

位相空間上の測度について

東京女子大 雨宮一郎

一般の位相空間上の Radon 測度については、[1], [2] 等で論ぜられている。ここでは、少し条件を弱くした pre-Radon 測度を定義し、基本的な性質をしらべ、局所 compact 空間上の測度の概念の拡張として、ある意味で Radon 測度より自然であることを示す。

§ 1. 一般の測度についての諸定義

集合 X 上の 測度 μ とは、 X の部分集合の環 $\mathcal{A}$ 上で定義された非負実数値をとる加法的函数で、条件

$$(1) \quad \mathcal{A} \ni B_n \uparrow B, \quad \sup_n \mu(B_n) = \lambda < +\infty \Rightarrow B \in \mathcal{A}, \quad \mu(B) = \lambda.$$

$$(2) \quad \mathcal{A} \ni B, \quad B \supset C, \quad \mu(B) = 0 \Rightarrow C \in \mathcal{A}$$

を満足するものとする。

集合族 $\mathcal{C}$ で定義された函数 ρ に対し、 $\mathcal{A} \supset \mathcal{C}$ で $\mathcal{C}$ 上で μ が ρ と一致するとき、 μ は ρ の 拡大 であるといふ。

μ が、 μ の $\mathcal{C}$ への制限の 最小拡大 になっているとき、 μ は $\mathcal{C}$ で定義される といふことにする。

X の部分集合 A が、任意の $B \in \mathcal{C}$ に対して、 $A \cap B \in \mathcal{C}$ となるとき、 μ で可測 といふ。

X が互いに共通点のない $B_\lambda \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \Lambda$ に分割され、任意の $B \in \mathcal{C}$ に対して、 $\mu(B) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu(B_\lambda \cap B)$ となっている時 μ は 分割可能 であるといふ。

$\mathcal{C}$ から $\mathcal{C}$ の中への写像 φ で、(i) $\varphi(B) \subset B$, (ii) $B \supset C \Rightarrow \varphi(C) \sim \varphi(B) \cap C$ ($\sim$ は零集合をのぞいて一致すること) を満足するものに対して、常に、 μ で可測な A が存在して、すべての $B \in \mathcal{C}$ に対して、 $\varphi(B) \sim B \cap A$ となっているとき、 μ は 局所化可能 であるといふ。

μ の局所化可能性は、 μ に対して Radon-Nykodim の定理が成立することと同等であり、 $L^1(\mu)$ の dual が $L^\infty(\mu)$ になることとも同等である。

X の部分集合 A に対して、 μ で可測な C で、 $C \supset A$, $C - A \supset B$, $B \in \mathcal{C} \Rightarrow \mu(B) = 0$ となるものを、 A の 極小可測被覆 といふ。

μ が分割可能ならば、局所化可能であり、局所化可能ならば、すべての部分集合に、極小可測被覆が存在する。

§2 pre-Radon 測度.

X が位相空間であるとき、次の条件 (1) - (3) を満足する X

この測度 μ を、Pre-Radon 測度 といい、

- (1) μ は X の開集合の基によって定義されている。
- (2) 開集合 U が有限可測な開集合の和集合になっているとき、その中の有限個の和集合の測度の上限が有限のときは、 U も有限可測で、 $\mu(U)$ はその上限に等しい。
- (3) 有限可測な開集合の測度 ^は ~~が有限のと~~ その中に小さくまれる開集合の測度の上限に等しい。

条件 (3) は X が正則のときは、(1), (2) からの帰結である。
Pre-Radon 測度は常に分割可能である。

X 上の Pre-Radon 測度が次の条件 (R) を満たすとき、

Radon 測度 といふ。

- (R) 有限可測の集合の測度はその中に小さくまれる compact 集合の測度の上限である。

X 上の pre-Radon 測度の間に、順序と線形結合が自然に定義され、その全体は、条件付完備な線形束の正部分となり、Radon 測度の全体はその直和因子である。故に任意の pre-Radon 測度は、Radon 測度と、Radon 測度に対して特異な測度との和であらわされる。後者はすべての compact 集合で 0 となる測度である。

X 上の開集合の基で定義される測度が、すべて pre-Radon (Radon) 測度に拡大出来るとき、 X を pre-Radon space (Radon space) といふ。(Radon space は [2] で定義されているが、それは

また、Lindölef の性質を持つ Radon space のことを "fortement radonien" と呼んでいる。

Pre-Radon でない Hausdorff space があるかどうか分らない。discrete の場合は ulam の問題である。paracompact の場合も discrete の場合に帰着される。

Radon space であるかどうかは、ulam の問題に関係する。ここで位相空間 X の class で条件

(*) X 上のすべての pre-Radon 測度を Radon 測度である。

を満足するものを考へる方が意味があるであろう。局所 compact な空間、完備な距離空間はこの class に属する。

§3. 測度の制限と拡大

X 上の pre-Radon 測度 μ の X の部分集合 A への制限 μ_A を次のように定義することが出来る。

(1) A が μ で可測のとき、

通常の意味での μ の A への制限は一意的に A 上の pre-Radon 測度に拡大出来る。

(2) X が A の極小可測被覆であるとき、

X の有限可測な集合 B と A の共通部分に対して、

$$\mu_A(B \cap A) = \mu(B)$$

と定義すれば、 μ_A は A 上の pre-Radon 測度である。

(3) 一般の場合。

A の極小可測被覆 C を考へ、(1)により μ_C を、(2)により、 μ_C の A への制限を考へればよい。結果は C のとり方に依存しない。

X から位相空間 Y への連続写像 f が与るとき、 Y 上の pre-Radon 測度 ν で、 ν で有限可測な開集合 V に対して常に、

$$\nu(V) = \mu(f^+(V))$$

が成立するものが存在すれば、それは唯一つである。これを μ の f による像といふ。即ち、 $\nu = f(\mu)$ 。

$f(\mu)$ が存在するための必要充分条件は、 Y の任意の点 y には近傍 V があって、 $f^+(V)$ が μ で有限可測となることである。

特に $X \subset Y$ のとき、including map を f とするとき、上のような近傍 V が存在するような点 y の全体を Y_0 とすれば、 Y_0 は Y の開集合で、 X 上の測度 μ は Y_0 上の測度に拡大することになる。 μ が有界のときは、常に $Y_0 = Y$ である。

Y_0 上に拡大された測度について、 Y_0 は X の極小可測被覆である X への制限が、 μ になっている。

Radon 測度の像は常に Radon 測度であり、 X 上の Radon

測度 μ の部分集合 A への制限 μ_A が Radon 測度になるための必要充分条件は A が μ で可測となることである。

X が完全正則であるとき、 X を compact な空間 Y の部分集合と考へれば、 X 上の pre-Radon 測度 μ は Y の開集合 Y_0 まで拡大されるが、 Y_0 は局所 compact であるから、その拡大は Radon 測度で、 μ が Radon 測度であるための必要充分条件は、 X が Y_0 の中で、 μ の拡大によって可測となることである。

このことによつて、 X が完全正則の場合、pre-Radon 及び Radon 測度の定義とすることが出来る。

§4. 直積

二つの位相空間 X, Y 上にそれぞれ pre-Radon 測度、 μ, ν がある時、 $X \times Y$ 上の μ と ν の直積測度は pre-Radon 測度に一意的に拡大することが出来る。 μ, ν とともに Radon 測度である時に限つて、その直積も Radon 測度である。

$X_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 上に全測度 1 の pre-Radon 測度 μ_λ が与へられたとき、 μ_λ の直積測度は、 $\prod X_\lambda$ 上の pre-Radon 測度に一意的に拡大することが出来る。これが Radon 測度になるための必要充分条件は、 μ_λ がすべて Radon 測度で、可算個との直積、すべての λ について、 μ_λ の台が compact になるこ

とである。

X_λ が皆完全正則であるときは、各 X_λ と compact 空間 Y_λ に埋込み、各 μ_λ を Y_λ 上の測度 $\bar{\mu}_\lambda$ に拡大したとき、 $\prod_\lambda Y_\lambda$ 上の $\bar{\mu}_\lambda$ の直積を $\prod_\lambda X_\lambda$ に制限したものが μ_λ の直積である。この場合、 $\prod_\lambda Y_\lambda$ は $\prod_\lambda X_\lambda$ の極小可測被覆になっている。

一例として、 Λ が非可算で各 $X_\lambda = (0, 1)$, μ_λ は $(0, 1)$ 上の Lebesgue 測度としたとき、 μ_λ の直積は、すべての compact 集合に対して、測度が 0 となり、Radon 測度に対して特異な pre-Radon 測度の例を与えている。

§5. 連続函数上の線形汎函数としての特徴付け

X が完全正則であるとき、 X 上の連続函数全体 $C(X)$ の線形束としての ideal で、任意の X の点で 0 でない函数を含むものを、order-dense な ideal と呼ぶことにする。

X 上の pre-Radon 測度 μ で、積分可能な連続函数全体 J_μ は、 $C(X)$ の order-dense な ideal であり、対応。

$$J_\mu \ni f \longrightarrow \int f d\mu$$

は順序で連続、即ち、 $0 \leq f_\lambda, \lambda \in \Lambda, f_\lambda \downarrow \lambda \in \Lambda, 0$ ならば $\mu(f_\lambda) \downarrow 0$ が成立する。

逆に $C(X)$ の order-dense な ideal J 上で順序連続な正の線形汎函数 φ に対し、 $J_\mu \supset J$ とする pre-Radon 測度 μ で

$J \ni f$ に対し,

$$\int f d\mu = \varphi(f)$$

とするものが一意的に定まる。

J 上の順序連続な正線形汎関数の全体を $\mathcal{M}_J$ とすれば、 $\mathcal{M}_J$ には、線形汎関数としての、条件付完備な線形束の正部分としての構造が入る。 $J_1 \supset J_2$ のとき、 $\mathcal{M}_{J_1}$ から $\mathcal{M}_{J_2}$ への制限による写像は一対一であるから、

$$\mathcal{M}_{J_1} \subset \mathcal{M}_{J_2}$$

と考へることが出来る。 X 上の pre-Radon 測度の全体は、

$$\mathcal{M} = \bigcup_J \mathcal{M}_J$$

と考へることが出来る。

$\mathcal{M}$ も、 $\mathcal{M}_J$ の inductive limit として条件付完備な線形束の正部分と考へられ、この構造は §2 で述べたものと一致している。

X が局所 compact のときは、台が compact な連続関数の全体 J_0 は、 $C(X)$ の最小な order-dense ideal であるから、

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{J_0}$$

となり、しかも Dini の定理によって、 J_0 上のすべての正の線形汎関数は順序連続になっている。

[1] L. Schwartz ; Les Mesures de Radon dans les espaces topologiques arbitraires. Paris 1964~65.

[2] N. Bourbaki ; Intégration, Chap. IX. 1969.