

自由バーンサイド半群について

島根大学大学院総合理工学研究科 遠藤篤

Atsushi Endo

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering,
Shimane University

1 Introduction

A を有限 alphabet の集合、 A^* を A 上の全ての word の集合とする。このとき、自然数 m, n に対して $\mathbb{B}(A, m, n) = \langle A \mid T^m = T^{m+n}, \forall T \in A^* \rangle$ を自由バーンサイド半群という。

本稿では、 $m \geq 3, n \geq 1$ における自由バーンサイド半群に対する word problem の decidability について述べる。そのために、次の定理を考える。

Theorem 1.1. $m \geq 3, n \geq 1$ とする。このとき、 $\mathbb{B}(A, m, n)$ に対する word problem は decidable である。つまり、 A 上の二つの word が $\mathbb{B}(A, m, n)$ において等しいかどうかを決定する algorithm が存在する。

2 Inductive Definitions

はじめに、 k に関する 5 つの定義を帰納的に与える。

Definition 2.1. (period of rank k)

以下を満たすとき、 T を rank k の period であるという。

- (i) T は simple である。
- (ii) $|T| = k$
- (iii) T^3 は、任意の reducible l -periodic subword を含まない ($l < k$)。

Definition 2.2. (long k -periodic)

W が long k -periodic であるとは、以下の条件を満たす X, Y と、rank k の period T が存在することである。

- (i) XWY は T -periodic である。
- (ii) $XW(WY)$ は W の left(right) $(k-1)$ -extension である。
- (iii) $|XWY| \geq |T^m|$
- (iv) $|W| > |T|$

Definition 2.3. (reducible k -periodic)

W が reducible k -periodic であるとは、以下の条件を満たす rank k の period T が存在することである。

- (i) W は T -periodic である。
- (ii) $W = W_1 W_2$ ($|W_1| = |T^n|$ かつ、 W_2 は long k -periodic である。)

Definition 2.4. (immediate k -extension)

YX が X の immediate left k -extension であるとは、以下の条件を満たす Z, W が存在することである。

- (i) $X = WZ$
- (ii) W は long k -periodic である。
- (iii) YW は k -periodic である。

Definition 2.5. (k -extension)

YX が X の left k -extension であるとは、以下の条件を満たす $V_1, \dots, V_{k+1}$ が存在することである。

- (i) $V_{k+1} = X$
- (ii) $V_1 = YX$
- (iii) 任意の $j \in \{1, \dots, k\}$ に対して、 $V_j = V_{j+1}$ または、 V_j は V_{j+1} の immediate left j -extension である。

さらに、もう 1 つ重要な定義を与える。

Definition 2.6. (equal on the rank k)

X と Y が rank k において等しいとは、 $\mathbb{B}_k(A, m, n) = \langle A | T^m = T^{m+n}, T \text{ は rank } k \text{ 以下の任意の period} \rangle$ で与えられるモノイドにおいて、 X と Y が等しいことである。

3 A Reduced Form of the Word

ここでは、任意の X に対して、 X の k -reduced form の定義を与える。

X の k -reduced form な word を、 $k \geq 0$ において帰納的に定義する。

X の 0-reduced form は X とする。

$k > 0$ とする。 Y を X の $(k-1)$ -reduced form とする。ここから、 Y における rank k に関する削除の過程を述べる。この削除の結果として、 X の k -reduced form を得る。

Σ を Y の maximal k -periodic かつ k -reduced な subword 全体の集合とする。

Σ が empty のとき、 Y は X の k -reduced form であるとする。

Σ を nonempty とする。 Σ の任意の異なる word は、長さ k 以上の common part を持たない。

$P \subset \Sigma$ とする。 P の beginning Q に、次の性質を与える。

- (i) $|Q| = |T^{ns}| (s > 0)$
- (ii) $P = QR$ (R は long k -periodic)
- (iii) Q は最大の長さを持つ。

k -reducible の定義より、任意の $P \subset \Sigma$ に対して、この Q は存在する。この Q を marked word と呼ぶ。

任意の二つの marked word は disjoint であることを示す。そうでなければ、marked part が not disjoint であり、それぞれが T -, S -periodic な異なる二つの word が Σ に存在すると仮定する。 Σ の任意の word は、 Σ の他の word に含まれないので、period T の word は、period S の word の左側から始まるとする。最初の word の marked part Q は、次の word と重なる。また、最初の word は QR に等しい (R は long k -periodic)。よって、 $|R| > k$ なので、次の word は R を含み、二つの word は k より長い common part を持つ。これは矛盾するので、任意の二つの marked word は disjoint である。

ここで、左から順に Y から全ての marked word を取り除くことで、 X の k -reduced form を得る。

Lemma 3.1. 任意の X の k -reduced form を Y とすると、 $X \stackrel{k}{=} Y$ である。

Lemma 3.2. 長さ k の任意の X に対して、次が成り立つような rank l ($\leq k$) の period T 、word B, C 、整数 $d > 0$ が存在する。

$$\forall j \geq 2, X^j \stackrel{k-1}{=} BT^{dj}C$$

Lemma 3.3. $|X| = k$ ならば $X^m \stackrel{k}{=} X^{m+n}$ である。

Lemma 3.4. 次は同値である。

- (a) $X \stackrel{k}{=} Y$
- (b) X と Y の k -reduced form は等しい。

4 Inductive Lemmas

ここでは、Lemma 4.1 から Lemma 4.10 を rank k に関する連立帰納法で示す。

Lemma 4.1. T を rank k の period、 W を T -periodic、 XWY を T -periodic、 $XW(WY)$ を W の left(right) $(k-1)$ -extension とする。このとき、以下が成り立つ。

- (a) $|X| < |T|$, $|Y| < |T|$
- (b) $|XWY| \geq |T^m|$ ならば $|W| > |T^{m-2}|$ である。

Definition 4.1. (sufficient T -periodic)

T を rank k の period、 W を T -periodic とする。このとき、 W が sufficient T -periodic であるとは、 WC が long T -periodic ($|C| \leq |T|$) となる C が存在することである。

Lemma 4.2. W を long (sufficient) T -periodic、 $W = XYZ$ 、 Y を long l -periodic、 XY を l -periodic ($l < k$) とする。このとき、 YZ も long (sufficient) T -periodic である。

Lemma 4.3. W を long k -periodic、 V を W の beginning とする。このとき、 V が long l -periodic ($l < k$) ならば、 $|V| < |W| - k$ である。
ゆえに、 W の period T による、 V の right shift V^+ が存在して、この V^+ は W に完全に含まれる。

Lemma 4.4. W を long k -periodic とする。このとき、 $l < k$ ならば W は l -periodic でない。

Lemma 4.5.

- (a) XW を W の left k -extension、 V を XW の long k -periodic subword (V は W に含まれない) とする。このとき、 W は long k -periodic subword U で始まり、 U と V は k -agreed である。
- (b) XW を W の left l -extension (W は long l -periodic, $l \leq k$) とする。このとき、 XW が long s -periodic subword V を含む ($s \leq k$) ならば、 $s \leq l$ である。

Definition 4.2. (basic subword)

T を simple、 W を T -periodic とする。このとき、 W が T^∞ における basic subword であるとは、 T の power における shift を法とした、 T^∞ における unique な subword W が存在するということである。(つまり、任意の T -periodic word X に対して、 $X = BWC = DWE$ ならば、 $|T|$ は $|B| - |D|$ を割り切る。)

また、 W が T -periodic、 $|W| \geq |T|$ ならば、 W は T^∞ における basic subword である。

Lemma 4.6. W が sufficient T -periodic ならば、 W は T^∞ における basic subword である。

Lemma 4.7. W を long k -periodic、 XW を W の left k -extension とする。このとき、rank l ($\leq k$) の period U に対して、 XW が long l -periodic U' を含むならば、 W も long U -periodic を含む。

Lemma 4.8. T を rank k の period、 W を sufficient T -periodic とする。このとき、 T^∞ が long U -periodic subword を含み、 $|U| < k$ ならば、 W は U -periodic でない。

Lemma 4.9. T を rank k の period、 W を T -periodic かつ long l -periodic ($l \leq k$) とする。このとき、 XW が W の left l -extension であり、sufficient T -periodic subword V を含むならば $l = k$ であり、subword V, W は k -agreed である。

Lemma 4.10. W を long k -periodic、 $XW(WY)$ を W の left(right) k -extension とする。このとき、 XWY は simple word S の 2 乗にならない ($|S| > k$)。

これらの Lemma を用いることで、Theorem 1.1 は示される。

References

- [1] J. McCammond, The solution to the word problem for the relatively free semigroups satisfying $T^a = T^{a+b}$ with $a \geq 6$, *Internat. J. Algebra and Comput.*(1),1(1991),1-32.
- [2] A. de Luca and S. Varricchio, One non counting regular classes, *Proc. of the 17 ICALP Int. Symp.,ed. M. S. Paterson,Lecture Notes in Comp. Sci.*, **443**,Springer Verlag,(1990),74-87.
- [3] V.S.Guba, The word problem for the relatively free Burnside semigroup satisfying $T^m = T^{m+n}$ with $m \geq 4$ or $m = 3, n = 1$, *Internat. J. Algebra and Comput*,**2**(1993),125-140.
- [4] V.S.Guba, The word problem for the relatively free Burnside semigroup satisfying $T^m = T^{m+n}$ with $m \geq 3$, *Intarnat. J. Algebra and Comput*,**3**(1993),335-347.
- [5] V.S.Guba, Some properties of periodic words, *Mathematical Notes*,**3**(2002),301-307.