

色付けられた圏に同伴するトポスについて — スキーモイドのコホモロジー —

信州大学・理学系 栗林 勝彦

Katsuhiko Kuribayashi
Department of Mathematics
Shinshu University

1. はじめに

代数的組合せ論をより圏論的な立場から考察する一つの枠組みとして、スキーモイドの概念が2015年 Kuribayashi-Matsuo [10] により導入された^{*1}。(代数的)組合せ論的手法により研究された個々の対象を未知の対象と比較すること、またはそれらを入力データとして構成される新しい対象を調べる手法の確立を、一連の研究では目指していると言って良い。ちょうど代数的トポロジーにおける Mayer-Vietoris 完全列、ファイブレーションがつくるホモトピー完全系列の比較さらにスペクトル系列の比較や、接着や引き戻し等による新しい位相空間の構成手法の類似を念頭に置いている。小圏の強ホモトピー論をスキーモイドの圏で展開して、ホモトピー同値の不変量である自己ホモトピー同値写像の作る群の研究 [9] もここで掲げるテーマの一つと言える。研究のスローガンとしては『圏論の積極的利用』であるが、スキーモイドのコホモロジーの概念も幾つか候補が挙げられており^{*2}、こうした研究はまだ模索の段階であることを始めに断っておきたい。

本稿ではスキーモイドの導入から始め、Kuribayashi-Momose [11] で導入されたスキーモイドの森田同値の概念と、Kuribayashi-Numata [12] の結果をいくつか概説する。特にスキーモイド (より一般に色付けられた小圏) に付随して現れる関手圏、すなわち前層をトポスと考えることにより (定理 3.3), そのアーベル対象が作るアーベル圏上でコホモロジーを定義する (定義 3.4)。またその基本性質や計算のための Leray 型スペクトル系列 (定理 4.7) について概説する。

スキーモイドの森田同値の概念からすると、Hamming スキームに関しては、バイナリーなもの、それ以外に分かれてしまう ([12, Corollary 3.7] の証明参照)。より一般的には Hanaki [4] の意味の AS の圏に制限する場合、スキーモイドの森田同値の分類問題は AS の thin residue が作る商アソシエーション・スキームの群環の森田同値の分類に帰着されることがわかる (注意 4.6(i))。この分類を「粗すぎる」と思われるかもしれないが、単体複体、ポセット等の既知の概念からもスキーモイドが構成されることが知られており (例 2.2, 補題 2.5), 一般的なスキーモイドに関しては森田同値の組合せ論的特徴づけは何一つわかっていないのが現状である。

2. スキーモイド

スキーモイド (Schemoid) はその名が示すように、アソシエーション・スキーム (Association scheme 以下 AS と略記) の一般化である^{*3}。小圏の射に色づけを行ない、Bose-Mesner 代数を作るために AS の定義で要求される最小限のルールを圏の場合にも適用

^{*1}本稿以前の結果に関するスキーモイドの概説が [7, 8] にあります。

^{*2}この稿で紹介するコホモロジーは [11] で導入されたものとは異なるし, [16] で導入される, Bose-Mesner 代数を係数に用いるコホモロジーとも異なる。

^{*3}代数幾何学でいうスキームとは関係しないと幾つかの研究集会で言ってきましたが, 本稿で概説するトポス経由で同じ舞台に乗ってしまいます。ネーミングが良くなかったかもしれません。

して得られたものが擬スキーマイドである。後で見るように、全ての AS は擬スキーマイドと見なせる。

定義 2.1. $\mathcal{C}$ を小圏、すなわち $\mathcal{C}$ の対象全体がつくる類が集合であるとする。射全体がつくる集合 $\text{mor}(\mathcal{C})$ の分割 $S := \{\sigma_i\}_{i \in I}$ が与えられた時、組 $(\mathcal{C}, S)$ を **色付けられた圏** (colored category) という。さらに次の条件をみたすとき、 $(\mathcal{C}, S)$ を **擬スキーマイド** (quasi-schemoid) と呼ぶ。 $(S$ の元は彩色、 $\mathcal{C}$ はこの擬スキーマイドの基礎圏とよばれる。)

任意の $\sigma, \tau, \mu \in S$ と μ の任意の射 f, g に対して、集合としての同型

$$(\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(f) \cong (\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(g),$$

が成り立つ。ただし、 $\pi_{\sigma\tau}^\mu: \pi_{\sigma\tau}^{-1}(\mu) \rightarrow \mu$ は結合写像

$$\pi_{\sigma\tau}: \sigma \times_{\text{ob}(\mathcal{C})} \tau := \{(u, v) \in \sigma \times \tau \mid s(u) = t(v)\} \rightarrow \text{mor}(\mathcal{C})$$

を制限して定義される写像を表している。以下 $(\pi_{\sigma\tau}^\mu)^{-1}(f)$ の濃度を $p_{\sigma\tau}^\mu$ と表す。

擬スキーマイドがさらに、AS の定義におけるような“単位性”、“対称性”を持つ場合に **アソシエーション・スキーマイド** ([10, Definition 2.2]) と呼ぶが、本稿では擬スキーマイドのみを扱う。そこで以下、擬スキーマイドを単にスキーマイドと呼ぶ。

例 2.2. (i) (AS からの構成) アソシエーションスキーム (X, S) を考える。このとき小圏 $\mathcal{C}$ を $\text{ob}(\mathcal{C}) = X$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x) = \{(x, y)\} \subset X \times X$, 合成を $(z, x) \circ (x, y) = (z, y)$ と定義する。このとき $U = S$ で定義すると、 $j(X, S) := (\mathcal{C}, U)$ はスキーマイドとなる。

(ii) (亜群からの構成) $\mathcal{H}$ を亜群とする。小圏 $\tilde{\mathcal{H}}$ を $\text{ob}(\tilde{\mathcal{H}}) := \text{mor}(\mathcal{H})$, そして射に関しては

$$\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{H}}}(g, h) = \begin{cases} \{(h, g)\} & \text{if } t(h) = t(g) \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定義する。さらに $\text{mor}(\tilde{\mathcal{H}})$ の分割 $S = \{G_f\}_{f \in \text{mor}(\mathcal{H})}$ を $G_f = \{(k, l) \mid k^{-1}l = f\}$, と定義する。このとき $\tilde{S}(\mathcal{H}) := (\tilde{\mathcal{H}}, S)$ はスキーマイドとなる。この事実は、群 G から得られるアソシエーション・スキーム $S(G)$ の場合と同様に確かめられる。

例 2.3. G を群とし、 $\mathcal{C}$ を次の図式で与えられる小圏とする。

$$G \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \hookrightarrow \end{array} x \xrightarrow{f} y \begin{array}{c} \hookrightarrow \\ \curvearrowright \end{array} G^{\text{op}}$$

すなわち、 $\text{ob}(\mathcal{C}) = \{x, y\}$ であり、 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x) = G$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, y) = G^{\text{op}}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \{f\}$ になる。このとき $(\mathcal{C}, S)$ はスキーマイドである。ただし、 $\text{mor}(\mathcal{C})$ の分割は $S = \{S_g\}_{g \in G} \cup \{S_f\}$, $S_g := \{g, g^{\text{op}}\}$, $S_f := \{f\}$ である。

例 2.4. 次で定義される $(\mathcal{D}, \{S^i\}_{0 \leq i \leq 3})$ はスキーマイドとなる。ここで基礎圏 $\mathcal{D}$ は図式

$$\begin{array}{ccc} & a & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\ x & \xrightarrow{\varepsilon} & y \\ \gamma \searrow & & \nearrow \delta \\ & b & \end{array} \quad ; \quad \beta\alpha = \varepsilon = \delta\gamma;$$

で定義される。 $\text{mor}(\mathcal{D})$ の分割は $S = \{S^i\}_{i=0,1,2,3}$, $S^1 = \{\alpha, \gamma\}$, $S^2 = \{\beta, \delta\}$, $S^3 = \{\varepsilon\}$, $S^0 = \{1_x, 1_y, 1_a, 1_b\}$ で定義されている。

先の例 2.3 と 2.4 が示すように、アドホックな方法でもスキーマイドが得られる^{*4}。

単体複体は面の数え上げや Stanley-Reisner 環の考察等、(代数的) 組合せ論の重要な研究対象である。この単体複体からスキーマイドを構成することもできる。若干一般的な構成法を紹介する。集合 X とその冪集合の部分集合 Θ を考える。 Θ は包含写像を射として小圏になる。 Θ における射 $U \subset V$ の差 $V \setminus U$ からなる集合を D とする。 Θ の射全体の作る集合の分割 S を $S = \{\tilde{\sigma}\}_{\sigma \in D}$ と定義する。ここで、 $\tilde{\sigma} = \{i: U \rightarrow V \mid V \setminus U = \sigma\}$ である。この時、

$$p_{\tilde{\mu}\tilde{\tau}}^{\tilde{\sigma}} = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma = \tau \sqcup \mu \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

であることが確かめられ、次を得る。

補題 2.5. ([11, Lemma 6.1]) (cf. [17, Theorem 3.2]) (Θ, S) はスキーマイドである。

K を抽象的単体複体、 $P(K)$ をその面半順序集合 (face poset) としよう。 $P(K)$ を始対象 $\emptyset$ を持った小圏とみなし、上記のように S_K を射全体が作る集合の分割として

$$S_K = \{\tilde{\sigma}\}_{\sigma \in K \cup \{\emptyset\}},$$

と定義する。ここで、 $\tilde{\sigma} = \{\alpha: \mu \rightarrow \tau \mid \tau \setminus \mu = \sigma\}$ である。補題 2.5 から $(P(K), S_K)$ はスキーマイドになる。

アソシエーション・スキーム (X, S) に Bose-Mesner 代数 $\mathcal{A}(X, S)$ が付随して現れた様に、スキーマイドからも自然に代数が定義できる。まず圏代数を思い出そう。 C を小圏とし、 $\mathbb{K}$ を単位元を持つ可換環とする。このとき **圏代数** (category algebra) とは自由 $\mathbb{K}$ -加群 $\mathbb{K}C := \mathbb{K}\langle f \mid f \in \text{mor}(C) \rangle$ であり

$$\alpha\beta = \begin{cases} \alpha \circ \beta & s(\alpha) = t(\beta) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

により定義される積をもつ $\mathbb{K}$ -代数である。圏代数は一般的には非可換であり単位元を持たない。 C を基礎圏として持つスキーマイド (C, S) が与えられたとする。分割 S の元はすべて 有限 集合であると仮定する。このとき任意の S の元 σ, τ に対して圏代数 $\mathbb{K}C$ 上で

$$\left(\sum_{s \in \sigma} s\right) \cdot \left(\sum_{t \in \tau} t\right) = \sum_{\mu \in S} p_{\sigma\tau}^{\mu} \left(\sum_{u \in \mu} u\right)$$

が成立する。すなわち自由 $\mathbb{K}$ -加群

$$\mathbb{K}(C, S) := \mathbb{K}\left\langle \sum_{s \in \sigma} s \mid \sigma \in S \right\rangle$$

は圏代数 $\mathbb{K}C$ の部分代数となる。そこで $\mathbb{K}(C, S)$ をスキーマイド (C, S) の **Bose-Mesner 代数** とよぶ。

単体複体 K に同伴する可換環 $\mathbb{K}$ 上の Stanley-Reisner 代数を $\mathbb{K}[S]$ と表す。次の結果は K から得られるスキーマイドの Bose-Mesner 代数との $\mathbb{K}[S]$ との関係性を明らかにしている。

命題 2.6. ([11, Proposition A.5]) 有限単体複体 K に対して、代数としての同型射 $\alpha_K: \mathbb{K}[K]/(x_i^2) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}(P(K), S_K)$ で $\alpha_K(x_i) = \{i\}$ をみたすものが存在する。

^{*4}例 2.3 においては $T(x) = y, T(y) = x$ で定義される反変関手により、例 2.4 では $T(a) = b, T(\varepsilon) = \varepsilon, T(\alpha) = \delta, T(\beta) = \gamma$ によりアソシエーション・スキーマイド (C, S, T) が得られる。

概念をスキーマの世界まで広げることで、代数的組合せ論の重要な研究対象 Stanley-Reisner 代数と Bose-Mesner 代数が繋がったことになる。

3. トポス – GIRAUD の公理から –

私たちが定義したい (スキーマのまたは色付けられた圏の) コホモロジーに要請する条件を述べるために、まず幾つか圏を定義する。

定義 3.1. (i) (C, S) , $(\mathcal{E}, S')$ を色付けられた圏とする。関手 $F: C \rightarrow \mathcal{E}$ が彩色を保つ、すなわち任意の $\sigma \in S$ に対して $\tau \in S'$ が存在して、 $F(\sigma) \subset \tau$ をみたすとき F を色付けられた圏の射といい $F: (C, S) \rightarrow (\mathcal{E}, S')$ と表す。

(ii) (C, S) を色付けられた圏とする。集合のなす圏 $\mathbf{Sets}$ に値をとる関手圏 $\mathbf{Sets}^C$ の部分圏で次をみたすものを $\mathbf{Sets}^{(C, S)}$ と表し、 (C, S) の関手圏と呼ぶ：

対象は関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Sets}$ であり、 $f \sim_S g$ ならば $F(f) = F(g)$ をみたす。さらに射 $\eta: F \rightarrow G$ は自然変換であり、 $id_x \sim_S id_y$ ならば $\eta(x) = \eta(y)$ をみたす。ここで、射 f, g に対して $\sigma \in S$ が存在して、 $f, g \in \sigma$ をみたすとき、 $f \sim_S g$ と表記している。

同様に加群のなす圏 $\mathbf{Mod}$ に値をとる関手圏 $\mathbf{Mod}^{(C, S)}$ も定義される。

色付けられた圏の作る圏の充満部分圏としてスキーマの圏 $qASmd$ を定義する。さらに $\mathbf{Gr}$, $\mathbf{Gpd}$, $\mathbf{AS}$, $\mathbf{Cat}$ をそれぞれ、群、亜群、 $\mathbf{AS}$ 、小圏の圏とすると、例 2.2 (i) さらに (ii) の構成法により得られる関手を用いて次の可換図式が得られる (関手の詳しい説明は [10, (6.1)] 参照)。

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{Gpd} & \xrightarrow{\tilde{S}(\cdot)} & qASmd & \xrightleftharpoons[\kappa]{U} & \mathbf{Cat}, \\ \uparrow i & & \uparrow j & & \\ \mathbf{Gr} & \xrightarrow{S(\cdot)} & \mathbf{AS} & & \end{array}$$

ただし、 U は忘却関手、 κ はすべての射に異なる彩色をして得られるスキーマを作る関手である。こうして、関手を経由して、小圏、群もスキーマと考えられる。そこで、小圏のコホモロジーや群のコホモロジーを拡張した概念として、スキーマのコホモロジーを定義したい。そのために、スキーマ上でホモロジー代数が展開できる枠組みを導入する。ここではトポスの概念を用いる^{*5*}。

まず、トポスの定義を思い出す。ここでは Giraud の公理に基づいて定義されたトポスを思い出そう ([15, §1], [6, 0.45 Theorem], [14, page 577] 参照)。

定義 3.2. 圏 $\mathcal{E}$ が次の Giraud 公理 (G1), (G2), (G3), (G4) をみたすとき (Grothendieck) トポスという。

^{*5}[11] では $\mathbf{Mod}^{(C, S)}$ とある加群圏の間に随伴関手を構成し ([11, Theorem 2.6]), これからスキーマの相対コホモロジーを定義している ([11, Definition 2.7])。さらに $\mathbf{Mod}^{(C, S)}$ 上のチェイン複体のなす圏に加群圏上のそれからモデル圏構造を入れることで、 $\mathbf{Mod}^{(C, S)}$ 上でホモトピー代数、ホモロジー代数を展開できる枠組みが得られる ([11, Theorem 2.8])。一般のスキーマに対して上述のような随伴関手を与える方法は現在得られていない。以下で述べる手法により全てのスキーマに対してコホモロジーが定義できることになる。

^{*6}(3.1) の関手により $\mathbf{Cat}$ は $qASmd$ に埋め込まれるから Thomason [20] 流の $\mathbf{Cat}$ 上のモデル圏構造を拡張して $qASmd$ そのものにモデル圏構造が定義できれば、その上で系統的にホモトピー代数が展開可能である。しかしまだその考察は全く進んでいない。

(G1) $\mathcal{E}$ は有限極限を持つ。

(G2) 集合により添字付けられた和が $\mathcal{E}$ 上に存在し、それらはプルバック構成と可換である。すなわち、 $\mathcal{E}$ の対象の任意の族 $\{E_i\}_{i \in I}$ と $E_i \rightarrow A$ および $B \rightarrow A$ に対して、誘導される射

$$\Sigma_{i \in I}(B \times_A E_i) \rightarrow B \times_A \Sigma_{i \in I} E_i$$

は同型である。さらに $\mathcal{E}$ の対象の任意の族 $\{E_i\}_{i \in I}$ および、任意の i と j に対して、図式

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & E_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_j & \longrightarrow & \Sigma_{i \in I} E_i \end{array}$$

はプルバックとなる。ただし、 0 は始対象を表す。

以下、 $\mathcal{E}$ 上の図式 $(*)$: $R \xrightarrow[r]{s} E \xrightarrow{f} F$ が r と s の coequalizer であり、

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{s} & E \\ r \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

がプルバックであるとき $(*)$ を**完全**という。さらにこの完全性が任意のプルバック構成のもとと保たれるならば、すなわち、図式 $F \rightarrow A \leftarrow B$ に対して得られる図式

$$B \times_A R \rightrightarrows B \times_A E \rightarrow B \times_A F$$

も完全であるとき、coequalizer $(*)$ は**安定的完全**であるという。単射 $u: R \rightarrow E \times E$ が任意の対象 T に対して誘導する包含 $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, R) \subset \text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, E \times E) \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, E) \times \text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, E)$ が集合 $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, E)$ 上の同値関係であるとき、射 u を**同値関係**と呼ぶ。

(G3) (i) $\mathcal{E}$ 上の任意の全射 $E \rightarrow F$ に対して、図式 $E \times_F E \rightrightarrows E \rightarrow F$ は安定的完全である。

(ii) 任意の同値関係 $R \rightarrow E \times E$ に対して、完全図式 $R \rightrightarrows E \rightarrow E/R$ が存在しする。

(G4) 圏 $\mathcal{E}$ は**生成元の集合** I を持つ。すなわち I は $\mathcal{E}$ の対象からなる集合であり次の条件 $(**)$ をみたす。 $(**)$: 任意の異なる射 $f, g: X \rightarrow Y$ に対して、 I に属する対象 A と射 $h: A \rightarrow X$ が $\mathcal{E}$ に存在して $f \circ h \neq g \circ h$ をみたす。

定理 3.3. ([12, Theorem 2.2]) $(\mathcal{C}, S)$ を色付けられた圏とする。このとき関手圏 $\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}$ はトポスである。したがって、 $\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}$ のアーベル対象のなす圏 $\text{Ab}(\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}) = \text{Mod}^{(\mathcal{C}, S)}$ は充分に入射的对象を持つ。

この定理により、スキーマイド、さらに一般に色付けられた圏のコホモロジーを定義できる。

定義 3.4. $(\mathcal{C}, S)$ を色付けられた圏とする。 N を $\text{Mod}^{(\mathcal{C}, S)}$ の対象とすると、 N を係数の持つ $(\mathcal{C}, S)$ のコホモロジーを $\text{Hom}_{\text{Mod}^{(\mathcal{C}, S)}}(\mathbb{Z}, _)$ の右導来関手、すなわち

$$H^*((\mathcal{C}, S), N) := \text{Ext}_{\text{Mod}^{(\mathcal{C}, S)}}^*(\mathbb{Z}, N)$$

で定義する。ここで、 $\underline{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ 上に値を持つ定数層を意味する。

圏 $\mathcal{C}$ から得られるスキーマイド $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ に対してその関手圏は元の圏の関手圏 $\text{Mod}^{\mathcal{C}}$ となるから、圏のコホモロジー (例えば [1, 21, 22]) と $H^*(\mathcal{K}(\mathcal{C}), N)$ は一致する。また、群からくるスキーマイドのコホモロジーは通常の群のコホモロジーと一致する ([12, Corollary 2.14])。こうして、要求に適うスキーマイドのコホモロジーを得たことになる。

4. 色付けられた圏に同伴するトポスとコホモロジー

定理 3.3 を示すために、 $\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}$ の (対象は変えず) 射を制限して得られるワイド部分圏を考える。

$(\mathcal{C}, S)$ を色付けられた圏とする。ob $\mathcal{C}$ 関係 $x \sim y$ を $id_x \sim_S id_y$ または彩色 σ とその元である射 f と g が存在して $(x, y) = (s(f), s(g))$ または $(x, y) = (t(f), t(g))$ をみたすとして定義する。この関係 $\sim$ で生成される同値関係を $\overset{0}{\sim}$ とし、 $I_0 := \text{ob } \mathcal{C} / \overset{0}{\sim}$ と定義する。さらに、彩色 $\sigma \in S$ に対して、 $f \in \sigma$ を選び、 $s(\sigma) = [s(f)]$ 、 $t(\sigma) = [t(f)]$ と定める。 $s(\sigma)$ と $t(\sigma)$ は I_0 の元であり、 $f \in \sigma$ の選び方にはよらない。

次に S の元からなる有限列 $\sigma_n \cdots \sigma_1$ で $t(\sigma_i) = s(\sigma_{i+1})$ ($1 \leq i \leq n-1$) をみたすものからなる集合として M を定義する。ob $\mathcal{C} / \overset{0}{\sim}$ の元 $[x]$ と $[y]$ に対して M の部分集合 $M_{[x][y]}$ を

$$M_{[x][y]} := \{\sigma_n \cdots \sigma_1 \in M \mid s(\sigma_1) = [x], t(\sigma_n) = [y]\}.$$

と定義する。

$M_{[x][y]}$ 上の関係 $u\sigma v \overset{ob}{\sim} u\mu v$ ($u, v \in M$, $\sigma, \mu \in S$) を $id_a \in \sigma$, $id_b \in \mu$ かつ $a \overset{0}{\sim} b$ をみたす対象 a と b が存在するときに定義する。さらに、 $u\mu\tau v \overset{c}{\sim} u\sigma v$ ($u, v \in M$, $\mu, \tau, \sigma \in S$) を $lk \in \sigma$ をみたす $l \in \mu$ と $k \in \tau$ が存在することとして定義する。関係 $\overset{ob}{\sim}$ と $\overset{c}{\sim}$ が生成する $M_{[x][y]}$ 上の同値関係を $\overset{1}{\sim}$ とする。このとき、結合

$$M_{[y][z]} / \overset{1}{\sim} \times M_{[x][y]} / \overset{1}{\sim} \longrightarrow M_{[x][z]} / \overset{1}{\sim}.$$

が自然に定義される。 I_0 を対象、homset を $\text{Hom}_{c[(\mathcal{C}, S)]}([x], [y]) := M_{[x][y]} / \overset{1}{\sim}$ として圏 $c[(\mathcal{C}, S)]$ が定義される。 $id_x \in \sigma$ であるとき、 $c[(\mathcal{C}, S)]$ 上で $\sigma = id_{[x]}$ が成り立つことに注意する。

$\mathfrak{h}\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}$ を $x \overset{0}{\sim} y$ ならば $\eta_x = \eta_y$ をみたす射からなる $\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}$ のワイド部分圏とする。定義により $\text{ob}(\mathfrak{h}\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}) = \text{ob}(\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)})$ である。

定理 4.1. ([12, Theorem 2.5]) 圏として関手的な同値 $\theta : \mathfrak{h}\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)} \simeq \text{Sets}^{c[(\mathcal{C}, S)]}$ が成り立つ。

定理 3.3 の証明の概略は次の通りである。(G1)–(G3) は Sets の持つ性質から容易に従う。(G4) に関して言えば、 $\text{Sets}^{c[(\mathcal{C}, S)]}$ は通常の関手圏であり、分類トポスとなる ([6])。したがって、定理 4.1 を用いて、 $\mathfrak{h}\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}$ もトポスとなり、その生成元の集合を用いて、 $\text{Sets}^{(\mathcal{C}, S)}$ の生成元の集合を構成して、トポスであることの証明が完成する。

Mitchell の埋め込み定理より、 $\mathcal{C}$ の対象が有限個である場合、関手圏 $\text{Mod}^{\mathcal{C}}$ は $\mathbb{Z}\mathcal{C}$ -加群が作る圏 $\mathbb{Z}\mathcal{C}\text{-Mod}$ とアーベル圏として同値となるしたがって、スキーマイドの森田同値を次のように定義することは自然であろう。

定義 4.2. ([11, Definition 2.5]) 2つのスキーマイド $(\mathcal{C}, S_{\mathcal{C}})$ と $(\mathcal{C}', S_{\mathcal{C}'})$ が森田同値であるとは関手圏 $\text{Mod}^{(\mathcal{C}, S_{\mathcal{C}})}$ と $\text{Mod}^{(\mathcal{C}', S_{\mathcal{C}'})}$ がアーベル圏として同値であることである。

先に述べたように [11] では, $\text{Mod}^{(C,S)}$ とある加群圏の間に随伴関手を構成することで, スキーモイドのコホモロジーを定義している。そのコホモロジーは後で見る, Leray スペクトル系列の E_2 -項となっている。森田同値の話題に戻ろう。

定義 4.3. (C, S) を色付けられた圏とする。もし f と g がある同じ彩色 σ に属すならば, $id_{t(f)} \sim_S id_{t(g)}$ かつ $id_{s(f)} \sim_S id_{s(g)}$ をみたすとき, (C, S) を **自然に色付けられた圏** という。

命題 4.4. (C, S) が自然に色付けられた圏である場合, $\text{Sets}^{(C,S)}$ とその部分圏 ${}_{\text{c}}\text{Sets}^{(C,S)}$ は一致する。

こうして (C, S) が自然に色付けられた圏である場合, さらに付随する圏 $c[(C, S)]$ の対象の集合が有限であるならば, 次の圏同値の列が得られる。

$$(4.1) \quad \text{Mod}^{(C,S)} = \text{Ab}(\text{Sets}^{(C,S)}) \simeq \text{Ab}(\text{Sets}^{c[(C,S)]}) = \text{Mod}^{c[(C,S)]} \simeq \mathbb{Z}[c[(C,S)]]\text{-Mod}$$

ここで 2 番目の同値は Mitchell 対応である。AS を (3.1) の関手 j を通してスキーモイドとしてみると, それは自然に色付けられた圏になり, さらに圏 $c[-]$ を構成することで群が現れる。より具体的には次の Hanaki の結果がある。

命題 4.5. ([5] [12, Proposition 2.10]) (X, S) を AS とし, $(X, S)^{\text{O}^\theta(S)}$ を *thin residue* $\text{O}^\theta(S)$ ([23, 2.3] 参照) による商 AS とする。このとき群の同型

$$c[j(X, S)] \cong (X, S)^{\text{O}^\theta(S)} =: \text{Quo}(S)$$

が成り立つ。

注意 4.6. (i) 命題 4.4 と命題 4.5 の結果として, 2 つのアソシエーション・スキーム (X, S_X) と (Y, S_Y) が森田同値であることと, それらの商 AS の群環 $\mathbb{Z}\text{Quo}(S_X)$ と $\mathbb{Z}\text{Quo}(S_Y)$ が森田同値であることは同値となる。

(ii) 任意の対象 x, y に対して, $id_x \sim_S id_y$ である場合は明らかに (C, S) は自然に色付けられた圏になり, さらに $c[(C, S)]$ はモノイドになる。したがってこの場合, (4.1) の圏の同値から (C, S) の表現論はモノイドの表現論と同値になる。

スキーモイドのコホモロジーを計算するスペクトル系列を導入する。 $u : (C, S) \rightarrow (D, S')$ を色付けられた圏の射とする。このとき u が誘導する射 $u^* : \text{Sets}^{(D,S')} \rightarrow \text{Sets}^{(C,S)}$ は有限極限と任意の余極限を保つ, Special Adjoint Functor Theorem ([13, page 129]) により, u^* の右随伴 u_* が得られる。こうしてトポス間の幾何的射 (geometric morphism) $(u^*, u_*) : \text{Sets}^{(C,S)} \rightarrow \text{Sets}^{(D,S')}$ を得る。結果として, $H^*((C, S), N)$ に収束する Leray スペクトル系列 $\{E_r^*, d_r\}$ で

$$E_2^{p,q} \cong H^p((D, S'), (R^q u_*)(N))$$

をみたすものが存在する (例えば, [6, 8.17 Proposition] 参照)。ただし, N は $\text{Mod}^{(C,S)}$ の対象である。

上で得た, Leray スペクトル系列が AS の表現論における道具になることを以下説明する。AS の表現論において重要な役割を果たすのが, その標準表現である。すなわち, アソシエーション・スキーム (X, S_X) の Bose-Mesner 代数 $\mathbb{Z}(X, S_X)$ の行列環 M_X への単射準同型写像である。実際, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}(X, S_X)}^*(\mathbb{Z}, M_X)$ は AS の同型に関する不変量となっている ([12, Proposition 4.1])。

(X, S_X) を AS とし, $u: j(X, S_X) \rightarrow (C, S)$ を色付けられた圏の射, $\pi: (X, S_X) \rightarrow Quo(S_X)$ を商写像とする。このとき, 随伴関手からなる図式

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Mod}^{(C, S)} & \xrightarrow{u^*} & \text{Mod}^{j(X, S_X)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Z} Quo(S_X)\text{-Mod} & \xrightleftharpoons[\pi_*]{\pi^*} & \mathbb{Z}(X, S_X)\text{-Mod}. \\ & \searrow \perp & & & & \swarrow \perp & \\ & & u_* & & & & \pi_* \end{array}$$

を得る。従って, Leray スペクトル系列は次の形に置き換わる。

定理 4.7. 左 $\mathbb{Z}(X, S_X)$ -加群 N を係数にもつコホモロジー $\text{Ext}_{\mathbb{Z}(X, S_X)}^*(\mathbb{Z}, N)$ に収束する第一象限型スペクトル系列で

$$E_2^{p,q} \cong H^p((C, S), (R^q u_* \pi_*)(N)),$$

をみたすものが存在する。

この章で与えられたスペクトル系列の応用^{*7}に期待したい。

5. 展望

[16] ではスキーモイドのプルバックに関する考察や, スキーモイドから対称性を備えたアソシエーション・スキーモイドの考察がすすんでいる。また Grothendieck 構成にスキーモイド構造を入れる試みもなされている。さらに Bose-Mesner 代数を係数に選ぶコホモロジーを定義し基礎圏が同じ場合でも, 彩色方法の異なるスキーモイドのコホモロジーがどのように異なるかの考察が始まっている。このタイプのコホモロジー計算に Mayer-Vietoris スペクトル系列や, Grothendieck 構成に関連するスペクトル系列が応用されていることは非常に興味深い。

注意 4.6(ii) で述べたように, あるスキーモイドの表現論は, ここで定義した関手圏を経由して完全にモノイドの表現論に帰着される。有限群研究の類似的考察やその表現論を用いて AS の理論が発展してきたように ([18, 23, 24]), モノイドの表現論 (例えば [19] 参照) をもとに, スキーモイドの表現論が展開できるに違いない。

第 1 章で述べたように森田同値の概念を AS の圏で考える場合は「粗すぎる」ようである (注意 4.6(i)). AS の組合せ論的性質を圏論的に捉えるためには, スキーモイドがつくる前層の変更が必要であろう。例えば, Sets の代わりに小圏の作る 2-圏 Cat を用いて同型 2-射を除いて色を保つ関手の概念を導入することで, 分類問題を再構築することになろう。また, Butz-Moerdijk [2, 3] に依るトポスの亜群上の層による表示を用いてより幾何学的にスキーモイドを考察する方法も検討できよう。スキーモイドから得られるこうした亜群の組合わせ論的特徴づけの考察も, 大いに興味ある問題としてここに書き留めておきたい。

スキーモイドの研究を通して応用圏論, (代数的) 組合せ論研究者の琴線に少しでも触れる仕事を進めたいと考えている。スキーモイドは 2015 年に導入されたまだまだ若い概念である。そこで応用圏論や (代数的) 組合せ論に興味を持つ若手研究者の方々のスキーモイド研究への参画を大いに期待したい。

謝辞 講演の機会を与えて頂きました世話人の山内 博氏そして講演者として推薦して頂いた花木 章秀氏に感謝いたします。また講演内容に関して質問して頂いた研究集会参

^{*7}[12] の 4 章の後半では Hamming スキーム $H(n, 2)$ のコホモロジー $\text{Ext}_{\mathbb{Z}H(n, 2)}^1(\mathbb{Z}, N)$ の部分群をスペクトル系列を用いて考察している。

加者の皆さんからは、本研究を進める上で貴重なご意見をいただきました。この場を借りて皆さんに感謝いたします。

REFERENCES

- [1] H. J. Baues and G. Wirsching, Cohomology of small categories, *J. Pure Appl. Algebra* **38** (1985), 187-211.
- [2] C. Butz and I. Moerdijk, Representing topoi by topological groupoids. *J. Pure Appl. Algebra* **130** (1998), 223-235.
- [3] C. Butz and I. Moerdijk, Topological representation of sheaf cohomology of sites. *Compositio Math.* **118** (1999), 217-233.
- [4] A. Hanaki, A category of association schemes, *J. Combin. Theory Ser. A* **117** (2010), 1207-1217.
- [5] A. Hanaki, A note on finite groups defined by an association scheme, private communications, 2016.
- [6] P.T. Johnstone, *Topos theory*, London Mathematical Society Monographs, Vol. 10. Academic Press, London-New York, 1977.
- [7] 栗林 勝彦, アソシエーションスキームの圏論的一般化について (2013) 第 30 回代数的組合せ論シンポジウム報告集より, <http://marine.shinshu-u.ac.jp/kuri/surveys.html>.
- [8] 栗林 勝彦, 擬スキームの Mitchell 埋め込み定理について (2016), 2016 年度 日本数学会年会 代数学分科会アブストラクトより, <http://marine.shinshu-u.ac.jp/kuri/surveys.html>.
- [9] K. Kuribayashi, On strong homotopy for quasi-schemoids, *Theory and Applications of Categories*, **30** (2015), 1-14.
- [10] K. Kuribayashi and K. Matsuo, Association schemoids and their categories, *Applied Categorical Structures* **23** (2015), 107-136.
- [11] K. Kuribayashi and Y. Momose, On Mitchell's embedding theorem for a quasi-schemoid, *Journal of Algebra* **458** (2016), 222-248.
- [12] K. Kuribayashi and Y. Numata, A topos associated with a colored category, preprint (2016).
- [13] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [14] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic. A first introduction to topos theory*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [15] I. Moerdijk, Classifying spaces and classifying topoi, *Lecture Notes in Mathematics*, 1616. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [16] Y. Momose, Association schemoids and their homological properties, in preparation.
- [17] Y. Numata, Construction of schemoids from posets, preprint 2106, [arXiv:1603.00601](https://arxiv.org/abs/1603.00601).
- [18] I. Ponomarenko and P.-H. Zieschang, Preface, *European Journal of Combinatorics*, **30** (2009), 1387-1391.
- [19] B. Steinberg, *Representation theory of finite monoids*, Universitext, Springer, 2016.
- [20] R.W. Thomason, Cat as a closed model category, *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, **21**(1980), 305-324.
- [21] P. Webb, An introduction to the representations and cohomology of categories. *Group representation theory*, 149-173, EPFL Press, Lausanne, 2007.
- [22] F. Xu, Representations of categories and their applications. *J. Algebra* **317** (2007), 153-183.
- [23] P.-H. Zieschang, *An algebraic approach to association schemes*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [24] P. -H. Zieschang, *Theory of association schemes*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag, Berlin, 2005.