、1 次元の粉体流動層などでは、運動量拡散による分散性が、波動の進む速度を高波数側で抑えることで安定化している。液膜流の場合は、逆に表面張力の存在が信号伝播速度を高波数側で増大させて安定化に寄与していると思われる。Pumir ら [6] は孤立波の下流側に生じる液面のくぼみや振動について『あたかも早く動く孤立波に押されて座屈しているようだ』と評したが、むしろ逆に表面張力波が孤立波を引っ張っている、と見るべきなのかもしれない。

3.3 数値計算

前節で述べたように、式 (14) は液膜流の物理を体現している。しかし具体的に解く場合の有効性を検証するためには数値的な手段によらなければならない。方程式の『もっともらしさ』を検証するため、初期値問題をいくつか数値的に解いてみた。時間・空間ともに差分法を用いる (スキームの説明は Appendix C を参照)。現実の物性値との対応を考えやすいように、すべての量は通常の次元をもつものとして扱っている。以下の図において、横軸は x 座標を、縦軸は液膜の厚さ h を表し、目盛はすべて mm 単位である。

以下の例では、流入側の境界で単一振動数あるいはふたつの振動数の微小振動を加え、系全体がほぼ定常になるまで時間発展させた。したがって図には特に時刻は示していない。

図 2 は物性値として水に対する値を指定した場合の結果である。斜面の角度は 30 度としたので、 R_c は 2.2 程度であるが、いっぽう流入時の液膜厚さに基づく Reynolds 数は 20 となり、 R_c よりかなり大きい。計算結果を見ると、下流では上流に比べて波数が減少しており、またパルスの間にある平らな液膜の部分の厚さは流入端の液膜厚さにくらべて相当減少していることが分かる。波のパターンを見た印象では、計算結果はは非常にもっともらしい気がするが、おそらく水の表面張力が大きいためにうまくいくのであろう。また、この計算例は、大振幅の波であっても計算が破綻しないことを示す例にもなっている。

図 3 ではグリセリン水溶液の物性値を用いている。臨界 Reynolds 数は 15.6 である。図 2 の場合ほど顕著ではないが、やはり下流に行くにしたがって波数が低下し、それに伴ってパルス以外の部分での液膜の厚さが減少する。

図 4 では同じくグリセリン水溶液を用い、流入時の液膜の厚さをもう少し大きくしている。実際の実験 [1] との比較を意図した計算であるが、結果はかなり実験と違っており、特にパルスの下流側の振動が大きすぎるように思われる。この例では前の例に比べて W が比較的小さいので、表面張力だけでは不安定性をおさえるのに十分ではないのかもしれない。

図 5 は、Benney-Gjevik 方程式 (3) よりも方程式 (14) のほうが特異な振舞いを生じにくいことを示す

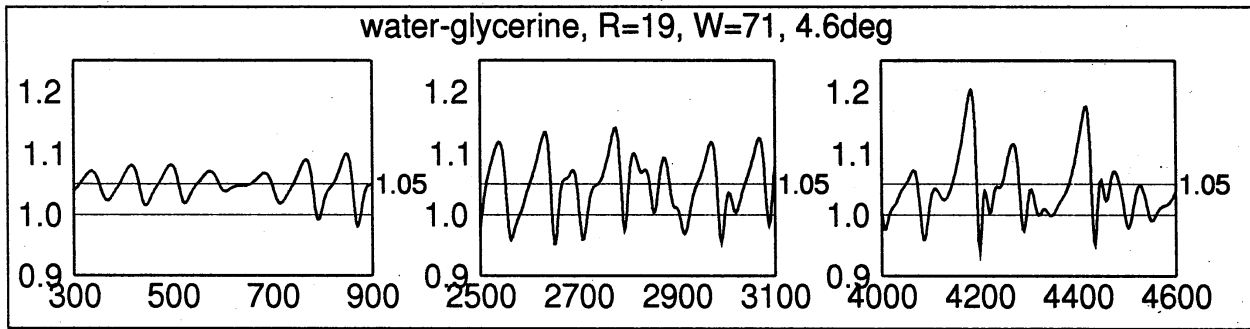


Figure 3: グリセリン水溶液の物性値を用いた場合。流入時の液膜の厚さは1.05mm。境界では2Hzと2.4Hzで同時に加振。

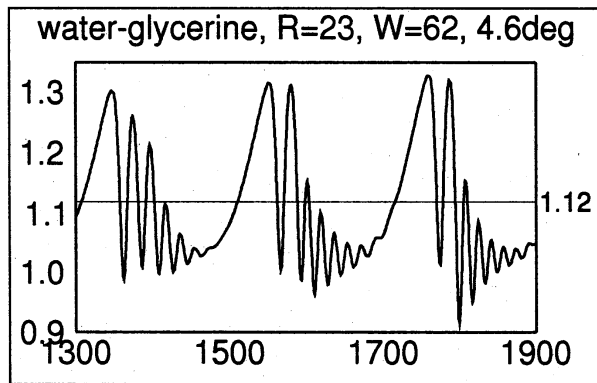


Figure 4: グリセリン水溶液の例で、流入時の液膜の厚さは1.12mm。上流の境界では単一の振動数(1Hz)で加振している。

めの計算例である。計算パラメータはPumirら[6]の有限時間で発散する例に合わせた。少なくともこの計算では全く特異性を生じる様子がない。ただし本当に(14)が特異性を生じにくいことを主張するには初期条件をさまざまに変えて調べてみる必要があるだろう。

以上の計算例のなかで、明らかにおかしいのは図4の場合である。ひとつの可能性として、このように R が比較的大きく W があまり大きくない場合、表面張力の効果よりも運動量拡散の効果の方が重要なのではないかと考えられる。運動量拡散はRLW型の分散性を意味するから、Benney方程式の場合と同様に、パルスの下流側での裾の振動を抑える働きがあると期待される。運動量拡散まで含む近似方程式をより系統的な方法で導出し、図4の計算を改善したらはたして実験と合うようになるかどうかは、これからの課題である。

図4以外の計算例について、定量的な検証は行っていないが、定性的には非常にもっともらしい。波数の低下により孤立波の不規則な列が生じる様子は、実験での観察と一致する。また液膜の『ベースライン』の低下であるが、 $R \sim R_c \sim \cot \alpha$ となるような h は

$$h = h_c \sim \left[\frac{\nu^2 \cos \alpha}{g \sin \alpha^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (25)$$

で与えられ、これは物性など系の固有の性質だけで決まる。下流での液膜の厚さがしだいに h_c に近づいていくとすれば、 R_{local} が減少するので新たな孤立波の発生はそれだけ抑制されることになり、波数低下という観測事実とつじつまが合う。

3.4 まとめ

液膜流の大振幅波は、通常の長波展開ではうまく記述できない。本研究では、長波展開の結果をそのまま用いるのではなく、積分方程式に代入することによって物理的な『意味付け』を回復するというところを行

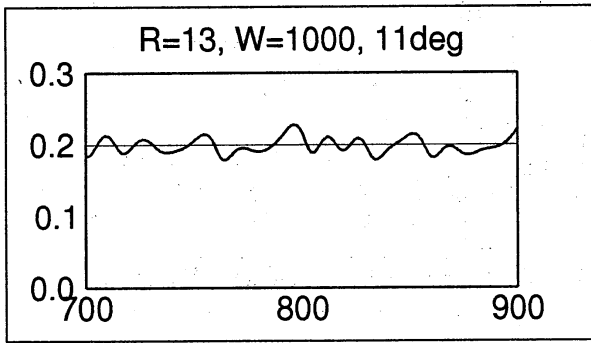


Figure 5: Pumir らの計算で有限時間内に特異性を生じる例と同じパラメータでの計算。この計算では特異性はまったく生じていない。

なった。こうして得られる方程式は、 $\partial_t \partial_x$ のような微分をもつ項を含んでいる。この形は振幅展開された方程式にも引き継がれ、不安定性に関して非線形効果 (局所 Reynolds 数の効果) を示す。

こうして得られた h の発展方程式では、各項の物理的な意味が明瞭であるため、不安定性や安定化の物理的な機構を論じることができる。分かったことは、それぞれ単独で存在するなら純分散であるはずの二種類の波動が共存しており、低階の波動が高階の波動よりも速く進むとすると不安定性が生じることである。このような機構は、交通流や混相流では昔から知られているが、液膜流に関してこの機構が働いていることはおそらく今まで気付かれていなかったのではないかと思う。

得られた近似方程式が、物理的な機構の考察に役立つだけでなく、それ自体として有用であるかどうかは、数値計算と実験とを比較して検証するよりない。今までの計算結果では、表面張力の効果が大きい場合には妥当なふるまいをするように見えるが、これは膜の厚さが薄くなるなどの理由から実験がしにくい領域でもある。逆に、高精度の実験的測定がなされているグリセリン水溶液の場合、表面張力があまり大きくないため、近似方程式はうまく働かない。ただし、運動量拡散を取り込むことにより改良の余地がある。

結局、有限振幅波が記述できるかどうかは いまだ検証できていないことになるが、見込みはありそうだというのが現在の結論である。

Appendices

A 基礎方程式

以下、 xz 面内の 2 次元流として扱う。斜面に垂直に z 軸をとり、斜面を下る方向に x 軸をとる。

液膜の表面を $z = h(x, t)$ 、底面を $z = 0$ とし、非圧縮性を仮定すると、 $0 < z < h$ の範囲で

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div} [\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \boldsymbol{\nabla}] = \rho \mathbf{g} \quad (26)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (27)$$

が成り立つ。応力 $\boldsymbol{\nabla}$ については通常の粘性流体を考え、また重力加速度を $\mathbf{g}$ とすると

$$\boldsymbol{\nabla} = -p \mathbf{1} + 2\rho \nu \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{u}, \quad (28)$$

$$\mathbf{g} = (g_x, g_z) = g(\sin \alpha, -\cos \alpha) \quad (29)$$

である。角度 α は斜面の傾きをあらわす。

つぎに境界条件を考える。面 $z = 0$ では粘着条件

$$\mathbf{u}|_{z=0} = 0 \quad (30)$$

を要請する。液膜表面 $z = h$ では、表面をとおしてはたらく応力 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{n}$ について

$$\boldsymbol{\nabla}|_{z=h} \cdot \mathbf{n} = \left[-p_{\text{atm}} + T \cdot \frac{\partial_x^2 h}{[1 + (\partial_x h)^2]^{3/2}} \right] \mathbf{n}, \quad (31)$$

とする (大気圧 $p_{\text{atm}} = 0$ として一般性を失わない)。ここで T は表面張力係数であり、 $\mathbf{n} = (-\partial_x h, 1)/\sqrt{1 + (\partial_x h)^2}$ は表面の法線ベクトルである。このほか、表面に関する運動学的条件 $[\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla](h - z) = 0$ が要請されるが、これは $Q = \int_0^h dz w$ を導入すると

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0 \quad (32)$$

と等価である。

B 長波展開の計算

以下、Benney 以来の同じ計算の繰り返しである。ただし始めから無次元量を導入しても見通しが良くならないので、次元をもたせたまま計算し、最後に無次元化している。

長波パラメータ μ により

$$\begin{aligned}\partial_x &= \mu \partial_{x_1}, \quad \partial_t = \mu \partial_{t_1} + \mu^2 \partial_{t_2} + \cdots, \\ u &= u_0 + \mu u_1 + \cdots, \quad w = \mu w_1 + \cdots, \\ p &= p_0 + \mu p_1 + \cdots\end{aligned}\quad (33)$$

のように展開する。ただし ∂_z はそのままにしておく。また h もとりあえず展開しない。

運動方程式 (26) から p を消去すると、 μ^0 のオーダーで $\partial_z^3 u_0 = 0$ となり、境界条件を満たす解

$$u_0 = U \left[\frac{2z}{h} - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right], \quad U = \frac{g_x}{2\nu} h^2 \quad (34)$$

は放物線型のプロファイルをもつ。圧力については $\partial_z p_0 + \rho g_y = 0$ および表面での境界条件 (31) から

$$p_0 = \rho g_z (h - z) \quad (35)$$

が得られる。なお重力の成分 (g_x, g_z) は (29) で定義される。

次に μ^1 のオーダーを考えるのだが、ここで h や U は x_1 に依存することに注意する。連続の式 (27) から

$$\partial_z w_1 = -\partial_{x_1} u_0 = \frac{g_x}{\nu} \cdot z \partial_{x_1} h \quad (36)$$

であり、底面での境界条件 (30) を考慮すると

$$w_1 = -U \cdot \left(\frac{z}{h} \right)^2 \partial_{x_1} h \quad (37)$$

となる。また関係式 (32) からは

$$Q_0 = \int_0^h u_0 dz = \frac{2}{3} U h, \quad (38)$$

$$\partial_{t_1} h = -\partial_{x_1} Q_0 = -2U \partial_{x_1} h \quad (39)$$

を得る。さて運動方程式 (26) は μ^1 のオーダーで

$$[\partial_{t_1} + u_0 \partial_{x_1} + w_1 \partial_z] u_0 = -\rho^{-1} \partial_{x_1} p_0 + \nu \partial_z^2 u_1 \quad (40)$$

$$0 = -\rho^{-1} \partial_z p_1 + \nu \partial_z^2 w_1 \quad (41)$$

であるから、これに上記の結果を代入して

$$\partial_z^2 u_1 = -\frac{2U^2}{\nu h} \left[\frac{2z}{h} - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \partial_{x_1} h + g_z \partial_{x_1} h, \quad (42)$$

$$\partial_z p_1 = -\rho g_x \partial_{x_1} h \quad (43)$$

以上の結果を足しあわせると

$$\begin{aligned}Q &= Q_0 + \mu [Q_1 + \mu^2 Q_3] + O(\mu^2) \\ &\simeq U h \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{8}{15} \frac{U h}{\nu} - \frac{2}{3} \cot \alpha \right) \right] + \frac{T}{3\rho\nu} h^3 \partial_{x_1}^3 h\end{aligned}\quad (52)$$

となり、これを (32) に代入して h の発展方程式が得られる。ただし $U = [g_x / (2\nu)] h^2$, $\partial_x = \mu \partial_{x_1}$ である。無次元化のために $h/h_0, Q/(\rho U_0 h_0), h_0 \partial_x, (h_0/U_0) \partial_t$ をあらためて $h, Q, \partial_x, \partial_t$ と書いて Benney-Gjevik の方程式 (3) を得る。

となる。底面および表面での境界条件をみたす解は

$$u_1 = \frac{hU^2}{\nu} \cdot \left[\frac{4z}{3h} - \frac{2}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{z}{h} \right)^4 \right] \partial_{x_1} h - U \cot \alpha \cdot \left[\frac{2z}{h} - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \partial_{x_1} h, \quad (44)$$

$$p_1 = -\rho g_x (h + z) \partial_{x_1} h \quad (45)$$

である。これより

$$Q_1 = \int_0^h u_1 dz = \frac{8}{15} \cdot \frac{h^2 U^2}{\nu} \partial_{x_1} h - \frac{2}{3} h U \cot \alpha \cdot \partial_{x_1} h \quad (46)$$

を得る。以下同様に計算を続けることができる。

ところで、粘性の割に表面張力が大きい物質の場合、臨界波数 k_c は

$$k_c \sim h^{-1} \sqrt{\frac{R - R_c}{W}} \quad (47)$$

で与えられるので、 $R - R_c$ が $O(1)$ であっても長波が卓越し、このとき $\mu^2 W \sim O(1)$ となるはずである (W は表面張力係数 T に比例する) [4]。したがって、展開を $O(\mu^1)$ で打ち切る場合でも、 T の寄与だけはとりこんでおかなくてはならない。表面張力の効果は表面の境界条件 (31) に $O(\mu^2)$ の項として現れ、

$$T \partial_{x_1}^2 h = -p_2|_{z=h} + [T \text{ に関して } 0 \text{ 次}] \quad (48)$$

のようになる。さて T に関して 0 次の項を無視すれば、(26) の $O(\mu^2)$ の項より $\partial_z p_2 = 0$ であり、したがって

$$p_2 = T \partial_{x_1}^2 h \quad (49)$$

である。よって、 T を含まない項を無視する近似のもとで

$$u_3 = \frac{T}{\rho\nu} \left[hz - \frac{z^2}{2} \right] \partial_{x_1}^3 h, \quad (50)$$

$$Q_3 = \frac{T}{3\rho\nu} h^3 \partial_{x_1}^3 h \quad (51)$$

を得る。

C 数値計算スキーム

方程式 (14) と $\partial_t h + \partial_x Q = 0$ から Q を消去すると

$$\partial_t h - A \partial_x \partial_x (h^5) + B \partial_x (h^3) - \partial_x^2 [Ch^4 + Dh^7] + E \partial_x [h^3 \partial_x^3 h] = 0 \quad (53)$$

のような形になる。ここで A, B, C, D, E は正の定数である。方程式は E の項のため放物型であり、陰解法による時間発展が望ましい。いま $h^{(+)} = h(t + \Delta t)$ と書き、

$$\frac{1}{\Delta t} [h^{(+)} - h - 5A \partial_x (h^4 h^{(+)} - h^5)] + B \partial_x (h^2 h^{(+)}) - \partial_x^2 [(Ch^3 + Dh^6) h^{(+)}] + E \partial_x [h^3 \partial_x^3 h^{(+)}] = 0 \quad (54)$$

のように時間方向に差分化する。空間差分は最大 5 項 (つまり $j-2$ 番目から $j+2$ 番目まで) を用いた。ほとんどの部分は中心差分で良いが、 A および E を含む部分には注意が必要である。まず (54) は

$$h^{(+)} - 5A \partial_x (h^4 h^{(+)}) = h - 5A \partial_x (h^5) + O(\Delta t) \quad (55)$$

の形であり、 $h^{(+)}$ が安定に求められるためには $A \partial_x$ の部分を適切に離散化しなければならない。ここで

$$\partial_x (h^4 h^{(+)}) = \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{1}{6} h_{j+2}^4 h_{j+2}^{(+)} + h_{j+1}^4 h_{j+1}^{(+)} - \frac{1}{2} h_j^4 h_j^{(+)} - \frac{1}{3} h_{j-1}^4 h_{j-1}^{(+)} \right] \quad (56)$$

のように差分化する。いわゆる上流差分であるが、 $h^{(+)}$ の差分化なので逆に下流側を取る。また E の項に関しては、

$$\begin{aligned} \partial_x [h^3 \partial_x^3 h^{(+)}] \Big|_{x=x_j} &= \frac{1}{2\Delta x^4} \left[(h_{j+1} + h_j) h_{j+2}^{(+)} - (3h_{j+1} + 4h_j + h_{j-1}) h_{j+1}^{(+)} \right. \\ &\quad \left. + 3(h_{j+1} + 2h_j + h_{j-1}) h_j^{(+)} - (h_{j+1} + 4h_j + 3h_{j-1}) h_{j-1}^{(+)} + (h_j + h_{j-1}) h_{j-2}^{(+)} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

のように差分化する。

境界条件は上流に 2 つ、下流に 2 つ設定する。上流の境界では

$$h(x=0) = H(t), \quad \partial_x h(x=0) = 0 \quad (58)$$

とし、 $H(t)$ はたとえば $h_0 + \epsilon \sin(2\pi ft)$ で与える。下流の境界では透過境界条件およびその微分を課し、さらに境界近くに人工粘性を入れている。

時間積分の刻み幅 Δt の大きさは、ステップ二重化法により監視する。これにより時間積分の次数が 1 次から 2 次に上げられるというメリットもある。

References

- [1] Jun Liu, Jonathan D. Paul & J. P. Gollub: *Measurements of the primary instabilities of film flows*, J. Fluid Mech. **250**, 69 (1993)
- [2] Jun Liu & J. P. Gollub: *Solitary wave dynamics of film flows*, Phys. Fluids **6**, 1702 (1994)
- [3] D. J. Benney: *Long waves on liquid films*, J. Math. Phys. **45**, 150 (1957)
- [4] B. Gjevik: *Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films*, Phys. Fluids **13**, 1918
- [5] Nakaya C.: *Long waves on thin fluid layer flowing down an inclined plane*, Phys. Fluids **18**, 1407
- [6] A. Pumir, P. Manneville & Y. Pomeau: *On solitary waves running down an inclined plane*, J. Fluid Mech. **135**, 27 (1983)
- [7] Th. Prokopiou, M. Cheng & H.-C. Chang: *Long waves on inclined films at high Reynolds number*, J. Fluid Mech. **222**, 665 (1991)
- [8] K. Pohlhausen: *Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht*, Z. Angew. Math. Mech. **1**, 252
- [9] G. B. Whitham: *Linear and nonlinear waves* (Chapt. 10), Wiley (1974)
- [10] OOSHIDA Takeshi & Takuji KAWAHARA: *Generic Weakly-Nonlinear Model Equation for Density Waves in Two-Phase Fluids*, RIMS report **949**, 118 (1996)