

楕円型作用素の固有値分布 と頁の固有値について

東大 理 田 村 英 男

§1 序

次のような固有値問題の漸近分布を考察することが目的である。

$$(A + r)u = \lambda p(x)u \quad \text{on } R^n$$

ここで A は $L^2(R^n)$ の中に定義域をもつ正值自己共役作用素 (厳密な仮定は §2), $r > 0$, $p(x) \geq 0$ としておく。

$N_r(\lambda) = \sum_{\mu_i \leq \lambda} 1$ と定義する。 μ_i は上の方程式を満たす固有値。(但し $p(x)$ に対して固有値が可算個存在するための条件はつける。)

適当な条件のもとで次のような事実が知られている。

$$N_r(\lambda) = \left\{ (-\infty, -r) \text{ に存在する } A - \lambda p(x) \text{ の頁の固有値の個数} \right\}$$

この事実から $N_r(\lambda)$ は $A - p(x)$ の頁の固有値の状態 (可算無限個 (0 を集積点として), あるいは有限個)

に応じて異なることが予想される。即ち, $p(x)$ の無限遠点における減衰状態によることがわかる。

§2. 仮定, 記号 と 結果.

[仮定] $A(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ ($D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$).

$a_\alpha(x) \in B^\infty(\mathbb{R}^n)$: (無限回微分可能 すべて の 導出数は有界) であり 一様楕円型作用素であり, $\square$ 形式的自己共役とする. 更にある実数 a_α が存在して, 次のことが満足される. $a_\alpha(x) = a_\alpha + b_\alpha(x)$, 十分遠方におけると.

$$|D^j b_\alpha(x)| \leq C(j) |x|^{-\delta} \quad (\delta > 0) \text{ とする.}$$

$A(x, D)$ の 一意的 自己共役拡張を A とすれば,

定義域 $\mathcal{D}(A) = H^m(\mathbb{R}^n)$ であり $A \geq 0$ とする.

更に $A_0(D) = \sum a_\alpha D^\alpha$. $A_0(\xi) \geq 0$ と仮定する.

[記号] 1° $p(x) \in K_L$ と以下 次のように定義する. ($L > 0$)

(i) $p(x) > 0$, $p(x) \in B^\infty(\mathbb{R}^n)$

(ii) $\exists C_1, C_2 > 0$. が存在して

$$\frac{C_1}{1+|x|^L} \leq p(x) \leq \frac{C_2}{1+|x|^L} \text{ が成立する.}$$

(iii) $|D^j p(x)| \leq C(j) p(x)$.

2° $\{Q_k\}$. ε 単価 cube とし $\mathbb{R}^n \ni$

並べたものとする. $\sigma_{S,k} = \|p\|_{(S,k)}$. if $m > n$, $S=1$
if $m \leq n$, $S > \frac{n}{m}$ であり $\|\cdot\|_{(S,k)}$ は

$\mathbb{Q}_k$ における p の L^s -norm を表わす.

$$ds(p) = \sum_k \delta_{s,k} \gamma \quad \gamma = \frac{n}{m} \text{ と定義する.}$$

(3E). $ds(p) < +\infty$ のとき, $p(x) \in L^{\frac{n}{m}}(\mathbb{R}^n)$ じ,
 $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{-\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ への完全連続作用素.

(定理) $p(x) \geq 0$, $p(x): H^{m, \varepsilon}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ への
 有界作用素を仮定する.

(i) 十分小さい $\forall \varepsilon > 0$ に対して,

$$p(x) = p_\varepsilon^1(x) + p_\varepsilon^2(x) \text{ と分解される.}$$

$$p_\varepsilon^1(x) \in K_\ell \quad (\ell > m), \quad ds(p_\varepsilon^2) \leq \varepsilon \text{ のとき}$$

$$N_r(\lambda) = C \lambda^{\frac{n}{m}} + o(\lambda^{\frac{n}{m}}).$$

$$\left(C = (2\pi)^{-n} \int \omega(x) p(x)^{\frac{n}{m}} dx, \quad \omega(x) = \text{meas} \{ \xi: A'(x, \xi) \leq 1 \} \right.$$

$A'(x, \xi)$ は $A(x, D)$ の主要部

(ii) $p(x) \in K_m$ のとき

$$N_r(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int_{\lambda p(x) \geq 1} \omega(x) (\lambda p(x) - 1)^{\frac{n}{m}} dx + o(\lambda^{\frac{n}{m}} \log \lambda).$$

(十分大きい λ に対して)

(iii), $p(x) = p_1(x) + p_2(x) + p_3(x)$ と分解され

$$p_1(x) \in K_\ell \quad (0 < \ell < m), \quad p_2(x) \text{ 非負有界可測, 十分}$$

速く $O(|x|^{-(\ell+m)})$ ($\varepsilon > 0$), $ds(p_3) < +\infty$, 更に $p_1(x)$ は

十分速く $|x|^{-l}$ を満足するものとする. このとき

$$N_r(\lambda) = C_r \lambda^{\frac{n}{2}} + o(\lambda^{\frac{n}{2}}).$$

$$C_r = (2\pi)^n S \frac{1}{n} \int (A_0(z) + r)^{-\frac{n}{2}} dz,$$

(S は単位球の表面積. $n=1$ のとき $S=2$)

(注. 1). (ii) に於いて, $p(x) \equiv C|x|^l$ ($C>0$) とすれば

$$N_r(\lambda) = C^{\frac{n}{2}} C_r \lambda^{\frac{n}{2}} + o(\lambda^{\frac{n}{2}}) \text{ と } T \text{ する.}$$

(注. 2). もし $A_0(z)$ が $z=0$ のみで零点をもち

その位数が m_1 (偶数) とすれば, $m > l > m_1 (\neq m)$

のとき, $r \rightarrow 0$ とした場合, C_r はある有限な値

C_0 に収束する. このことは $A - \lambda p(x)$ の負の固

有値の有限性に対応することから予想される.

実際, もし $m_1 < n$ ($m_1 \neq m$) のとき, $p(x)$ が角界

可測. 非負として, 十分遠方で $O(|x|^{-(m_1+\varepsilon)})$ $\varepsilon > 0$ の

のとき $A - p(x)$ の負の固有値は有限個しか存在し

ない.

§ 3. 2つの補題.

[補題 3.1]. (Birman-Solomyak [3]).

$\mathcal{H}$: Hilbert 空間. T : 完全連続自己共役作用素.

十分小さい $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $T = T_\varepsilon^{(1)} + T_\varepsilon^{(2)}$ と分解され,

$T_\varepsilon^{(1)}, T_\varepsilon^{(2)}$ は共に自己共役完全連続作用素とする.

$$N_{1,\varepsilon}^+(\lambda) = \sum_{0 < \frac{1}{\mu_i} < \lambda} 1 \quad (\mu_i \text{ は } T_\varepsilon^{(1)} \text{ の正の固有値})$$

$$N_{1,\varepsilon}^-(\lambda) = \sum_{0 < \frac{1}{\mu_i} < \lambda} 1 \quad (\mu_i \text{ は } T_\varepsilon^{(1)} \text{ の負の固有値})$$

$N_{2,\varepsilon}^\pm(\lambda)$ に 2 も同様に定義する.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\alpha} N_{1,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) = C_{\pm}(T_{\varepsilon}^{(1)}),$$

$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\alpha} N_{2,\varepsilon}^{\pm}(\lambda) \leq \varepsilon$ が、ある $\varepsilon > 0$ が存在して
成立するとき、次のことが満足される。

$$C_{\pm}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_{\pm}(T_{\varepsilon}^{(1)}) \text{ が存在して}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\alpha} N^{\pm}(\lambda) = C_{\pm}(T), \quad (N^{\pm}(\lambda) \text{ は } T \text{ に対する}$$

漸近分布を表わす)。

[補題 3.2]. (Birman - Borgov [4])

$p(x)$ が $H^{n-\varepsilon} \rightarrow H^0 (= L^2(\mathbb{R}^n))$ への有界作用素
($\varepsilon > 0$)。更に $ds(p) < +\infty$ のとき、

$$\lambda^{-\sigma} N_r^{\pm}(\lambda) \leq C ds(p), \quad (\sigma = \frac{n}{m})$$

ここで C は $p(x)$ に対して独立な正数、

($N_r^{\pm}(\lambda)$ は $(A+r)u = \lambda p(x)u$ の漸近分布。

$p(x)$ の非負性を仮定していいので $N^-(\lambda)$ は意味をもち)

上の2つの補題から定理の証明には $p(x) \in K_{el}$ について
考察すれば十分である。

実際、 $(A+r)u = \lambda p(x)u$ の固有値問題は、

$$\frac{1}{\lambda} u = (A+r)^{-1} p(x) u \text{ として、 } H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \text{ の中で、}$$

内積を $((A+r)^{\frac{1}{2}} u, (A+r)^{\frac{1}{2}} v)$ で定義した空間を考
えることと同じ値である。この内積で、 $(A+r)^{-1} p$ は $H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$
で完全連続自己共役作用素となる。従って、補題が

適用される.

(注). 定理の(1)の部分は Birman - Borzov [4] の

$A = (-\Delta)^k$ の場合に上の補題を使, 2 結果を得ている.

特に $k=1$, $n \geq 3$ の場合 $\gamma=0$ までは含め, 証明されている. この結果は よく知られている $-\Delta - p(x)$ の負の固有値の有限性のための $p(x)$ の条件と対応する.

§ 4. 定理の証明の方針.

上のことから $p(x) \in K_2$ に証明すれば十分である.

$p(x) \in K_2$ とし, $(A+r)u = \lambda p(x)$ は

$p^{\frac{1}{2}}(A+r)p^{\frac{1}{2}}v = \lambda v$ と同値な 固有値問題で

ある. $\lambda > 0$ とし $(p^{\frac{1}{2}}(A+r)p^{\frac{1}{2}} + \lambda)^{-1} = p^{\frac{1}{2}}(A+r+\lambda p(x))^{-1}p^{\frac{1}{2}}$.

$m > n$, $l > n$ (即ち $p(x) \in L^1$) の場合.

$p^{\frac{1}{2}}(A+r)^{-1}p^{\frac{1}{2}}$ は trace class の作用素となり.

$$\text{tr}(p^{\frac{1}{2}}(A+r)^{-1}p^{\frac{1}{2}}) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x) A(x, x) dx$$

(ここで $A(x, y)$ は $(A+r)^{-1}$ の積分核) が従うことに注意して, $(A+r+\lambda p(x))^{-1}$ の積分核, $\lambda \rightarrow \infty$ の場合の漸近挙動を調べる. そのために次の補題を使う.

[補題 4.1] [Agmon [1]]

$T: L^2(\mathbb{R}^n)$ と定義域とする有界作用素で値域 $R(T)$ $R(T^*)$ が共に $H^m(\mathbb{R}^n)$ ($m > n$) に含まれるとき, T は $T(x, y)$ と核とする積分作用素で, $T(x, y)$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ で

連続かつ有界.

$$|T(x, y)| \leq \delta (\|T\|_m + \|T^*\|_m)^{\frac{1}{m}} \|T\|_0^{1-\frac{1}{m}}$$

(δ は T に独立で, $\|\cdot\|_m$ は $L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^m(\mathbb{R}^n)$ への
作用素 norm を表わす)

以下 簡単のため $A \in$ 定数係数の場合として行う.

更に $m > n$, $p(x) \in K_e$, $(l > n)$ としておく.

一般の場合はこのように帰着させる.

$\varphi(x)$ を 次のように定義する. $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\varphi(x) \equiv 1, \text{ if } |x| \leq \frac{1}{2}, \quad \varphi(x) \equiv 0, \text{ if } |x| \geq 1$$

$$\varphi(x_0, \delta) \equiv \varphi\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right) \text{ とおく.}$$

証明 は (ii) の場合について述べる.

従って $p(x) \in K_e$, 十分遠方で $p(x) \equiv |x|^{-l}$ ($n < l < m$)

任意に $x_0 \in \mathbb{R}^n$ を固定して考える.

$$\varphi_{(x_0, p(x_0)^{-\frac{1}{l}} \varepsilon)} = \varphi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon} \cdot p(x_0)^{\frac{1}{l}}\right) \equiv \varphi_\varepsilon(x) \text{ とすれば}$$

[補題 4.2]

$$(i) \quad \|\varphi_\pm (A + r + \lambda p)^{-1} \varphi_\pm\|_0 \leq C (1 + \lambda p(x_0))^{-1}$$

$$(ii) \quad \|\varphi_\pm (A + r + \lambda p)^{-1} \varphi_\pm\|_m \leq C$$

(C は λ, x_0 に対して独立である)

[補題 4.3]

$(A + r + \lambda p)^{-1}$ の積分核を $A_\lambda(x, y)$ とおく.

$\forall \varepsilon > 0$ (十分小さい) に対して $\exists C(\varepsilon)$ が存在して.

$$|A_\lambda(x, x) - F(x, \lambda)(0)| \leq \varepsilon \cdot C (1 + \lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} + C(\varepsilon) \cdot p(x)^{\frac{1}{2}} (1 + \lambda p(x))^{\frac{n}{m}-1} \text{ が成立する.}$$

ここで, $F(x, \lambda)(0) = (2\pi)^n \int \frac{d\beta}{A_0(\beta) + r + \lambda p(x)}$

上のことは (x, λ) に対して一様に成立する. //

〔補題 4.3〕は, [4.2, 4.1] を使, 導くが, 証明は省略する. 〔補題 4.3〕より, $\sum \frac{1}{\mu + \lambda} = \int p(x) A_\lambda(x, x) dx$

の漸近挙動が得られる. (適当な積分計算のもとに)

$$\text{即ち } \sum \frac{1}{\mu + \lambda} = O(\lambda^{\frac{n}{2}-1}) + o(\lambda^{\frac{n}{2}-1}).$$

これに Hardy-Littlewood の Tauber 型 定理を適用すれば, 証明は完了する.

一般の場合, $B_k = [p^k(A+r)p^{-k}]^a$ ($k \geq 0$) とおく

$p(x) \in K$ の仮定があるので, $\mathcal{D}(B_k) = H^m(\mathbb{R}^n)$ で, $B^0(\mathbb{R}^n)$ を係数にもつ微分作用素である.

〔補題 4.4〕

§2 の $A(x, D)$ に対する仮定のもとで, B_k^{-1} が存在して, $L^2(\mathbb{R}^n)$ の上で定義された有界作用素である. //

〔補題 4.4〕より $p^k(A+r)^{-1} = B_k^{-1} p^k$, $(A+r)^{-1} p^k = p^k B_k^{*-1}$ が従う. ここで k (integer, > 0) s.t. $(2k+1)m > n$,

かつ $(2k+1)l > n$ とする. 上の事実により

$$(p^{\frac{1}{2}}(A+r)^{-1}p^{\frac{1}{2}})^{2k+1} = p^{\frac{2k+1}{2}} \tilde{A}^{-1} p^{\frac{2k+1}{2}}.$$

$\tilde{A} = B_k B_{k-1} \dots B_1 (A+r) B_1^* \dots B_k^*$ の $(2k+1)m$ 階の.

$B^\infty(\mathbb{R}^n)$ を係数とする微分作用素

更に $\mathcal{O}(A) = H^{(2k+1)m}(\mathbb{R}^n)$ で、真に正値自己共役作用素.

即ち $\hat{A} \geq c_0 > 0$. 従って, $\hat{A}$, $p(x)^{2k+1}$ に対して,

$m > n$, $l > n$ の場合の結果を適用すれば, 一般の場合にも定理 iii) の主張が証明される.

参考文献

(1) S. Agmon

On kernels eigenvalues, and eigenfunctions
of operators related to elliptic problems (1965).
Comm. Pure. Appl. Math vol XVIII (627-663)

(2) M. Š. Birman

On the spectrum of singular boundary value problems
Math. Sb. 55 (97) (1961), 125-174.

(3) M. Š. Birman - M. Z. Solomyak.

Leading term in the asymptotic spectral formula
for "nonsmooth" elliptic problems

Func. Analysis and its appl. Vol 4, no. 4, 1-13 (1970)

(4) M. Š. Birman - V. V. Borzov

On the asymptotic spectral formula for singular operators
Problem in Math. Phys. vol 5, (24-38) (1971) Edited by Birman.