

S^1 -作用のコボルディズム

東大 理 服部 晶夫
上智大 理工 谷口 肇

§ 1 序

この小論に於ては、群 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の可微分多様体への作用につき、その固定点の集合の近傍の幾何学的な考察により、各点の固定化群 (isotropy subgroup) の集合がなるべく簡単なものを、コボルディズムの範囲で求める事を示える。最も簡単な場合、即ち固定化群として $\{1\}$ (自明な群) のみが見られる場合は、問題、多様体はその軌道空間上の主 S^1 -バンドンであり、又 $\{1\}$ と S^1 のみが見られる場合は作用は semi-free であることがわかれ、これについて例えの例題 [7] がある。一般に G を S^1 の部分群の族とするとき次のように定義する。

定義 1 S^1 の作用する開いた、向き付けられた可微分多様体で、固定化群として G の要素のみが見られるものの作るコボルディズム群を $\Omega_*(G)$ とする。(但し n 個の多様体、

ゴボルディ、 Σ_n を与える一次元高... 多様体について同定化群の予、要素であるとする。))

∴ 以下予として次のようなものを考える。 $\mathbb{Z}_k \subset S^1$ を位数 k の巡回群として

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{F}_k = \{ \mathbb{Z}_k \mid k \leq \ell \}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{F}_\ell^+ = \mathcal{F}_\ell \cup \{S^1\}$$

$$\textcircled{1}' \quad \mathcal{F}_\infty = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{F}_\ell \quad \textcircled{2}' \quad \mathcal{F}_\infty^+ = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{F}_\ell^+$$

又多様体 M に対して次のように置く。

$$F = \{ x \in M \mid \forall g \in S^1 \quad g \cdot x = x \}$$

$$F_k = \{ x \in M \mid \forall g \in \mathbb{Z}_k \quad g \cdot x = x \}$$

∴ F は固定点の集合であり case ① に於ては $F = \emptyset$ である。又 F, F_k は各連結成分は M の部分多様体である。

定義 2. 定義 1 に於て各 F, F_k の法ベクトルに S^1 の作用と両立する複素構造が与えられているもの (ゴボルディ、 Σ_n についても同様) の作用ゴボルディ、 Σ_n 群を $\Omega_*^u(\mathcal{F})$ とかく。同様に S^1 の作用と両立する弱複素構造を持つ多様体のゴボルディ、 Σ_n 群を $\Omega_*^u(\mathcal{F})$ とする。このとき次の定理が成り立つ。

定理 I. $\mathcal{G}_\ell$ は case ① $\mathcal{F}_\ell$, case ② $\mathcal{F}_\ell^+$ のいずれかとし、 $\mathcal{G}_{\ell-1}$ は ① $\mathcal{F}_{\ell-1}$, ② $\mathcal{F}_{\ell-1}^+$ とする。

i) 自然な写像 $\Omega_*^u(\mathcal{G}_{\ell-1}) \rightarrow \Omega_*^u(\mathcal{G}_\ell)$ は単射である。

ii) $\Omega_*^u(\mathcal{G}_\ell) = \Omega_*^u(\mathcal{G}_{\ell-1}) + \mathcal{Q}(\mathcal{G}_\ell)$ とかける。

§ 1. 定理 IV の証明と ステップ 3.

§ 2. 定理 I ~ III の証明.

M と S' の作用 ψ を持つ多様体, その位数有限の固定化群の中で位数最大のもつを Z_e とし, f_e の管状近傍と V とすると, 連結成分をとる事により次の状況を考えればよい事分かる.

i) F_e は閉じた多様体.

ii) ψ は F_e 上の S' の semi-free の作用.

iii) $V \rightarrow f_e$ はベクトルバンドル.

iv) S' の F_e への作用 ψ' と $\psi'(g) \cdot x = \psi(g') \cdot x \quad g \in S', x \in F_e$

で定義すると, ψ は S' のバンドル $V \rightarrow F_e$ への作用であり,

その zero-section F_e への制限が ψ' である. 特に Z_e は $V \rightarrow F_e$ にベクトル自己同型として作用する. 又 $V - F_e$ (差集合) の各点に付する固定化群は Z_k $1 \leq k < e$, $k | e$ である.

v) バンドル $V \rightarrow F_e$ は複素構造 ψ' を持つ: これは ψ と可換である. (但し定理 I' に於ては定理 (3, 1) を適用する.)

そこで次のような多様体 W の構成を試みる.

i) $\partial W = \dot{V}$ (但し $\dot{V}$ は $V \rightarrow F_e$ に付随した球バンドル)

ii) W は, S' の作用で $\partial W = \dot{V} \pm \psi$ と一致するものとする.

これは ψ とかく.

iii) W の点に対し ψ の有限個の固定化群の位数は $\leq l-1$ である。

このような W に対して $M = (M - \text{Int } V) \cup W + V \cup W$ と比較する事により定理 I I' II が得られ、又 $M_1 = (M - \text{Int } V) \cup W$ における有限個の固定化群の位数が M のものよりも小さいから位数に関する帰納法により定理 III IV を得る。

S' の多様体 V への作用 ψ で ψ と transversal (既 S ψ と ψ は可換で且つ V の各点に対し ψ と ψ の軌道は ψ の点でのみ交わる。) , 且つ V 上自由なものを作る事と目的として次のように示える。まず V 上の ψ の ψ -不変な部分の V への V_i の直和に分ける。

$$V = \sum_i V_i$$

且つ $S = \exp(2\pi\sqrt{-1}/l)$ に対して $\psi(S)$ の作用の各 fibre を固定するがこれが V_i 上

$$(i) \quad \psi(S) \cdot u = \psi(S^{l_i}) \cdot u \quad u \in V_i$$

を満たすものとする。ここで l_i は $\text{mod } l$ で定まる整数から固定点の集合について $F \subset F_i$ に注意して

$$0 < l_i < l$$

が与えられる。このとき $(l, l_i) = d_i$ とおくと $V_i - F_i$ の各点に対して固定化群は $\mathbb{Z}d_i$ である。

次に ψ の "fibre 方向" の S' の作用とみ合せが、これに対

1. "底空間方向" の S' の作用 ψ を次のように定義する。

$g \in S'$ に対して V_i 上 $\psi(g) \psi'(g^{-l_i})$ の作用を考えると $g = 5$

に対して 1 となるから、 $S' \cdot V$ の作用 ψ'' で V_i 上では

$\psi''(g^l) = \psi(g) \psi'(g^{-l_i})$ なるものが定義される。 ψ' の F_i への

作用 $g \cdot V$ の振張で V_i 上

$$(2) \quad \psi(g) = \psi''(g^l) \psi'(g^{l_i}) \quad g \in S'$$

であり、case ① に於ては ψ' と ψ'' は transversal である。

∴ 次の式で定義される S' の作用 ψ を考える。

$$(3) \quad \psi(g) = \psi''(g^a) \psi'(g) \quad g \in S'$$

但し case ① に於ては $a = 1$ 、② に於ては $a = 2$ とする。

これに対して

i) ψ は $\dot{V}$ 上自由である。

iii) case ① に於ては ψ と ψ' は transversal である。

∴ 此の場合も同様に注意して $P_\psi(V) = \dot{V}/\psi$ とおき、 W を $\dot{V} \rightarrow P_\psi(V)$ に附随した胞子バンドルとすると、

i) W は $\partial W = \dot{V}$ 上の作用 ψ の振張をもつ。(∵ 此とも ψ とかく。)

ii) W 上、 ψ の作用の有限個固定化群 (case ① の場合はこれに限る。) の位数は $\leq l-1$ である。

今 ii) の計算を後図 1 にて $M_1 = (M - \text{Int } V) \underset{\dot{V}}{\smile} W$, $P_\psi(V \oplus 1) = V \underset{\dot{V}}{\smile} W$ とおくと次の i) ~ iii) が成り立つ証明が終る。

i) $M_1, P_+(V \otimes 1)$ の作用 ψ をもつ.

ii) M は作用 ψ : $M_1 + P_+(V \otimes 1)$ にコホモロジント

iii) M_1 上の作用の固定化群の中有限のもの、位数 $l_i \leq l-1$.

さて固定化群の計算であるが $W = P_+(V) \cong \tilde{V} \times [0, 1]$ であるから $P_+(V)$ 上の作用を考えると十分である。写像 $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}/\psi = P_+(V)$ による $v \in \tilde{V}$ の像を $[v]$ とかく。case ①では $v = \sum_i v_i$

$v_i \in V_i, v_i \neq 0$ に対して

$$\psi(g)[v] = [v] \quad g \in S' \iff \exists h \in S' \quad \psi(g)v = \psi(h)v$$

$$\text{ii) に対して } a = 1, \text{ 故に } \iff \forall i \quad g^{l-l_i} = 1$$

従って位数は $l-l_i$ 又はそれのいくつかの公約数で $\leq l-1$.

case ②で $F \neq \phi$ とする。 F の連結成分の一つを F^0 とする。

ψ の F^0 への作用は自明であるから $V|_{F^0} (V$ の F^0 への制限) の各 fibre を固定するが、このとき各 $V|_{F^0}$ が定まる) による解

$$V_i|_{F^0} = \sum_j V_{ij}$$

但し V_{ij} は ψ -不変で V_{ij} 上 ψ の作用は

$$\psi(g)u = \psi(g^{l_{ij}})u \quad u \in V_{ij}$$

で与えられる。ここで $l_{ij} \in \mathbb{Z}$, 且つ $\psi = \exp(2\pi\sqrt{-1}/l)$ の作用

を考えると $l_{ij} \equiv l_i \pmod{l}$ である。有限の固定化群の位数 $\leq l$ である。これを考えに入れると l_{ij} としては高々 l 又は $l-l$ のみが見られる。 $l_{ij} = l_i$ に対応する V_{ij} は $V_i^+(F^0)$,

$l_{ij} = l_i - l$ に対応するものは $V_i^-(F^0)$ とかく。個 $l_i - l$ は 0 である。したがって

$$V_i | F^0 = V_i^+(F^0) \oplus V_i^-(F^0)$$

$$\psi(g)u = \begin{cases} \psi'(g^{l_i})u & u \in V_i^+(F^0) \\ \psi'(g^{l_i-l})u & u \in V_i^-(F^0) \end{cases}$$

$P_\psi(V)$ の固定化群を求めたのである。

a) $P_\psi(V) | (F_l - F)$ の上で、 $a = 2$ の注意、その case のと同様に計算すると $l/l_i = 2$ となるのは $P_\psi(V_i)$ の固定点の集合、それ以外では $|l - 2l_i|$ 又はそれのいくつかの公約数が固定化群の位数で $\leq l-1$ である。

b) $P_\psi(V) | F^0$ の上で、 $v = \sum v_{j_i}^+ + \sum v_{j_i}^-$ $v_{j_i}^+ \in V_{j_i}^+(F^0)$, $v_{j_i}^- \in V_{j_i}^-(F^0)$ $v_{j_i}^+ \neq 0$, $v_{j_i}^- \neq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \psi(g)[v] &= [v] & \Leftrightarrow & \exists h \in S' \quad \psi(g)v = \psi(h)v \\ & & \Leftrightarrow & \forall s \quad g^{l_{j_i}} = h \\ & & & \forall t \quad g^{l_{j_i}-l} = h^{-1} \end{aligned}$$

従って $\{l_i\} \cup \{l-l_i\}$ の中相異なるものは $\{k_j\}_{j=1}^r$ 各 k_j によって対応する $V_i^+(F^0)$ 又は $V_i^-(F^0)$ の直和を $V(k_j)$ とすると $P_\psi(V(k_j)) = \dot{V}(k_j) / \psi$ は ψ の固定点の集合であり、又有限の固定化群の位数は $k_j - k_j$ 又はそれのいくつかの公約数であり特に $\leq l-1$ である。

§ 3. $\Omega_*(g_c) \text{ と } \bar{\Omega}_*^u(g_c) \text{ の比較}$

自然写像 $\bar{\Omega}_*^u(g_c) \rightarrow \Omega_*(g_c)$ の像と $\bar{\Omega}_*^u(g_c)$ とは、この § で次の定理を証明する。(g_c は § 2 と同様)

$$\text{定理 (3.1)} \quad \bar{\Omega}_*^u(g_c) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \Omega_*(g_c) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$$

§ 2, p. 4 の data (i) へ v を添えた。但し v は v の代わりに

$$v) \quad w_i(F_c) = w_i(V \rightarrow F_c)$$

とする。このように四つの v の組 (F_c, φ, V, ψ) 同士の間のコホモロジスムという概念が自明な方法で定義される。勿論 (F_c, φ, V, ψ) と $(F'_c, \varphi', V', \psi')$ の間のコホモロジスムで、 φ と φ' は semi-free 作用で、 ψ と ψ' は底空間以外での固定化群がすべて F_c に属する $\mathcal{G}'$ -作用で結ばれるものとする。このコホモロジスム類を $[F_c, \varphi, V, \psi]$ で表わすことにする。

補題 (3.2) 任意の (F_c, φ, V, ψ) に対し、自然数 n と $(F'_c, \varphi', V', \psi')$ が存在し、 $[F'_c, \varphi', V', \psi'] = 2^n [F_c, \varphi, V, \psi]$ 、且つ V' は ψ' -不変な複素ベクトル空間の構造をもつ。

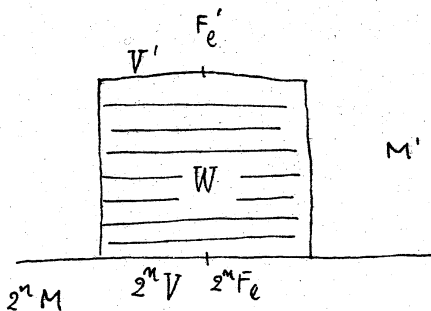
(3.2) を認めると (3.1) は次のように証明される。明らかに $\bar{\Omega}_*^u(g_c) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow \Omega_*(g_c) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ は単射だから、 ψ しか全射でもあることは「えびの」で分る。すなわち、 $[M, \varphi] \in \Omega_*(g_c)$ に対し、自然数 n と $[M', \varphi'] \in \bar{\Omega}_*^u(g_c)$ が存在し

て $[M', \psi'] = 2^m [M, \psi]$ となる事を示せばよい. F_c を § 1 に
 同様 Z_c の固定点とし, その M に於ける法ベクトルバリエーションを
 V とすると, § 2 に述べたように (F_c, ψ, V, ψ) は (3.2) に
 於けるような組である. $\psi: \mathbb{C}(3.2)$ による m と $(F'_c, \psi',$
 $V', \psi')$ をとり $2^m (F_c, \psi, V, \psi)$ と (F'_c, ψ', V', ψ') の間のコホ
 モロジス W を (X, Φ, W, Ψ) とする. なお V は F_c の M に於ける
 管状近傍と同一視し, V', W も胞バリエーションを表わしたものとし
 る. $\dot{W}$ の以前と同様に同様に球バリエーションを表わしたものとし
 る. $M' = 2^m (M - \text{Int } V) \cup \dot{W} \cup V'$ とし, $2^m (M - \text{Int } V)$ 上

$$\psi' = \psi, \quad \dot{W} \cap \psi' = \psi|_{\dot{W}} \text{ として } V'$$

上の ψ' を M' に Γ で拡張すると,

作りおから $[M', \psi'] = 2^m [M,$
 $\psi]$ であり, $[M', \psi'] \in \bar{\Omega}_*^u(g_c)$
 である.



以下 (3.2) の証明の概要を述べる. 場合を二つに分ける.

F_c は連結として差支えない.

1) $w_1(F_c) = w_1(V \rightarrow F_c) \neq 0$. F_c の向き付け可能な
 二重被覆多様体 $F'_c \xrightarrow{\pi} F_c$ とする. ψ による δ' -軌道 γ
 互にホモトープで, 局所的な向きを添った $(\pi(F_c))$ の元と考える
 て, $\pi(F'_c) < \pi(F_c)$ に属する.) : とが確かされる.

故から F'_e 上の S' 作用 Ψ' で射影 π と可換なものを求める。特に Ψ' の丁度 π^{-1} の S' 軌道が Ψ の S' -軌道と覆う。 $V' = \pi^* V$ とし、 V' 上の S' -作用 Ψ' は $\Psi' = \Psi \times \Psi$ で与えられる。 F'_e と $2F_e$ の間のコホモロジース $H^1(X)$ を Dold の方法により作る ([2])。この際、 Ψ' と Ψ の関係に注意すると、 X への Ψ' は 2Ψ と振舞う。 S' -作用 Ψ' は Ψ の 2 倍である。 X は又 $F_e \times I$ 上の分岐を被覆する多様体になる。従って、その射影により V は X 上に引き上げられるバンドル W をつくる。これができ、 Ψ 上の S' -作用 $\Psi = \Psi \times \Psi$ で与えられる。作り方から (X, Ψ, W, Ψ) は $2(F_e, \Psi, V, \Psi)$ と (F'_e, Ψ', V', Ψ') の間のコホモロジース $H^1(X)$ を与える。 $w(F'_e) = w(V' \rightarrow F'_e) = 0$ であるから次の場合へ帰着される。

2) $w(F_e) = w(V \rightarrow F_e) = 0$ 。 § 2 と同様 V は Ψ -不変な部分ベクトルバンドルの直和

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots$$

に分解する。但し $S = \exp(\sqrt{-1}\theta)$ $\theta = 2\pi/l$ に対し $\Psi(S)$ の V の各 fibre を固定するが各 fibre 上の作用が V_i 上行列

$$\begin{pmatrix} \cos l_i \theta & -\sin l_i \theta \\ \sin l_i \theta & \cos l_i \theta \end{pmatrix} \quad 0 \leq l_i < l$$

の直和で与えられるものとする。 $i \geq 1$ に対し $l_i \neq l/2$ とすれば V_i ($i \geq 1$) への Ψ -不変な複素ベクトルバンドルの構造 Ψ' で

$$(1) \quad \psi(15)v = \psi(15^{e_i})v \quad v \in V_i$$

と仮定する。と導入する。よって、 V_0 上の S の作用は

$$(2) \quad \psi(15)v = -v$$

で与えられるものとす。 $i \geq 1$ に対しては、 S_2 により ψ と可換で、 ψ を拡張する V_0 上の S' -作用 ψ' がある。

よって、 F_e 上 ψ が固定点をもたないとする。従って F_e/ψ は多様体であり、 $\rho: F_e \rightarrow F_e/\psi$ は S' -バンドルである。この S' -バンドルを η とかく。又、 $i \geq 1$ に対しては、 $V_i/\psi' \rightarrow F_e/\psi$ は F_e/ψ 上の複素ベクトルバンドル ξ_i を与える。すなわち複素ベクトルバンドル V_i は ρ により ξ_i ともちあうもので、 ρ での S' -作用 ψ' は (1) から

$$(3) \quad \psi' = \psi^e \times \psi'^e$$

の形である。但し $\psi^e(g) = \psi(g^e)$ $g \in S'$ など。

次に (2) により V_0 上 $v \mapsto -v$ の向きを得る。従って $\dim V_0 = 2d_0$ の形であり、 V_0 の構造群は $SO(2d_0)$ である。 V_0 に附随し、群 $PSO(2d_0) = SO(2d_0)/\{\pm 1\}$ をもつバンドル $\bar{\xi}_0$ とする。 (2) により、 ψ は $\bar{\xi}_0$ のバンドル写像による S' -作用 (これを ψ とかく。) を導く。 $\bar{\xi}_0/\psi \xrightarrow{\pi_0} F_e/\psi$ は F_e/ψ 上の $PSO(2d_0)$ -バンドルである。(これを $\bar{\xi}_0$ とかく。) かくして、向き付けられた多様体 $F_e/\psi = N$, N 上の $U(1)$ -バンドル η , $PSO(2d_0)$ -バンドル $\bar{\xi}_0$, 及び $U(d_0)$ -バンドル ξ_0 の

組 $(N, \eta, \xi_0, \xi_1, \dots)$ が得られた。これは

$$\Omega_*(BU(1) \times BPSO(2d_0) \times \prod BU(d_i))$$

の元 $[N, \eta, \xi_0, \xi_1, \dots]$ を代表する。

ここで、以下に於て次の命題 (3.3) と (3.4) が成り立つ。
 $PSO(2d_0)$ -バリエーション ξ_0 の構造群と $SO(2d_0)$ に付いて持つべきである。
 の序数と $\partial(\xi_0) \in H^2(N; \mathbb{Z}_2)$ とする。

$$\text{命題 (3.3)} \quad w_2(\eta) + \partial(\xi_0) = 0$$

次に $w_2 \otimes \partial \in H^2(BU(1) \times BPSO(2d_0); \mathbb{Z}_2)$ を殺すファイバー空間と $B \rightarrow BU(1) \times BPSO(2d_0)$ とする。又 $PU(d_0) = U(d_0)/\{\pm 1\}$ とし、 $\partial^U \in H^2(BPU(d_0); \mathbb{Z}_2)$ はファイバー空間 $X(\mathbb{Z}_2, 1) \rightarrow BU(d_0) \rightarrow BPU(d_0)$ の特性類とし、 $w_2 \otimes \partial^U$ を殺すファイバー空間と $B^U \rightarrow BU(1) \times BPU(d_0)$ とする。(3.3) の $[N, \eta, \xi_0, \xi_1, \dots]$ は $\Omega_*(B \times \prod BU(d_i)) \rightarrow \Omega_*(BU(1) \times BPSO(2d_0) \times \prod BU(d_i))$ の像の中に属するものとされた。

$$\text{命題 (3.4)} \quad \Omega_*(B^U \times \prod BU(d_i)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow$$

$$\Omega_*(B \times \prod BU(d_i)) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \quad \text{同射。}$$

(3.3) の証明。 ξ_0 に附随し $P^{2d_0-1}(\mathbb{R})$ とするファイバー空間と $E \xrightarrow{\pi} N$ とする。 $E = \dot{V}_0 / \psi$ と他から分かる。 $\dot{V}_0$ は球バリエーション、 $\partial(\xi_0)$ は $\pi^*: H^2(N; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(E; \mathbb{Z}_2)$ の核と生成する。 $\mathbb{Z}_2$ に注意する。 $\mathbb{Z}_2$ Gain に付いて $w_2(\eta)$ は $P^*: H^2(N; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(F_0; \mathbb{Z}_2)$ の核と生成する。 すると、 $P^*E =$

$\dot{V}_0/\mathbb{Z}_2$ 上: この球に $\dot{V}_0$ を覆われ, $p^* \alpha(\xi_0) = 0$.

故に $\alpha(\xi_0) = a \omega_2(\eta)$. $a = 0$ 又 1 だが $\pi_0^* \eta$ は $\dot{V}_0/\mathbb{Z}_2$ 上

$\dot{V}_0/4$ であるが, この $\dot{V}_0 \rightarrow \dot{V}_0/4$ は S^1 の作用で覆われ

るから, $\omega_2(\eta) = b \alpha(\xi_0)$ $b = 0$ 又 1 だが $\alpha(\xi_0)$

$= ab \cdot \alpha(\xi_0)$. 故に $ab = 1$, $a \neq 0$ であるから $\alpha(\xi_0) = \omega_2(\eta)$

とある。

(3.4) の証明 $\Omega_*(B^U \times \pi BU(d)) \oplus \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \Omega_* \oplus$

$H_*(B^U \times \pi BU(d), \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, $\Omega_*(B \times \pi BU(d)) \oplus \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong$

$\Omega_* \oplus H_*(B \times \pi BU(d), \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ であり, 且つ

$H_*(B^U \times \pi BU(d), \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]) \rightarrow H_*(B \times \pi BU(d), \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$

が全射であり, 2.1.1.

(3.3) (3.4) から (3.2) の次, (4) に導かれる。(3.3)

(3.4) から

(4) $\Omega_*(B^U \times \pi BU(d)) \rightarrow \Omega_*(BU(1) \times BPU(d_0) \times \pi BU(d_1))$

の像に属する $[N', \eta', \xi', \xi_1', \dots]$ で,

$\Omega_*(BU(1) \times BPU(d_0) \times \pi BU(d_1)) \rightarrow \Omega_*(BU(1) \times BPSO(d_0) \times \pi BU(d_1))$

により $2^n [N', \eta', \xi_0, \xi_1', \dots]$ になるが, η' は $F_e' \xrightarrow{\varphi'}$

N' 上の S^1 の作用に属するから, F_e' 上の $PU(d_0)$ の

作用 $\varphi'^* \xi_0'$ を考えると, (4) を使うと, $\varphi'^* \xi_0'$ は覆

き $\dot{V}_0$ の作用に属する $\dot{V}_0 \rightarrow \dot{V}_0/4$ の作用に覆われるから:

と分かる。 S^1 の作用と, F_e' 上の S^1 の作用を φ' とする

と、行方から V_0' 上には $(\psi')^2$ を拡張する作用があり、従、
 $(\psi')^2$ を拡張する S' 作用 ψ' がある。 $\psi'^* \xi'_i = V_0'$ 上にも (3)
 と同様の方法で S' -作用 ψ' が定義される。 (i=1) 従、 $(V' = V_0 \oplus V_1)$ の
 ψ' も定義される。 行方から $[F'_0, \psi', V', \psi'] = 2^n [F_0, \psi, V, \psi]$ である。 以上により ψ の固定点
 集合 $F = \phi$ なること (3.2) は証明された。 $F \neq \phi$ なる
 場合は、 V_0/F 上では既に ψ 不変な複素ベクトル空間
 の構造が入る。 それを ϕ 不変な F の F_0 の管状近傍 U 上
 に V_0/U 上に拡張し、後は上と同様の推論により (F'_0, ψ', V', ψ') を構成する。

§ 4 Atiyah - Singer の η と Kosniowski の η

$[M, \psi] \in \Omega_*(F_0)$ とする。 $F = \cup F_i$ を ψ の固定点の集
 合 F の連結成分への分解とする。 各 F_i の法ベクトル空間 W_i
 W_i は複素ベクトル空間の構造と ψ は W_i の自己同型群
 として作用する。 従、 W_i は複素ベクトル空間 W_i である。

$$W = \sum W_j$$

$$\psi|_{W_j} = g^{l_{ij}} \quad v \in W_j$$

と分解するが、以下では $l_{ij} > 0$ となるような複素構造と入
 れると約束する。 それにより F の向きも確定する。 $\eta(M) =$

$\dim_{\mathbb{C}} W'$ とおく, Atiyah - Singer の式 (定理 IV 1)) は 更に

$$\text{sign } M = \sum \dim \text{ 偶数 } \text{sign } F^i$$

$$0 = \sum \dim \text{ 奇数 } \text{sign } F^i$$

と述べられる; [1]. 又 Kosniowski が云々 (定理 IV 11)) に

ついても同様である; [4]. したがって, 公式の Atiyah - Singer

の定理の特別な場合として得られるが, $\ell = 1$ のとき, γ の

作用が semi free のときは川久保 旧田 [3], 松本 (亮)

[5] によるコホモロジーの範囲内での初等的証明がある. ℓ

が一般の場合でも, §2, §3 を用いてほぼ同様の線での証

明を与える事ができる. したがって Atiyah - Singer の式に

ついてきつづく大まかな筋も述べる.

§3 により $[M, \psi] \in \Omega_*^u(\mathcal{F}_\ell^+)$ として差ええな. F_ℓ は

以前の通り Σ_ℓ の固定点集合とし, $F_\ell = \cup F_\ell^0$ を連結成分

への分解, V^0 と F_ℓ^0 の法ベクトルバンドルとし. 後述に

より V^0 は ψ 不変な複素ベクトルバンドル, 構造をもつ.

§3 と §2 により,

$$(1) \quad [M, \psi] = \sum_{\ell} [R_\psi(V^0 \otimes 1), \psi] + [M_1, \psi]$$

とわかる. ここで $M_1 = (M - \gamma \text{Int } V^0) \cup W^0$, $R_\psi(V^0 \otimes 1)$

$= V^0 \cup W^0$ であり, $[M_1, \psi] \in \Omega_*(\mathcal{F}_{\ell-1}^+)$. 我々の式と

に關する帰納法の証明する. ($\ell = 1$ のときは [3], [5]

と同じ). $[M_1, \psi] \in \Omega_*(\mathcal{F}_{\ell-1}^+)$ であり, 又 $R_\psi(V^0) \subset M_1$ は

ψ は変位から $[P_\psi(V^0), \psi] \in \mathcal{Q}_*(\mathcal{F}E_1)$.

この両者に帰納法の仮定により、(2)式と適用するにより、

$$\begin{aligned} (2) \quad 0 &= \text{sign } M_1 - \sum_{F_e, F^e = \phi, d(i): \text{偶数}} \text{sign } F^i \\ &= \sum_0 \text{sign } P_\psi(V^0) + \sum_{F_e, F^e = \phi, d(i): \text{奇数}} \text{sign } F^i \end{aligned}$$

を得る。

次に、 $P_\psi(V^0 \text{ の } 1)$ 上の semi free の作用 ψ^1 に (1) と適用し、

$$(3) \quad \text{sign } P_\psi(V^0 \text{ の } 1) = \sum_{F^i \subset F_e^0, d(i): \text{偶数}} \text{sign } F^i$$

又、 $P_\psi(V^0)$ 上の semi free の作用 ψ^0 に (2) を適用し、

$$(4) \quad \text{sign } P_\psi(V^0) = \sum_{F^i \subset F_e^0, d(i): \text{奇数}} \text{sign } F^i$$

を得る。

以上の準備とすれば、(1), (2), (3) から

$$\begin{aligned} \text{sign } M &= \sum_0 \text{sign } P_\psi(V^0 \text{ の } 1) + \sum_{F_e, F^e = \phi, d(i): \text{偶数}} \text{sign } F^i \\ &= \sum_{d(i): \text{偶数}} \text{sign } F^i \end{aligned}$$

又 (2), (4) から

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_0 \text{sign } P_\psi(V^0) + \sum_{F_e, F^e = \phi, d(i): \text{奇数}} \text{sign } F^i \\ &= \sum_{d(i): \text{奇数}} \text{sign } F^i \end{aligned}$$

参考文献

- [1] M. Atiyah and I. Singer, "The index of elliptic operators: III," *Ann. of Math.* 87 (1968)
- [2] A. Dold, "Démonstration élémentaire de deux résultats du cobordisme," *Ehresmann seminar notes*, Paris, 1958-59.
- [3] K. Kawakubo and F. Uchida, "On the index of a semi-free S^1 -action," *Proc. Japan Acad.* 46 (1970), 620-622.
- [4] C. Kosniowski, "Applications of the holomorphic Lefschetz formula," *Bull. London Math. Soc.* (2), 1970.
- [5] T. Matsumoto
- [6] E. Ossa, "Fixpunktfreie S^1 -Aktionen," *Math. Ann.* 186, 1970.
- [7] F. Uchida, "Cobordism groups of semi-free S^1 and S^3 -actions.