

$SU(2, 2)$ 上の theta 関数

広島大理 松本 圭司 (Keiji Matsumoto)

Jacobi's theta constants は、

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\{\pi i(n+a)^2 w + 2\pi i n b\}, \quad w \in \mathbb{H}, \quad a, b \in \{0, 1/2\}$$

で定義され、 $ab = 0$ ならば $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (w)$ は $w \in \mathbb{H}$ で零点をもたないこと、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の level 2 の主合同部分群 $\Gamma(2)$ の元 $g = (g_{jk})$ に対し

$$\vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (g \cdot w)^4 = (g_{21}w + g_{22})^2 \vartheta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (w)^4, \quad g \cdot w = (g_{11}w + g_{12})(g_{21}w + g_{22})^{-1}$$

をみたすこと、そして Jacobi's identity

$$(1) \quad \vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (w)^4 - \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (w)^4 + \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (w)^4 = 0$$

をみたすことはよく知られている。これらのことから写像 $\vartheta : \mathbb{H}/\Gamma(2) \rightarrow \mathbb{P}^2$

$$\vartheta : \mathbb{H}/\Gamma(2) \ni w \mapsto [\vartheta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (w)^4, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (w)^4, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (w)^4] \in \mathbb{P}^2$$

が well-defined であり、 $Z = \{[t_0, t_1, t_2] \in \mathbb{P}^2 \mid t_0 - t_1 + t_2 = 0\} - \{[0, 1, 1], [1, 0, -1], [1, 1, 0]\}$ への同型写像であることが容易にわかる。

一方 $\mathbb{P}^1$ 上の順序づけられた相異なる四点の配置空間 $X(2, 4)$ は、以下のような商集合で定義される

$$X(2, 4) = GL(2, \mathbb{C}) \backslash M(2, 4) / \mathbb{C}^{*4},$$

$$M(2, 4) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} \mid x\langle jk \rangle = \det \begin{pmatrix} x_{0j} & x_{0k} \\ x_{1j} & x_{1k} \end{pmatrix} \neq 0 \quad 0 \leq j < k \leq 3 \right\}$$

であり、

$$g \in GL(2, \mathbb{C}) : x \mapsto gx, \quad (h_0, \dots, h_3) \in \mathbb{C}^{*4} : x \mapsto x \text{diag}(h_0, \dots, h_3),$$

が $GL(2, \mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^{*4}$ の作用である。 $M(2, 4)$ の任意の元 x は $GL(2, \mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^{*4}$ の作用で

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & z \end{pmatrix}, \quad z \neq 0, 1$$

という形にできるので、空間 $X(2, 4)$ は $\mathbb{P}^1$ から三点 $\{0, 1, \infty\}$ を除いたものとみることができ、このみかたでは x の列の入れかえとしての対称群 S_4 の作用がわかりにくくなる。 S_4 の作用がよくみえる形で $\mathbb{P}^2$ 内に実現することが以下のようにできる。写像 $\iota : M(2, 4) \rightarrow \mathbb{P}^2$

$$\iota : M(2, 4) \ni x \mapsto [x\langle 01 \rangle x\langle 23 \rangle, x\langle 02 \rangle x\langle 13 \rangle, x\langle 03 \rangle x\langle 12 \rangle] \in \mathbb{P}^2$$

は、 $GL(2, \mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^{*4}$ の作用で不変であるので写像 ι は $X(2, 4)$ から $\mathbb{P}^2$ への写像と考えられる。この写像は、Plücker's relation

$$(2) \quad x\langle 01 \rangle x\langle 23 \rangle - x\langle 02 \rangle x\langle 13 \rangle + x\langle 03 \rangle x\langle 12 \rangle = 0$$

および $x\langle jk \rangle \neq 0$ ($0 \leq j < k \leq 3$) より

$$Z = \{[t_0, t_1, t_2] \in \mathbb{P}^2 \mid t_0 - t_1 + t_2 = 0\} - \{[0, 1, 1], [1, 0, -1], [1, 1, 0]\}$$

への同型写像であることが容易にわかる。

以上のことから $H/\Gamma(2)$ と $X(2, 4)$ とが同型であることがわかるが、 $X(2, 4)$ から $H/\Gamma(2)$ への対応は、 $\mathbb{P}^1$ 上の与えられた四点の配置で分岐する $\mathbb{P}^1$ の double cover で楕円曲線を作り、その楕円曲線の周期の比をとる周期写像で与えられる。周期写像は多価であるがそのモノドロミー群が丁度 $\Gamma(2)$ となっている。

上半空間 H を

$$H_2 = \left\{ W \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \frac{W - W^*}{2i} > 0 \right\}$$

にかえた場合にも上記のようなきれいな対応があること紹介する。theta 関数を

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (W) = \sum_{n \in \mathbb{Z}[i]^2} \exp\{\pi i(n+a)^* W(n+a) + 2\pi i \operatorname{Re}(b^* n)\}, \quad W \in H_2, \quad a, b \in \{0, 1/(1+i)\}^2$$

で定義する。 $a^* b \in \mathbb{Z}$ となる 10 個の $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (W)$ は恒等的に零ではなく、 $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} ({}^t W) = \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (W)$ をみたし

$$\Gamma(1+i) = \left\{ g \in GL(4, \mathbb{Z}[i]) \mid g^* J g = J = \begin{pmatrix} O & I_2 \\ -I_2 & O \end{pmatrix}, \quad g \equiv I_4 \pmod{1+i} \right\}$$

の元 $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ に対し

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (g \cdot W)^2 = \det(g) \det(CW + D)^2 \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (W)^2, \quad g \cdot W = (AW + B)(CW + D)^{-1},$$

をみたす。そして以下の Jacobi's identity に対応する関係式をみたす。

$$(3) \quad \sum_{\substack{a, b \in \{0, 1/(1+i)\}^2 \\ a^* b \in \mathbb{Z}}} \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (W)^2 \exp\{2\pi i(d^* a + c^* b)\} = 0$$

ここで c, d は $\{0, 1/(1+i)\}^2$ の元で $c*d \notin \mathbb{Z}$ となるもので6通りあるが、このうち独立な関係式は5個である。これらのことから $\Gamma(1+i)$ と transpose operator とで生成される群を $\langle \Gamma(1+i), {}^t \rangle$ とすると、写像 $\theta: H_2/\langle \Gamma(1+i), {}^t \rangle \rightarrow \mathbb{P}^9$

$$\theta: H_2/\langle \Gamma(1+i), {}^t \rangle \ni W \mapsto [\dots, \theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (W)^2, \dots] \in \mathbb{P}^2$$

が well-defined であり、しかも $H_2/\langle \Gamma(1+i), {}^t \rangle$ をうまく compact 化したものと $\mathbb{P}^9$ 内の (3) の式で定まる空間 $Y (\simeq \mathbb{P}^4)$ との同型写像となっている。

一方 $\mathbb{P}^2$ 上の順序づけられた一般の位置にある六本の直線の配置空間 $X(3,6)$ は、以下のような商集合で定義される

$$X(3,6) = GL(3, \mathbb{C}) \backslash M(3,6) / \mathbb{C}^{*6},$$

$$M(3,6) = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_{00} & \cdots & x_{05} \\ x_{10} & \cdots & x_{15} \\ x_{20} & \cdots & x_{25} \end{pmatrix} \mid x\langle jkl \rangle = \begin{vmatrix} x_{0j} & x_{0k} & x_{0l} \\ x_{1j} & x_{1k} & x_{1l} \\ x_{2j} & x_{2k} & x_{2l} \end{vmatrix} \neq 0 \quad 0 \leq j < k < l \leq 5 \right\}.$$

であり、

$$g \in GL(3, \mathbb{C}) : x \mapsto gx, \quad (h_0, \dots, h_5) \in \mathbb{C}^{*6} : x \mapsto x \text{diag}(h_0, \dots, h_5),$$

が $GL(3, \mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^{*6}$ の作用である。 $X(3,6)$ を S_6 の作用がよくみえる形で $\mathbb{P}^9$ 内に実現することが以下のようにできる。写像 $\iota: M(3,6) \rightarrow \mathbb{P}^9$

$$\iota: M(3,6) \ni x \mapsto [\dots, x\langle jkl \rangle x\langle pqr \rangle, \dots] \in \mathbb{P}^9, \quad \{jkl\} \cup \{pqr\} = \{0, \dots, 5\}$$

は、 $GL(3, \mathbb{C})$ と $\mathbb{C}^{*6}$ の作用で不変であるので写像 ι は $X(3,6)$ から $\mathbb{P}^9$ への写像と考えられる。この写像は $X(3,6)$ と像 $\iota(X(3,6)) \subset \mathbb{P}^9$ との 2:1 の写像であるが、像 $\iota(X(3,6))$ は、Plücker's relations で定まる $\mathbb{P}^9$ 内の $\mathbb{P}^4$ と同型なところに含まれ、これが丁度 (3) がきめる空間 Y と一致する。つまり $X(3,6)$ が Y からいくつかの divisors を除いたものの double cover となっている。

$X(3,6)$ から $H_2/\langle \Gamma(1+i), {}^t \rangle$ への対応は、 $\mathbb{P}^2$ 上の与えられた六直線の配置で分岐する $\mathbb{P}^2$ の double cover で K3 曲面を作り、その K3 曲面の周期の比をとる周期写像で与えられる。周期写像は多価関数であるがそのモノドロミー群が $\langle \Gamma(1+i), {}^t \rangle$ の index 2 の部分群となっている。

References.

- [DO] Dolgachev I. and Ortland D., Points sets in projective spaces and theta functions, *Asterisque* **165**, (1988).
- [Fr] Freitag E., Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Graußchen Zahlkörper, *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss.* **1**, 1–49, (1967).
- [Ig] Igusa J., On Siegel modular forms of genus two I, II, *Am. J. Math.* **84**, 175–200, (1962), **86**, 392–412, (1964).
- [KS] Kuga M. and Satake I., Abelian varieties attached to polarized K_3 -surfaces, *Math. Ann.* **169**, 239–242, (1967).

- [MSY] Matsumoto K., Sasaki T. and Yoshida M., The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the hypergeometric function of type $(3, 6)$, Int. J. Math. **3**, 1–164, (1992).
- [Ma] Matsumoto K., Theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces, Math. Ann. **295**, 383–409, (1993).
- [Mu] Mumford D., Tata lectures on theta I, II, Boston, Birkhäuser, 1983, 1984.