

Vector valued Siegel modular form に附随した standard L 函数の特殊値について

東工大・理 小島 教知 (Noritomo Kozima)

1. 記号の提示

n 次 Siegel 上半空間を $\mathfrak{H}_n$ で表し, n 次 Siegel modular 群を $\Gamma^n := Sp(n, \mathbb{Z})$ で表す. 次に, $V := \mathbb{C}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}x_n$ (x_j : 不定元) とし, $\text{sym}^l(V)$ を V の l 次対称 tensor とする. ここで, $\text{sym}^l(V)$ は n 変数の l 次斉次多項式全体と同一視される. このとき $\rho := \det^k \otimes \text{sym}^l$ を $\text{sym}^l(V)$ 上の $GL(n, \mathbb{C})$ の既約表現とし, $\text{sym}^l(V)$ を値にもつ type ρ の Siegel modular form の空間を $M_{k,l}^n$, cuspform のなす部分空間を $S_{k,l}^n$ で表す. また $f, g \in M_{k,l}^n$ (f, g のどちらかは $S_{k,l}^n$ に属す) に対して, Petersson 内積を (f, g) で表す.

次に, n 次の $\mathbb{C}$ 上 (或は $\mathbb{Q}$ 上) の Hecke 環を $L_{\mathbb{C}}^{(n)}$ (或は $L_{\mathbb{Q}}^{(n)}$) で表す. このとき, $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(L_{\mathbb{C}}^{(n)}, \mathbb{C})$ に対して, $\mathbb{Q}$ の拡大体 $\mathbb{Q}(\lambda)$ を $\mathbb{Q}(\lambda) := \mathbb{Q}(\lambda(L_{\mathbb{Q}}^{(n)}))$ と定義する. また, 固有空間 $S_{k,l}^n(\lambda)$ は $S_{k,l}^n(\lambda) := \{f \in S_{k,l}^n \mid Tf = \lambda(T)f \ (\forall T \in L_{\mathbb{C}}^{(n)})\}$ で定義される.

$f \in S_{k,l}^n$: eigenform (Hecke 環の同時固有函数) に対して, $\mathbb{Q}$ の拡大体 $\mathbb{Q}(f)$ を次で定義する. すなはち f に対して $f \in S_{k,l}^n(\lambda)$ になるやうに $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg.}}(L_{\mathbb{C}}^{(n)}, \mathbb{C})$ をとり, $\mathbb{Q}(f) := \mathbb{Q}(\lambda)$ と定義する. この

とき, Takei[8] によつて, $\mathbb{Q}(f)$ は $\mathbb{Q}$ 上の総実な有限次代数拡大であり, $[\mathbb{Q}(f) : \mathbb{Q}] \leq \dim_{\mathbb{C}} S_{k,l}^n$ をみたすことがわかつてゐる.

次に, $f \in S_{k,l}^n$: eigenform に対して, f に附随する standard L 函数を

$$L(s, f, \underline{\text{St}}) := \prod_{p:\text{素数}} \left\{ (1 - p^{-s}) \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_j(p)p^{-s})(1 - \alpha_j(p)^{-1}p^{-s}) \right\}^{-1}$$

と定義する. ここで $\alpha_j(p)$ は f の Satake p -parameters である. さて,

$$\Lambda(s, f, \underline{\text{St}}) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s + \varepsilon) \Gamma_{\mathbb{C}}(s + k + l - 1) \prod_{j=2}^n \Gamma_{\mathbb{C}}(s + k - j) L(s, f, \underline{\text{St}})$$

とおく. ただし,

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s),$$

$$\varepsilon := \begin{cases} 0 & (n \text{ が偶数}) \\ 1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

とする. このとき, Takayanagi[7] により $k, l \in 2\mathbb{Z}$, $k > 0$, $l \geq 0$ のとき $\Lambda(s, f, \underline{\text{St}})$ は全 s 平面に有理型に解析接続され, 函数等式

$$\Lambda(s, f, \underline{\text{St}}) = \Lambda(1 - s, f, \underline{\text{St}})$$

をみたすことがわかつてゐる. この結果は scalar 値のときは Böcherer によつて示された. この結果により, $L(s, f, \underline{\text{St}})$ の (Deligne の意味での) critical points の右半分は

$$\{m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq m \leq k - n, \quad m \equiv n \pmod{2}\}$$

で与えられる.

2. 結果

$k, l \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \geq 2n+2$ とする. $f \in S_{k,l}^n$ を eigenform で, さらに f の Fourier 係数は $\mathbb{Q}(f)$ に属すとする.

今, $m \in \mathbb{Z}$ を $L(s, f, \text{St})$ の critical points の右半分の元とする. ただし, $m=1$ のときは $n \equiv 3 \pmod{4}$ を仮定する. このとき,

$$A(f) := \frac{L(m, f, \text{St})}{\pi^{nk+l+m(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}} (f, f)}$$

とおくと,

$$A(f)^\sigma = A(f^\sigma) \quad (\forall \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}))$$

が成り立つ. ここで f^σ は f の Fourier 係数に σ を作用させたものである. このことより, とくに $A(f) \in \mathbb{Q}(f)$ である.

注意

- i) この結果は, scalar 値の場合, Sturm[6], Harris[3], Böcherer[1], Mizumoto[5] によつて研究されてゐる.
- ii) Takei[8] によつて, $k, l \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k \geq 2n+2$ のとき, $S_{k,l}^n$ の直交基底 $\{f_j\}_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}} S_{k,l}^n}$ で, 各 f_j は eigenform かつ f_j の Fourier 係数は $\mathbb{Q}(f_j)$ に属すものが存在する.

3. 証明の概略

第 1 段

まづ,

$$\begin{aligned}
 (*) \\
 (f, F_{k,\nu,l}^{(n)}(-\bar{Z}, *, s)) &= (\Gamma \text{ 因子}) \zeta(2s + k - \nu)^{-1} \\
 &\times \prod_{j=1}^n \zeta(4s + 2k - 2\nu - 2j)^{-1} L(2s + k - \nu - n, f, \underline{\text{St}})(\iota^{-1}(f))(Z)
 \end{aligned}$$

の形の式を証明する必要がある.

$F_{k,\nu,l}^{(n)}$ の定義

$\nu \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k - \nu > 0$ に対して,

$$F_{k,\nu,l}^{(n)}(Z, W, s) := (\mathcal{D}_{k,\nu,l,s} G_{k-\nu}^{(2n)}) \left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, s \right)$$

と定義する. ここで, $G_k^{(n)}$ は Eisenstein 級数

$$G_k^{(n)}(Z, s) := \sum_{\{C, D\}} \det(CZ + D)^{-k} |\det(CZ + D)|^{-2s}$$

である. 和 $\begin{pmatrix} * & * \\ C & D \end{pmatrix}$ は $\left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \Gamma^n \right\} \setminus \Gamma^n$ の完全代表系を互るものとする. また, $\mathcal{D}_{k,\nu,l,s}$ は $C^\infty(\mathfrak{H}_{2n}, \mathbb{C})$ の元を $C^\infty(\mathfrak{H}_n \times \mathfrak{H}_n, \text{sym}^{2l}(V_1 \oplus V_2))$ に写す作用素で,

$$\mathcal{D}_{k,\nu,l,s} := L^{k,l} \det(\text{Im}(\mathfrak{Z}))^s \tilde{\mathcal{D}}_{k-\nu+s}^\nu$$

と定義される. ここで, $V_1 := \mathbb{C}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}x_n$, $V_2 := \mathbb{C}x_{n+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}x_{2n}$ である. また (*) 式の ι は V_1 から V_2 への同型写像で $\iota(x_j) := x_{n+j}$ を線型に拡張したものである.

$\mathcal{D}_{k,\nu,l,s}$ の定義における $L^{k,l}$ は Böcherer-Satoh-Yamazaki[2] で定義された微分作用素で, 次の形をもつ.

$$L^{k,l} := \frac{1}{(k)_l} d^* \sum_{0 \leq 2\mu \leq l} \frac{1}{\mu! (l-2\mu)! (2-k-l)_\mu} (D_\uparrow D_\downarrow)^\mu (D - D_\uparrow - D_\downarrow)^{l-2\mu}$$

$$: C^\infty(\mathfrak{H}_{2n}, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(\mathfrak{H}_n \times \mathfrak{H}_n, \text{sym}^{2l}(V_1 \oplus V_2)) .$$

ここで,

$$(d^* f) \begin{pmatrix} Z & U \\ {}_tU & W \end{pmatrix} := f \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \quad D := \frac{1}{2\pi i} \sum_{1 \leq \mu \leq \nu \leq 2n} \frac{\partial f}{\partial z_{\mu\nu}} x_\mu x_\nu,$$

$$D_\uparrow := \frac{1}{2\pi i} \sum_{1 \leq \mu \leq \nu \leq n} \frac{\partial f}{\partial z_{\mu\nu}} x_\mu x_\nu, \quad D_\downarrow := \frac{1}{2\pi i} \sum_{n+1 \leq \mu \leq \nu \leq 2n} \frac{\partial f}{\partial z_{\mu\nu}} x_\mu x_\nu.$$

次に, $\tilde{D}_{k-\nu+s}^\nu$ は Böcherer[1] で定義された微分作用素で, $f \begin{pmatrix} Z & U \\ {}_tU & W \end{pmatrix} \in M_{k,0}^{2n}$ に対して $(\tilde{D}_k^\nu f) \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \in M_{k+\nu,0}^n \otimes M_{k+\nu,0}^n$ となるものである. これは, $\nu = 1$ のとき次の形になる.

$$(\tilde{D}_k^1 f) \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} = \left\{ \det \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} f \begin{pmatrix} Z & U \\ {}_tU & W \end{pmatrix} \right\} \Big|_{U=0}.$$

さて, (*) の式の証明であるが, $\nu = 0$ の場合, (*) は Takayanagi[7] で示されてゐる. ゆゑに $\nu \neq 0$ を仮定する. このとき, $F_{k,\nu,l}^{(n)}$ は

$$\begin{aligned} & F_{k,\nu,l}^{(n)}(Z, W, s) \\ &= \frac{\varrho_{k,\nu}^{(n)}(s)}{(2\pi i)^l} \sum_{\mu=0}^{\frac{l}{2}} \left(-\frac{1}{4} \right)^\mu a(l, \mu, k, s) \sum_{\substack{T=\text{diag}\{t_1, \dots, t_n\} \\ t_j \in \mathbb{Z}_{>0}, t_1 | \dots | t_n}} \mathcal{P}_\mu(Z, W, T, s) \det(T)^\nu \end{aligned}$$

と表される. $\varrho_{k,\nu}^{(n)}(s)$ は k, ν, s の有理式, $a(l, \mu, k, s)$ は l, μ, k, s の有理式, $\mathcal{P}_\mu$ は Poincaré series である.

上の式で f との内積をとれば, (*) を得る.

第 2 段

m を critical point とする. 今, $s = 0, \nu = k - n - m$ とおくと (*) 式は

$$(f, g(-\overline{Z}, *)) = c(f)(\iota^{-1}(f))(Z)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} g(Z, W) &:= \pi^{-n(k-n-m)} F_{k, k-n-m, l}^{(n)}(Z, W, 0) \\ &= (\pi^{-n(k-n-m)} L^{k, l} \tilde{D}_{m+n}^{k-n-m} E_{m+n}^{(2n)}) \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$c(f) = \frac{L(m, f, \text{St})}{\pi^{nk+l+m(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}}} \times (\text{有理数}),$$

また Eisenstein 級数 $E_k^{(n)}$ は

$$E_k^{(n)}(Z, s) := \det(\text{Im}(Z))^s G_k^{(n)}(Z, s)$$

が全 s 平面に有理型に解析接続され, $s = 0$ で正則であることにより, $E_k^{(n)}(Z) := E_k^{(n)}(Z, 0)$ と定義される.

以上のことから, 次を示せば十分である.

$$(**) \quad \left(\frac{c(f)}{(f, f)} \right)^\sigma = \frac{c(f^\sigma)}{(f^\sigma, f^\sigma)} \quad (\forall \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})).$$

(**) の証明

Weissauer[9], Haruki[4] によつて次の結果が得られてゐる.

i) $E_k^{(n)}(Z)$ は次の 2 つの場合, すなはち $k = \frac{n+2}{2}, \frac{n+3}{2} \equiv 2 \pmod{4}$ の場合を除いて正則.

ii) 正則な場合, $E_k^{(n)}(Z)$ の Fourier 係数は有理数.

ゆゑに, m が $1 \leq m \leq k - n, m \equiv n \pmod{2}$ であるとき, ただし $m = 1$ のときは $n \equiv 3 \pmod{4}$ を仮定すると, $E_{m+n}^{(2n)}$ の Fourier 係数は

有理数であることがわかる. よつて $g(Z, W)$ の Fourier 係数も有理数になる.

今, $g(Z, W)$ の Fourier 展開を

$$g(Z, W) = \sum_{R \geq 0} \sum_{\xi \in X_n} g_{R, \xi}(W) \xi e^{2\pi i \text{trace}(RZ)}$$

と表す. ここで “ $R \geq 0$ ” は semi-integral, semi-positive な行列を意味し, また, $X_n := \{ \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} \mid \alpha_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{j=1}^n \alpha_j = l \}$ である. しかれば

$$(f, g_{R, \xi}) = c(f) a_{R, \xi}(\iota^{-1}(f)) \quad (\forall \xi \in X_n),$$

となる. ただし, $a_{R, \xi}(\iota^{-1}(f))$ は $\iota^{-1}(f)$ の Fourier 係数 $a_R(\iota^{-1}(f))$ の ξ 成分を表す. 今, $a_{R, \xi}(\iota^{-1}(f)) \neq 0$ となるやうな R と ξ を 1 つ固定する.

次に, $h(\lambda)$ を $g_{R, \xi}$ の $S_{k, l}^n(\lambda)$ への射影とする. 一方, Takei [8] によつて, $k \geq 2n+2$ のとき, $S_{k, l}^n(\lambda)$ の直交基底 $\{f_j\}_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}} S_{k, l}^n(\lambda)}$ で, $f_1 = f$ かつ, 各 f_j の Fourier 係数は $\mathbb{Q}(\lambda)$ に属するものが存在する.

ここで, $h(\lambda) = \sum_{j=1}^{\dim_{\mathbb{C}} S_{k, l}^n(\lambda)} \beta_j f_j$ とおくと,

$$c(f) a_{R, \xi}(\iota^{-1}(f)) = \beta_1(f, f)$$

かつ

$$c(f^\sigma) a_{R, \xi}(\iota^{-1}(f^\sigma)) = \beta_1^\sigma(f^\sigma, f^\sigma)$$

である. ゆゑに,

$$\left(\frac{c(f)}{(f, f)} \right)^\sigma = \frac{\beta_1^\sigma}{a_{R, \xi}(\iota^{-1}(f^\sigma))} = \frac{c(f^\sigma)}{(f^\sigma, f^\sigma)}$$

が示された. (証明終)

参考文献

- [1] S. Böcherer, Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II, *Math. Z.*, **189** (1985), 81–110.
- [2] S. Böcherer, T. Satoh, and T. Yamazaki, On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series, *Comment. Math. Univ. St. Pauli*, **42** (1992), 1–22.
- [3] M. Harris, Special values of zeta functions attached to Siegel modular forms, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **14** (1981), 77–120.
- [4] A. Haruki, Explicit formulae of Siegel Eisenstein series, *Manuscripta Math.*, **92** (1997), 107–134.
- [5] S. Mizumoto, Poles and residues of standard L -functions attached to Siegel modular forms, *Math. Ann.*, **289** (1991), 589–612.
- [6] J. Sturm, The critical values of zeta functions associated to the symplectic group, *Duke Math. J.*, **48** (1981), 327–350.
- [7] H. Takayanagi, Vector valued Siegel modular forms and their L -functions; Application of a differential operator, *Japan J. Math.*, **19** (1994), 251–297.
- [8] Y. Takei, On algebraicity of vector valued Siegel modular forms, *Kodai Math. J.*, **15** (1992), 445–457.
- [9] R. Weissauer, Stabile Modulformen und Eisensteinreihen, *Lecture Notes in Math.*, **1219**, Berlin Heidelberg New York, Springer, 1986.