

連鎖的な権利行使構造を持つ複合リアル・オプションの評価法： 一般化相補性問題アプローチ

神戸大学大学院・自然科学研究科 長江剛志 (Nagae Takeshi)
Graduate School of Science and Technology,
Kobe University.

1 はじめに

本研究では、複雑な構造を持つ複合リアル・オプション問題に対し、その数理的記述および定量的手法の開発を効率的に行なうための枠組を提案する。本枠組では、対象とする複合オプションを、異なる複数の経済活動状態（以下、アクティビティ）と、それらのアクティビティを切り替えるオプションから構成されるとする。例えば、不動産施設の運用事業で、施設需要が確率動的に変動するとき、施設の遊休化および運用再開が可能な場合を考えよう。この場合、施設を運用している状態、および施設を遊休させている状態のそれぞれがアクティビティに相当する。そして、事業主体（i.e., オプション保有者）は、時々刻々観測される施設需要に応じて、需要が低迷した時には運用から遊休へ、その後、需要が回復した時には遊休から運用へとアクティビティを切り替えられる（オプションを行使できる）。一般に、これらのオプションの行使は、複雑な相互依存関係をもつ。すなわち、あるオプションの行使によって、新たに他のオプションを獲得したり、既得のオプションを喪失したりする。上述の例では、施設を遊休化するオプションを行使することで、新たに運用を再開するオプションを獲得できる。このようなプロジェクトの財務的評価および意思決定を行うためには、オプション構造を明示的に導入した複合リアル・オプション問題の分析手法が必要である。

従来、実物投資問題（あるいは不確実性下での不可逆な意志決定問題）に対し、リアル・オプション・アプローチを採用した研究には膨大な蓄積が存在する（例えば、Dixit and Pindyck, 1994; Schwartz and Trigeorgis, 2001）。しかし、本研究が対象とする複合オプション問題を扱った研究は非常に数が少ない。まず、従来のリアル・オプション研究の殆どは、ファイナンス分野における標準的なアメリカン・オプションを実物資産と読み替えたものを対象としている（例えば、Dixit and Pindyck, 1994, Chap.5-6）。しかし、これらの研究は、いずれも、シンプルな構造を持つオプションのみを対象としているため、複雑な権利行使構造を導入する事が困難である。

一方、権利行使構造をもつ複合オプションを対象とした金融/リアル・オプション研究は非常に数が少なく、それらが対象とするオプション構造は、大きく以下の4つに分類される：1) 分岐構造、複数のオプションの中から、一つのみを選択できる構造。この権利行使は排他的かつ不可逆的であり、いずれかのオプションが行使されると同時に他のオプションを喪失する；2) サイクル構造、あるオプションの行使によって、既に行使した別のオプションを再び獲得できる（i.e. 意思決定が可逆的である）構造；3) 分岐-サイクル混合構造、上記2つを組み合わせた構造；4) タンデム構造、あるオプションの行使によって、新たに他のオプションを獲得できる構造。

この内、1) の分岐構造を対象としたファイナンス分野の研究としては、Margrabe(1978) の交換オプション、Stulz(1982) の最小/最大値オプションが挙げられる。しかし、これらの研究は、いずれも、ヨーロッパン・オプションのみを対象としており、本研究が目的とするタイミング選択を考慮したオプション分析には適さない。

次に、2) のサイクル構造を対象としたリアル・オプション研究としては、Dixit(1989)、Dixit and Pindyck(1994, Chap.7) の参入・退出オプションが挙げられる。続いて、これらを混合した3) の分岐-サイクル混合構造を対象としたリアル・オプション研究としては、Dixit and Pindyck(1994, Chap.7) の参入・退出・一時停止オプションが存在する。しかし、2), 3) の研究は、いずれも、概念的な分析を指向しており、その分析手法として、value matching 条件と smooth pasting 条件を用いて解析解を導出する方法を採用している。この古典的手法は、特殊な仮定（e.g. 対象期間長を無限とし、状態変数が幾何 Brown 運動に従う）をおいた問題に対してのみ有効であり、現実的な状況を取り扱えない。従って、これらのリアル・オプション研究は、いずれも、本研究が目的とする、現実のプロジェクト評価・意思決定の定量的分析にそのまま適用することはできない。

最後に、4) のタンデム構造を対象としたファイナンス分野における従来研究としては、Geske(1979) の複合

オプションが挙げられる。しかし、この研究では、権利時刻を与件としたヨーロピアン・オプションのみを対象としているため、リアル・オプション分析において重要なタイミング選択を考慮できない。また、リアル・オプション研究としては、Dixit and Pindyck(1994, Chap.10)の多段階の投資オプション、および Trigeorgis(1991, 1993)のマルチ・オプションが挙げられる。しかし、前者の研究では、無限の計画期間を前提とし、上述した、解析解を導出するための特殊な仮定をおいているため、現実的な状況を取り扱えない。一方、後者の研究では、有限の計画満期を前提とした定量的分析手法を提案しようとしているものの、状態変数が従うプロセスを幾何 Brown 運動に限定しているため、一般的な確率過程に従う現実的な状況を取り扱えない。

さらに、1)~4)の研究は、いずれも、特定のオプション構造を対象とし、個別の問題に対する限定的な分析を行うに留まっている。そのため、いずれの研究も、異なる構造をもつ複合オプションに対して見通しの良い定量的分析手法を与えるものではない。

これらの複合リアル・オプションを一般化したものとして、Kulatilaka(1995)は、プロジェクトが、複数の“モード”と、それを切り替えるオプションの集合から構成されるとした枠組を提案し、その下でプロジェクトの価値を算出する方法を開発した。そして、モードの切り替えにサンク・コストが存在する場合には、個々のオプション価値を個別に算出して合計したものが、プロジェクト全体の価値を上回る (i.e. オプション価値の加法性が成立しない) ことを示した。しかし、この分析手法は、以下の3点で疑問が残る。第1に、状態変数が二項過程で近似表現できる特殊な場合のみを対象としているため、一般的な状況を取り扱えない。第2に、任意のモード間の切り替えが可能であるとしているため、不可逆的な意思決定を適切に表現できない。最後に、この提案解法は、モードを2つに限定した上での heuristic な手法にすぎず、任意数のモードが存在する一般的な場合には適用できない。

これに対し、本研究では、現実的な枠組の下で、任意の連鎖的権利行使構造をもつ複合リアル・オプション問題をシステムティックに記述・分析し、任意の大規模構造に対しても効率的な見通しの良い数値計算法を開発するための枠組を提案する。具体的には、第1に、連鎖的意思決定構造をもつプロジェクトを、それを構成するサブ・オプションからなる有向グラフ(以下、オプション・グラフ)として表現する枠組を提案し、複合リアル・オプション問題を定式化する。第2に、この問題が、2つの異なる座標軸—時間とグラフ構造—に関して分解できることを明らかにする。これにより、一見非常に複雑で大規模な問題を、より小規模なサブ問題を特定の順序で1つずつ順に解く問題に帰着させられる。第3に、こうして分解されたサブ問題が、適当な離散的枠組の下で、数理計画分野の変分不等式問題および相補性問題の理論で良く知られる有限次元の一般化線形相補性問題 (GLCP: *Generalized Linear Complementarity Problem*) として記述できることを示す。これにより、最近の数理計画理論を活用した見通しの良い数値解法の開発が可能となる。本解法は、Nagae and Akamatsu(2005)で開発された数値解法を sub-procedure (要素的手続き) として含む。そのため、本手法は、Nagae and Akamatsu(2005)の記述、分析、および数値計算法を、複雑な連鎖的構造を持つ複合オプションの枠組へ一般化したものと見なすこともできる。上記の点は、いずれも本研究のオリジナルな貢献である。

本稿は以下のように構成される。まず、続く第2章でオプション・グラフの枠組を示し、複合オプション問題の定式化を行う。続く第3、4章では、こうして定式化されたオプション問題の分解可能性に着目して議論を展開する。具体的には、第3章では、時間に関する分解により、任意の構造をもつ複合オプション問題が無限次元の GLCP として統一的に記述できることを示す。第4章では、この GLCP が、オプション・グラフの部分構造ごとに成立する、より小規模な問題に分解できることを示す。続く第5章では、部分構造ごとに分解された GLCP が、適当な離散的枠組の下で、有限次元の GLCP として記述できることを示す。こうして得られた GLCP に対し、変分不等式理論および相補性問題理論の分野における最近の研究成果を活用した効率的解法を開発する。第6章はまとめである。

2 モデルの枠組と定式化

2.1 有向グラフによる権利行使構造の表現

本研究では、プロジェクトがもつ複雑な連鎖的意思決定構造を、“アクティビティ”をノードとし、その切り替えを有向リンクで記述した有向グラフ(図1)で表現する。ここで、アクティビティとは、ある特定の経済活動を行っている状態を指す。例えば、用地取得期間、建設期間および供用期間からなる有料道路の建設・運用事業では、各フェイズがそれぞれ1つのアクティビティと見なせる。また、明示的な経済活動を行っていない状態もアクティビティと見なすことができる。上述の有料道路事業の例では、計画を開始する前、あるいは計画を一時凍結している状態も、それぞれ、1つのアクティビティと捉えることができる。

この枠組の下で、あるアクティビティ W から他のアクティビティ X への変更を行う権利を“オプション”と呼び、図2に示すような、2つのアクティビティ W, X と、それらを結ぶ1本の有向リンクとして表現する。

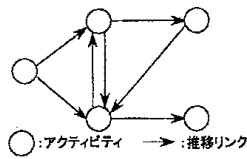


図1 オプションの権利行使構造を表す有向グラフ

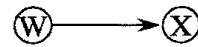


図2 最小単位のオプション

そして、そのオプションの行使 (i.e. アクティビティの推移) を、 $W \rightarrow X$ と表現する。このとき、対象とするプロジェクトは、これらのオプションから構成される“複合オプション”と見なせる。本研究では、当該プロジェクトを構成するアクティビティ集合を N 、有向リンク集合を L と記述し、当該プロジェクトの意思決定構造を有向グラフ $\mathcal{G}(N, L)$ で表す。以下では、 $\mathcal{G}(N, L)$ を“オプション・グラフ”と呼ぶ。

プロジェクトに対する各意思決定がもつ特徴は、このオプション・グラフ上の部分構造によって、以下の3つに分類できる：a) 分岐型、複数のオプションが並列的に連結する部分構造を“分岐型”と呼ぶ。この部分構造は、あるオプションを行使すると同時に、複数の既得のオプションを喪失する意思決定構造を表す。図1の例では、オプション①→②と①→③からなる部分構造がこれに相当する；b) サイクル型、複数のオプションからなる有効閉路を“サイクル型”と呼ぶ。この部分構造は、一度行使したオプションが、他のオプションを行使することで再び獲得できる可逆的な意思決定構造を表す。図1の例では、2つのオプション②→③と③→②がサイクル型部分構造を形成している；c) タンデム型、二つ以上のオプションが直列的に連結する部分構造を、“タンデム型”と呼ぶ。この部分構造は、あるオプションを行使することで、新たに別のオプションを獲得できる意思決定構造を表す。図1の例では、オプション②→④と④→⑤がタンデム型部分構造を形成している。

以下では、あるアクティビティ n から (他のアクティビティを介さずに) 推移可能なアクティビティを、 n の“推移先 (アクティビティ)”と呼び、その集合を $O(n) \equiv \{m | \exists (n, m) \in L\}$ で表す。同様に、あるアクティビティ n を直接推移先にもつアクティビティの集合を $I(n) \equiv \{m | \exists (m, n) \in L\}$ で記述する。また、有向グラフ $\mathcal{G}$ 内に推移先が存在しないアクティビティを、 $\mathcal{G}$ の“終端アクティビティ”と呼び、その集合を $N^E \equiv \{n | O(n) = \emptyset\}$ で表す。

2.2 プロジェクトから発生するキャッシュフロー

対象時間帯を $[0, T]$ とし、時刻 T での事象集合を Ω とする。 Ω に対する客観的確率測度を $\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P}(\omega) | \omega \in \Omega\}$ で表し、 Ω のフィルトレーション $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}(t) | t \in [0, T]\}$ を定義する。本稿では、対象オプションの各アクティビティから発生するキャッシュ・フローを、1次元の“代表的状態変数” $P(t)$ の関数として表現する。また、その値が以下の伊藤拡散過程に従うとする：

$$dP(t) = \alpha_n(t, P)dt + \sigma_n(t, P)dZ(t), \quad P(0) = P_0. \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_n, \sigma_n : [0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ はアクティビティごとに定義される既知の関数、 $dZ(t)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ 上で定義される1次元 Wiener 過程の増分である。このような代表的状態変数の例としては、交通量、財や資産の価格、人口などが挙げられる。本稿では、状態変数 $P(t)$ および Wiener 過程 $Z(t)$ の次元を、いずれも1次元とする。これは、理論展開を簡潔にするための便宜であり、本提案手法の本質的な仮定 (あるいは限界) を示すものではない。事実、本研究の枠組みは、理論的には、任意次元の状態変数および Wiener 過程を扱うことができる。以下では、時刻 t において、状態変数 $P(t) = P$ が観測された状況を、2つ組 (t, P) で表現し、それが取り得る空間全体を $\mathcal{K} \equiv [0, T] \times \mathcal{R}$ で表す。

対象とするプロジェクトから発生するキャッシュ・フローは、以下の3つに区別される：第1に、期間 $[0, T]$ 中、時間に関して連続的に発生する利潤を“利潤フロー”と呼ぶ。アクティビティ n から発生する単位時間あたりの利潤フローを、状況 (t, P) の既知関数 $\pi_n(t, P)$ で記述する。第2に、満期 T において瞬間的に発生する利潤を“終端ペイ・オフ”と呼び、状態変数 P の既知関数 $\Pi_n(P(T))$ で表す。最後に、アクティビティの変更 (i.e. オプション行使) に伴い瞬間的に発生するサンク・コストを“推移費用”と呼び、アクティビティ n から m への推移費用を所与の定数 $C_{n,m}$ で表す。

2.3 オプション問題の定式化

プロジェクトの意思決定主体 (以下、事業主体) は、期間 $[0, T]$ 中に発生する総キャッシュ・フローの現在正味価値 (NPV: Net Present Value) の期待値を最大化するように、アクティビティ戦略 $\{n(t)\}$ を決定する。ここ

で、 $n(t)$ は、時刻 t で選択されているアクティビティである。この行動は、以下のように定式化される：

$$[P] \quad \max_{\{n(t)\}} E \left[J(0, T, n(\cdot)) \middle| P(0) = P \right]$$

ここで、 $J(t, T, n(\cdot))$ は、推移戦略 $\{n(\cdot)\}$ の下で期間 $[t, T]$ にプロジェクトから発生するキャッシュ・フローを時刻 t で評価した NPV であり、以下の式で定義される。

$$J(t, T, n(\cdot)) \equiv \int_t^T e^{-r(s-t)} \pi_{n(s)}(s, P(s)) ds + e^{-r(T-t)} \Pi_{n(T)}(P(T)) - \sum_k e^{-r(\tau_k-t)} C_{n(\tau_k), n(\tau_k^-)} \quad (2)$$

ただし、 τ_k, τ_k^- は、それぞれ、 k 番目に推移が行われる時刻と、その直前の時刻を表す。また、 n_0 は初期時点 $t=0$ で選択されている（既知の）アクティビティを表す。式 (2) の各項は、以下の 3 つのキャッシュ・フローの、時刻 t における現在価値の総和をそれぞれ表す：第 1 項は、期間 $[0, T]$ 中に各アクティビティから得られる利潤フロー、第 2 項は、満期 T で得られる終端ペイ・オフ、第 3 項は、各推移が行われる時点で支払われる推移費用。以下では、この問題 [P] を、“複合オプション問題”と呼ぶ。

複合オプション問題 [P] は、そのままの形では数理解析をすることが困難である。しかし、この問題 [P] は、図 3 に示すように、2 つの異なる座標軸—時間およびオプション・グラフの部分構造—ごとに分解することにより、より容易に数理解析が可能となる。そこで、続く第 3, 4 章では、問題 [P] が時間と部分構造に関して分解できることを示そう。

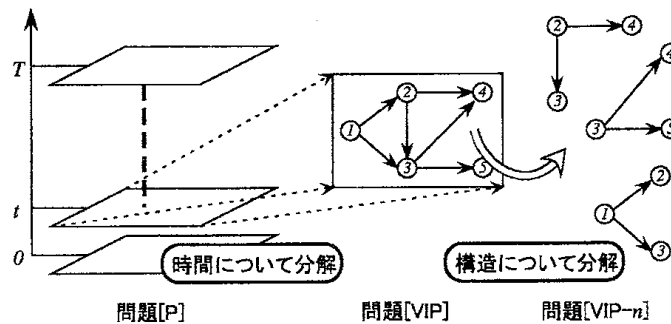


図 3 オプション問題の分解

3 時間に関する分解

本章では、複合オプション問題 [P] を時間に関して分解することにより、この問題が各瞬間で成立する一般化相補性問題 (GLCP: Generalized Linear Complementarity Problem) として表現できることを述べる。具体的に、まず、3.1 では、問題 [P] の最適値関数を、アクティビティごとの“価値”として定義する。次に、3.2 では、これらのアクティビティの価値を DP 分解し、各瞬間で成立する最適性条件を GLCP として表現する。

3.1 最適値関数の定義

時刻 t に状態変数 $P(t) = P$ が観測され、アクティビティ $n(t) = n$ が選択されているとき、この状況を 3 つ組 (t, P, n) で表す。ここで、状況 (t, P, n) における問題 [P] の最適値関数を、以下の式：

$$V(t, P, n) \equiv \max_{\{n(s) | s \in [t, T], n(t) = n\}} E \left[J(t, T, n(\cdot)) \middle| P(t) = P \right], \forall (t, P) \in \mathcal{K}, \forall n \in N. \quad (3)$$

で定義しよう。この式は、期待値のネストを用いて以下のように書き直せる。

$$V(t, P, n) \equiv \max_{\tau \in [t, T]} E \left[\int_t^\tau e^{-r(s-t)} \pi_n(s, P(s)) ds + \max_{m(\tau) \in O(n)} e^{-r(\tau-t)} \{ V(\tau, P(\tau), m(\tau)) - C_{n, m(\tau)} \} \middle| P(t) = P \right] \quad (4)$$

ここで、 τ は t 以降はじめて推移が行われる時刻を、 $m(\tau)$ は、その時刻 τ で選択される推移先アクティビティである。以下では、 (t, P, n) における最適値関数を、アクティビティ n の状況 (t, P) における“価値”と呼び、 $V_n(t, P) \equiv V(t, P, n)$ と記述する。

なお、終端アクティビティ n' の状況 (t, P) における価値は、それ以降に発生する期待総利潤：

$$V_{n'}(t, P) \equiv E \left[\int_t^T e^{-r(s-t)} \pi_{n'}(s, P(s)) ds + e^{-r(T-t)} \Pi_{n'}(P(T)) \mid P(t) = P \right] \quad (5)$$

である。ここで、式(5)は、以下の線形偏微分方程式の解 (Feynman-Kac 解) である事が知られている。

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{n'} V_{n'}(t, P) + \pi_{n'}(t, P) = 0, & \forall t \in [0, T], \forall P \in \mathcal{R} \\ V_{n'}(T, P(T)) = \Pi_{n'}(P(T)), & \forall P(T) \in \mathcal{R}. \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\mathcal{L}_n$ は以下の式で定義される偏微分作用素である。

$$\mathcal{L}_n \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial P} \alpha_n(t, P) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial P^2} \{\sigma_n(t, P)\}^2 - r. \quad (7)$$

この偏微分作用素は、アクティビティ n が選択されているときの状態変数プロセス (1) のみから決定される。これより、終端アクティビティの価値 $\{V_{n'}(t, P)\}$ は、複合オプション問題 [P] において、 (t, P) の既知関数と見なせることに注意されたい。

3.2 一般化相補性問題としての最適性条件の表現

前項で定義したアクティビティの価値 $V_n(t, P)$ を用いれば、各瞬間で成立する最適性条件を GLCP として記述できる。式(4)に対し、時間に関する DP 原理を適用すれば、任意の状況 (t, P, n) における最適性条件は、次の2つの場合に区分される：i) アクティビティ n を維持する；ii) 他のアクティビティに推移する。以下では、状況 (t, P, n) における最適推移先アクティビティを $m_n^*(t, P)$ で表し、i), ii) がそれぞれ最適となるための条件を述べる。

まず、状況 (t, P, n) で微小時間 $[t, t + dt]$ だけ現在のアクティビティ n が維持される (i.e. $m_n^*(t, P) = n$) 場合、最適値関数の定義より、以下の不等式が成立する。

$$V_n(t, P) \geq \pi_n(t, P) dt + e^{-r dt} E[V_n(t, P) + dV_n(t, P) \mid P(t) = P] \quad (8)$$

この式を伊藤の補題を用いて展開・整理すれば、状況 (t, P) で成立すべき以下の不等式を得る。

$$F_n(t, P) \equiv -\mathcal{L}_n V_n(t, P) - \pi_n(t, P) \geq 0 \quad (9)$$

次に、状況 (t, P, n) で他のアクティビティへの推移が行われる場合、最適値関数の定義より、以下の不等式が成立する。

$$V_n(t, P) \geq \max_{m \in O(n)} \{V_m(t, P) - C_{n,m}\}. \quad (10)$$

この式(10)の左辺より右辺を引いて整理すれば、以下の不等式を得る。

$$\min_{m \in O(n)} \{G_{n,m}(t, P)\} \geq 0, \quad G_{n,m}(t, P) \equiv V_n(t, P) - V_m(t, P) + C_{n,m}, \forall (n, m) \in L. \quad (11)$$

任意の状況 (t, P, n) において、上記 i), ii) の選択は排他的である。すなわち、式(9), (11)のいずれかのみが等号が成立する。これは、以下の一般化相補性条件として記述できる：

$$\min \{F_n(t, P), \min_{m \in O(n)} G_{n,m}(t, P)\} = 0. \quad (12)$$

満期 $t = T$ における終端条件についても同様の場合分けが行える。すなわち、状況 (T, P, n) において、i) アクティビティ n が維持される場合 $V_n(T, P) \geq \Pi_n(P)$ であり、ii) 他のアクティビティに推移する場合 $V_n(T, P) \geq \max_{m \in O(n)} \{V_m(T, P) - C_{n,m}\}$ である。これより、アクティビティ n の価値 $V_n(t, P)$ の終端条件は以下の式で表される。

$$V_n(T, P(T)) = \max \left[\Pi_n(T, P(T)), \max_{m \in O(n)} \{V_m(T, P(T)) - C_{n,m}\} \right]. \quad (13)$$

式(12), (13)は、状況 (t, P, n) の下で、あるアクティビティ n について成立すべき条件のみを記述しており、任意のアクティビティに対して同様の議論が成立する。従って、時刻 $t \in [0, T]$ で成立すべき問題は、式

(12), (13) を全てのアクティビティ $n \in N$ および全ての状態 $P \in \mathcal{R}$ について連立させた以下の一般化相補性問題として記述される。

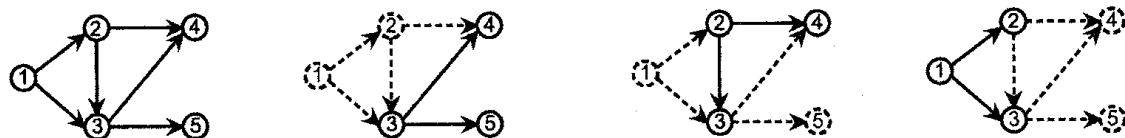
$$[\text{GLCP}(t)] \quad \text{Find } \{V(t, P) | \forall P \in \mathcal{R}\} \text{ such that } \min. \{F_n(t, P; V(\cdot)), \min_{m \in O(n)} G_{n,m}(t, P; V(\cdot))\} = 0, \quad \forall n \in N, \forall P \in \mathcal{R}.$$

ただし、終端条件は式 (13) で表される。

4 グラフ構造に関する分解

前章において、複合オプション問題 $[P]$ は、各時刻ごとに成立する問題 $[\text{GLCP}(t)]$ に分解できることを示した。この問題 $[\text{GLCP}(t)]$ は、全てのアクティビティの価値を連立させて同時に求める必要があり、ナイーブな方法では解くことができない。しかし、問題 $[\text{GLCP}(t)]$ は、さらに、オプション・グラフを構成する部分構造ごとの問題に分解でき、これによって、より小規模な問題を順に解く問題に帰着させられる。本章ではこれを明らかにしよう。グラフ構造についての分解可能性の議論は、オプション構造 $\mathcal{G}(N, L)$ がサイクル構造を含む場合と、そうでない場合に区分される。しかし、ここでは紙面の都合上、サイクル構造を含まれない場合についてのみ議論する。サイクル構造が含まれる場合については、Akamatsu and Nagae(2005) を参照されたい。

オプション・グラフ $\mathcal{G}(N, L)$ がサイクル構造を含まない場合、問題 $[\text{GLCP}(t)]$ は、各アクティビティの価値を一つずつ求める問題に帰着する。まず、任意の時刻 t における全ての終端アクティビティの価値は、偏微分方程式 (7) の解として、他のアクティビティの価値とは独立に求めることができる。例えば、図 4 a) のオプション・グラフにおいて、終端アクティビティ④、⑤の価値は、対応する偏微分方程式を解いて予め計算できる。



a) 対象とするグラフ構造 b) アクティビティ3の価値を求める c) アクティビティ2の価値を求める d) アクティビティ1の価値を求める

図4 サイクル構造を含まない場合の解法

こうして、任意の時点 t において、終端アクティビティの価値が判っていれば、それらを用いることにより、別のアクティビティの価値を計算できる。具体的には、終端アクティビティのみを推移先とするアクティビティ n が少なくとも一つ存在し、その価値 $V_n(t) \equiv \{V_n(t, P) | \forall P \in \mathcal{R}\}$ を、このアクティビティ n を起点とする分岐型部分構造問題の解として求められる。図4のオプション・グラフ例では、終端アクティビティ④、⑤のみを推移先とするアクティビティ③が存在し、その価値が、図4 b) に示す分岐型部分構造について成立する問題の解として計算できる。

こうして得られたアクティビティの価値を用いることにより、新たに別のアクティビティの価値が求められる。具体的には、価値が確定したアクティビティのみを推移先とするようなアクティビティが少なくとも1つ存在し、その価値を、当該アクティビティを起点とした分岐型部分構造問題の解として求めることができる。図4の例では、価値が確定したアクティビティ $\{③, ④, ⑤\}$ のみを推移先とするアクティビティ②が存在し、その価値を図4 c) に示す部分構造問題の解として求められる。同様に、②、③の価値のみを用いて、アクティビティ①の価値を計算できる(図4 d))。

このように、時点 t での価値が確定したアクティビティの集合を $\hat{N}$ とするとき、条件 $O(n) \subseteq \hat{N}$ を満たすアクティビティ n が、少なくとも一つ存在する。従って、以下の手続き：i) $O(n) \subseteq \hat{N}$ なる n を探し、ii) その価値 $V_n(t)$ を、 n を起点とした分岐型部分構造問題の解として求める；を繰り返せば、最終的に全てのアクティビティの価値を求められる。

ここで、手続き ii) において解くべき、分岐型部分構造について成立する問題は、以下の無限次元 GLCP

$$[\text{GLCP}(t)-n] \quad \text{Find } V_n(t) \text{ such that } \min. \{F_n(t, P), \min_{m \in O(n)} G_{n,m}(t, P)\} = 0, \quad \forall P \in \mathcal{R}.$$

として定式化される。ただし、ここでは、当該時刻 t における状態変数 P についての既知関数、あるいは所与の定数であることを明示するために上線付きの表記を用いた。

問題 $[\text{GLCP}(t)-n]$ は、アクティビティ n についての最適性条件式 (12) から直接導出される。これは、アクティビティ n の全ての推移先の価値が P に関する既知関数であることから、最適性条件 (12) が未知変数 $V_n(t)$ について独立となるためである。

以上の議論より、オプション・グラフがサイクル構造を含まない場合、問題 [GLCP(t)] を解く手続きは、以下のアルゴリズムとしてまとめられる。

[Alg-NC]

Step 0 (初期化) : 終端アクティビティ集合 N^E 内の全要素 n' について偏微分方程式 (6) を解き、その価値 $V_{n'}(t, P)$ を求める ; 全てのアクティビティ n について、価値が未確定な推移先の数を $A(n) := |O(n)|$ とする ; 価値が確定済みのアクティビティ集合を $\hat{N} := N^E$ とする。

Step 1 (価値が確定できるアクティビティの探索) : $\hat{N}$ の先頭の要素を n とし、 $\hat{N}$ から取り除く ; n を推移先にもつアクティビティ集合 $I(n)$ 内の全ての要素 m について、次の手続きを繰り返す :

$A(m) := A(m) - 1$ とする ; もし $A(m) = 0$ ならば、問題 [GLCP($t-m$)] を解いて $V_m(t)$ を求め、 m を $\hat{N}$ の末尾に挿入する。

Step 2 (終了判定) : $\hat{N}^{(k)} = \emptyset$ ならば終了。そうでなければ Step 1.

5 アルゴリズム

本章では、前章までの分析を活用した複合オプション問題 [P] の数値解法を述べる。まず、5.1 において離散的表現のための枠組を示す。次に、5.2 では、一般化線形相補性問題 [GLCP] を離散表現し、第 3~5 章での議論と同様、この問題が、各時点で成立する部分構造ごとの NCP を逐次的に解く問題へ帰着することを示す。

5.1 離散的表現の枠組

十分に大きな状態変数の領域 $[P_{\min}, P_{\max}] \in \mathcal{R}$ をとり、時刻と状態変数の空間 $\mathcal{K} \equiv \{(t, P) | t \in [0, T], P \in \mathcal{R}\}$ を、以下の格子 :

$$\gamma \equiv \{(i, j) | \forall i \in I, \forall j \in J\} \quad (14)$$

を用いて $(i^j, P^j) \equiv (i\Delta T, j\Delta P + P_{\min})$ と離散表現する。ここで、 $I \equiv \{0, 1, \dots, I\}$, $J \equiv \{0, 1, \dots, J, J+1\}$ とし、状態変数の境界を示すインデックスを、それぞれ、 $\min \equiv 0, \max \equiv J+1$ で表す。また、 $\Delta T, \Delta P$ は、それぞれ、時刻および状態変数についての格子間隔を表す。

この枠組下で、任意関数 $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{R}$ に対して、格子 γ の (i, j) 座標上での値を、 $f^{i,j} \equiv f(i^j, P^j)$ と表現する。以下では、時刻 i についてのベクトル表現 $\mathbf{f}^i \equiv \{f_n^{i,1}, \dots, f_n^{i,J}\}$ を適宜用いる。このとき、式 (7) で定義される偏微分作用素 $\mathcal{L}_n$ は、

$$\mathcal{L}_n V_n(i^j, P^j) \approx L_n^i V_n^j + M_n^i V_n^{j+1} \quad (15)$$

と離散近似される。ここで、 L_n^i, M_n^i は、式 (7) で定義される偏微分作用素 $\mathcal{L}_n$ を適当なスキームで差分近似して得られる $J \times J$ の正方行列である。

5.2 複合オプション問題の離散的表現

前項の枠組の下で、時間について分解された問題 [GLCP(t)] は、未知変数を $\mathbf{V}^i \equiv \{V_n^i | n \in N\}$ とした以下の有限次元 GLCP

$$[\text{GLCP}^i] \quad \text{Find } \mathbf{V}^i \text{ such that } \min \{F_n^i(\mathbf{V}^i), \min_{m \in O(n)} G_{n,m}^i(\mathbf{V}^i)\} = 0, \forall n \in N,$$

として離散表現できる。ここで、

$$F_n^i(\mathbf{V}^i) \equiv -L_n^i V_n^i - M_n^i V_n^{i+1} - \pi_n^i, \quad G_{n,m}^i(\mathbf{V}^i) \equiv V_n^i - V_m^i + 1C_{n,m} \quad (16)$$

時点 i におけるサブ問題 [GLCP ^{i}] は、その次の時点 $i+1$ の最適値関数 $\mathbf{V}^{i+1}$ が既知ならば、当該時点の $\mathbf{V}^i$ のみを未知変数とした独立な問題となる。ただし、満期 $i = I$ における値は、終端条件式 (13) を離散表現した以下の式から計算される。

$$V_n^I = \max \left[\Pi_n, \max_{m \in O(n)} \{V_m^I - 1C_{n,m}\} \right], \forall n \in N. \quad (17)$$

これより、複合オプション問題 [GLCP] を離散表現した問題は、終端条件 (17) で得られた $\mathbf{V}^I$ を与件とし、 $i = I-1, I-2, \dots, 2, 1, 0$ の順に、時点 i を遡りながらサブ問題 [GLCP ^{i}] を逐次的に解く問題に帰着する。

問題 [GLCP ^{i}] は、第 4 章の議論と同様、オプション・グラフの部分構造ごとに成立する有限次元 GLCP に分解できる。すなわち、サイクル構造が含まれない場合、[GLCP ^{i}] は、以下のアクティビティごとの問題

$$[\text{GLCP}^{i-n}] \quad \text{Find } V_n^i \text{ such that } \min \{F_n^i(V^i), \min_{m \in O(n)} G_{n,m}^i(V^i)\} = 0. \quad (18)$$

に帰着する。そして、第4章での議論と同様、この問題 $[\text{GLCP}^i\text{-}n]$ を、手続き $[\text{Alg-NC}]$ に従って、終端アクティビティから順番に一つずつ解くことで、時点 i における全てのアクティビティの価値 V_n^i が求められる。

ここで、 $[\text{GLCP}^i\text{-}n]$ のような一般化線形相補性問題の効率的解法については、数理計画における変分不等式理論および相補性理論の分野で、近年、活発に研究が行なわれている。中でも、Peng and Lin(1999) は、 $[\text{GLCP}^i\text{-}n]$ のような一般化線形相補性問題：

$$H(V) \equiv \min\{F(V), G_1(V), \dots, G_M(V)\} = 0 \quad (19)$$

を、区分的に滑らか (piecewise-smooth) な非線形方程式系と見なした上で、式 (19) を平滑化した以下の関数

$$H^i(V, \xi) \equiv -\xi \ln \left\{ e^{-F^i(V)/\xi} + e^{-G_1^i(V)/\xi} + \dots + e^{-G_M^i(V)/\xi} \right\} = 0 \quad (20)$$

を用いて、一般化相補性問題 (19) の解を求めるアルゴリズムを提案した。このアルゴリズムは、 $\lim_{\xi \rightarrow 0} H(V, \xi) = H(V)$ となる性質を利用し、各繰り返しにおいて、平滑化関数 (20) の解を Newton 法で求めながら ξ を徐々に 0 へと漸近させることで、元の区分的に滑らかな非線形方程式 (19) の解を求めるものである。その詳細および本研究への適用結果については、Akamatsu and Nagae(2005) を参照されたい。

6 おわりに

本研究では、複雑な相互依存関係を持つリアル・オプションで構成される複合リアル・オプション問題に対し、その数学的記述および効率的数値計算法開発のための枠組を提案した。より具体的には、まず、オプションの構造を有向グラフとして表現する枠組を提案し、複合リアル・オプション問題を定式化した。次に、この複合オプション問題を時間について分解することで、その各瞬間で成立する最適性条件が一般化線形相補性問題 (GLCP) として再定式化できることを示した。そして、この GLCP を、オプション構造について分解することで、より小規模なサブ問題を特定の順序で一つずつ解く問題に帰着することを示した。これにより、任意の大規模構造に対しても効率的な数値計算方法を開発した。

参考文献

- [1] Dixit, A. K. and Pindyck, R. S.: *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994.
- [2] Schwartz, E. S. and Trigeorgis, L. eds.: *Real Options and Investment under Uncertainty - Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press, 2001.
- [3] Margrabe, W.: The value of an option to exchange one asset for another, *The Journal of Finance*, Vol. 33, No. 1, pp. 177-186, 1978.
- [4] Stulz, R. M.: Options on the minimum or the maximum of two risky assets, *Journal of Financial Economics*, Vol. 10, No. 2, pp. 161-185, 1982.
- [5] Dixit, A. K.: Entry and exit decisions under uncertainty, *Journal of Political Economy*, Vol. 97, pp. 620-638, 1989.
- [6] Geske, R.: The valuation of compound options, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, No. 1, pp. 1235-1256, 1979.
- [7] Trigeorgis, L.: A log-transformed binomial numerical analysis method for valuing complex multi-option investments, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 26, pp. 309-326, 1991.
- [8] Trigeorgis, L.: The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-20, 1993.
- [9] Kulatilaka, N.: The value of flexibility: A general model of real options, in Trigeorgis, L. ed., *Real Options in Capital Investment*, Praeger, 1995.
- [10] Nagae, T. and Akamatsu, T.: A generalized complementarity problem approach to solving real option problems, submitted to *Journal of Economic Dynamics & Control*.
- [11] Akamatsu, T. and Nagae, T.: Graph options: Evaluating complex interdependent decisions under uncertainty, submitted to *Management Science*.
- [12] Peng, J.-M. and Lin, Z.: A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problem, *Mathematical Programming*, Vol. 86, pp. 533-563, 1999.