

正則有向グラフにおける直径最小化の効果

日本電信電話公社 武蔵野研究所

曾根岡 昭直 (Terunao Soneoka)

今瀬 真 (Makoto Imase)

1. まえがき

通信網、計算機網を設計する手段としてグラフがよく用いられる。これらの網を設計する際、網の効率（トラヒック疎通能力）、信頼性、障害耐力を考慮する必要がある。グラフ上では、効率は直径で、信頼性は連結度で、障害耐力は直径罹障度 [1] で評価できる。直径罹障度は交換局（点）や回線（枝）の障害時に迂回経路の長さが平常時の経路の長さより長くなることに起因する罹障時の網の効率の劣化を表わしている。

本稿では、点数 n 、最大次数 d の有向グラフを対象とし、そのなかで直径が最小なグラフの連結度及び直径罹障度について述べる。

2 章では、直径、連結度、直径罹障度を定義し、それぞれの尺度の極値問題（直径最小化問題、連結度最大化問題、直径罹障度最小化問題）を定義する。また直径最小有向グラフの構成法についてまとめる。

3 章では、文献 [2] で明らかにした正則有向グラフの直径と連結度の関係、即ち直径最小化により連結度も最大化される傾向のあることを述べる。

4 章では、正則有向グラフの直径と直径罹障度の関係式を示し、直径最小化により直径罹障度も最小化される傾向のあることを述べる。また直径最小である de Bruijn グラフ、拡大完全グラフの直径罹障度が最小であることを示す。

2. 極値問題と直径最小グラフ

本稿では、有向グラフ $G = (V, E)$ (V は点集合、 E は有向枝の集合) を扱う。

2. 1. 直径最小化問題

ネットポロジの効率の尺度として直径がよく用いられる。直径は、任意の 2 点間の最大距離（最大中継段数）であり、次式で定義される。

$$k(G) = \max_{u, v \in V(G)} \text{dis}(u, v)$$

($\text{dis}(u, v)$ は点 u から点 v への距離である。)

但し、強連結でないグラフの直径は無限大 (∞) とする。

網における最大中継段数を小さく押えることは、伝送遅延や接続遅延を小さくすることになる。また、呼びを運ぶコストはその中継段数に比例していると考えられ、経済面からも中継段数を小さくすることは有効であり、直径は網の効率をよく反映した評価尺度である。効率の良い網トポロジーを求める問題として、次の直径最小化問題が考えられている。

<直径最小化問題>

点数 n 、入次数、出次数 d 以下（各点の入枝及び出枝の本数が d 以下）のグラフ全体の集合を $H(n, d)$ とする。 $H(n, d)$ に含まれるグラフのうちで直径最小のグラフを求める。直径 $k(G)$ の下界値は次式で与えられる。[3], [6]

$$k(G) \geq \lceil \log_d (nd - n + 1) \rceil - 1$$

但し、 $\lceil x \rceil$ は x の切り上げを表わす。

また直径最小化問題は、 (d, k) 問題と密接に関連する。 (d, k) 問題とは、上記問題とは逆に、最大次数 d と直径 k を与えて、最大の点数のグラフ（ここでは稠密なグラフと呼ぶ）を求める問題であり、点数 n の上界は次式で与えられる。

$$n \leq 1 + d + d^2 + \dots + d^k = \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1} \quad (1)$$

(1) 式の等号が成立するグラフは有向ムーアグラフと呼ばれ、(1) の右辺の値を有向ムーア上界値と言う。有向ムーアグラフは完全グラフかループ以外には存在しないことが知られている。[3]

<直径最小グラフ構成法>

直径最小化問題の準最適解として次の2つの構成法が知られている。[2]

(1) 順回転グラフ $G_b(n, d)$

本グラフは次の点集合 V 、有向枝集合 E で与えられる。

$$V = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$E = \{(u, v) \mid v \equiv u \cdot d + a \pmod{n}, a=0, 1, \dots, d-1\}$$

このグラフの直径は $\lceil \log_d n \rceil$ である。

特に点数 $n = d^k$ のとき de Bruijn グラフと呼ばれている。[4]

(2) 逆回転グラフ $G_i(n, d)$

本グラフは次の点集合 V 、有向枝集合 E で与えられる。

$$V = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$E = \{(u, v) \mid v \equiv -u \cdot d - b \pmod{n}, b=1, 2, \dots, d\}$$

点数 $n = d^p + d^{p-q}$ (p は自然数、 q は p 以下の奇数) のとき、このグラフの直径は $\lceil \log_d n \rceil - 1$ であり、その他の点数のとき、直径は $\lceil \log_d n \rceil$ である。この構成法は Reddy, Pradhan [5] による点数 $n = d^k + d^{k-1}$ の場合のグラフの構成法（拡大完全グラフと呼ぶ）の一般化である。

図1に $G_b(7,2)$ と $G_i(9,2)$ を示した。 $G_b(n,d)$ 、 $G_i(n,d)$ の直径はどちらも理論的最小値かそれより高々1大きい。また $G_b(d^k,d)$ 、 $G_i(d^k+d^{k-1},d)$ は線グラフ変換の繰り返しにより構成される。[6]

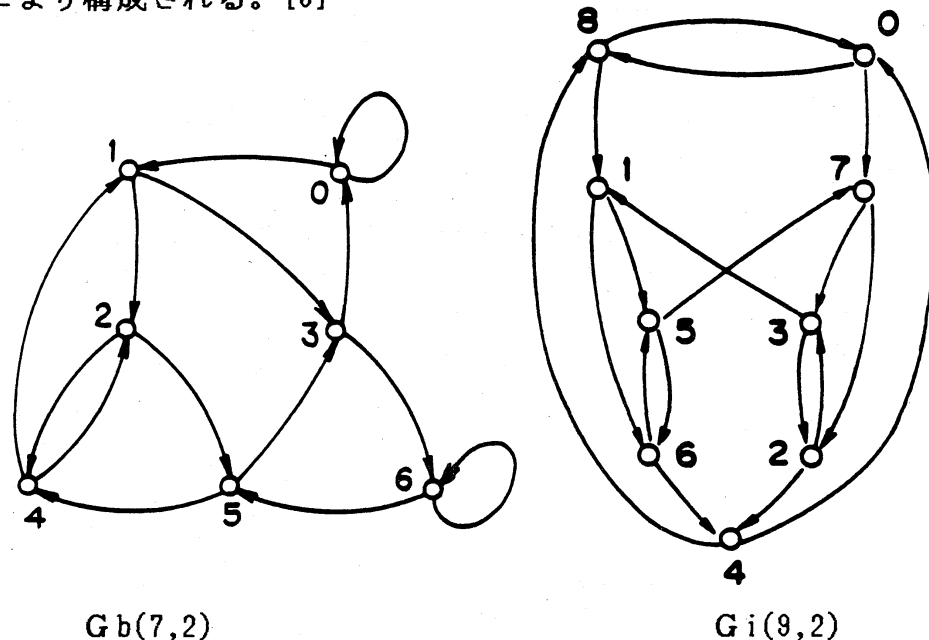


図1 順回転グラフ $G_b(7,2)$ 、逆回転グラフ $G_i(9,2)$

2.2 連結度最大化問題

網の信頼性の尺度として連結度が良く用いられる。グラフ G の点連結度 $C_n(G)$ （枝連結度 $C_e(G)$ ）とは、強連結でないグラフ又は点1つのみからなるグラフをつくるために、グラフ G から除去すべき点（枝）の最小個数であり、グラフ G 上の任意の点間の独立な（点、枝を共有しない）径路数の最小値をも表わしている。

<連結度最大化問題>

点数 n 、最大次数 d のグラフの集合 $H(n,d)$ のうち連結度最大のグラフを求める。

点連結度 $C_n(G)$ 、枝連結度 $C_e(G)$ の上界は次で与えられる。

$$C_n(G) \leq C_e(G) \leq d$$

連結度最大のグラフは、次数 d の正則グラフ(d -正則グラフ)のなかにあるが、 d -正則グラフのなかでどのようなグラフが連結度最大となるかが問題である。

2.3 直径罹患度最小化問題

一般に、交換局や回線の障害時には網の効率が低下する。これは、迂回径路の長さが平常時の径路の長さに比べ長いことによる。このような局または回線の故障時の網の効率を評価する尺度として、直径罹患度が提案されている。[1],[7]

グラフ G の s -点（枝）直径罹患度 $K_n(s;G)$ ($K_e(s;G)$)とは、 G より任意の s 個（本

) の点 (枝) を除去したグラフの直径の最大値である。

$$K_n(s; G) = \max_{|V_{\text{sub}}|=s} k(G - V_{\text{sub}})$$

$$K_e(s; G) = \max_{|E_{\text{sub}}|=s} k(G - E_{\text{sub}})$$

$K_n(0; G)$ は直径 $k(G)$ に等しく、また $K_n(s; G) = \infty$ となる s は点連結度に等しいことから、直径罹障度は直径と連結度の二つの概念を統合したものと言える。

点直径罹障度と枝直径罹障度の間には次の関係が成立する。[1]

[性質 1] $K_e(s; G) \leq K_n(s; G) + 1$

<直径罹障度最小化問題>

点数 n 、最大次数 d のグラフの集合 $H(n, d)$ のうち直径罹障度最小のグラフを求める。 s 点 (枝) 直径罹障度 $K_n(s; G)$ の下界は次式で与えられる。[1]

$$K_n(s; G) \geq \lceil \log_d((s+1)(n-1-d)(d-1)+d^2) \rceil - 1 \triangleq L_n(s, n, d) \quad (\text{但し } s \leq C_n - 1, n > 1+d)$$

$$K_e(s; G) \geq \lceil \log_d((s+1)(n-1)(d-1)+d) \rceil - 1 \triangleq L_e(s, n, d) \quad (\text{但し } s \leq C_e - 1)$$

(2)

3. 直径最小グラフの連結度

本章では、文献[2]で明らかにした結果、即ち有向グラフ $G \in H(n, d)$ の直径と連結度の関係及び直径最小有向グラフの連結度についてまとめる。

[定理 1] $G \in H(n, d)$ の点連結度 C_n 、枝連結度 C_e と直径 k の間には、次の関係が成立する。

$$C_n \geq \frac{(n-d)(d-1)}{d^k - 1} \quad (\text{但し } k \geq 2, C_n \neq 0)$$

$$C_e \geq \min\left\{\frac{(n-d)(d-1)}{d^{k-1} + d - 2}, \delta\right\} \quad (\text{但し } C_e \neq 0, C_e < \text{最小次数 } \delta)$$

本定理は、直径最小化を行えば、連結度は自動的に最大値に近づくことを示している。また本定理から直接次の系が得られる。

[系 1] 直径 k の有向グラフ $G \in H(n, d)$ の点数 n が次の範囲なら、点連結度は最大値 d をとる。

$$n > d^k + d - 1$$

直径 k の有向グラフ $G \in H(n, d)$ が正則で、点数 n が次の範囲なら、枝連結度は最大値 d をとる。

$$n > d^{k-1} + 2d - 2$$

この系は、最大次数 d と直径 k を与えて、点数 n が有向ムーア上界値に近づけば連結度も最大化されることを示している。

この定理を応用して直径が準最小な順回転グラフ $G_b(n, d)$ 、逆回転グラフ $G_i(n, d)$

の点連結度が準最大であることが示せる。

$$[\text{系 } 2] \quad C_n(G_b(n,d)) \geq d-1, \quad C_n(G_i(n,d)) \geq d-1$$

4. 直径最小有向グラフの直径罹障度

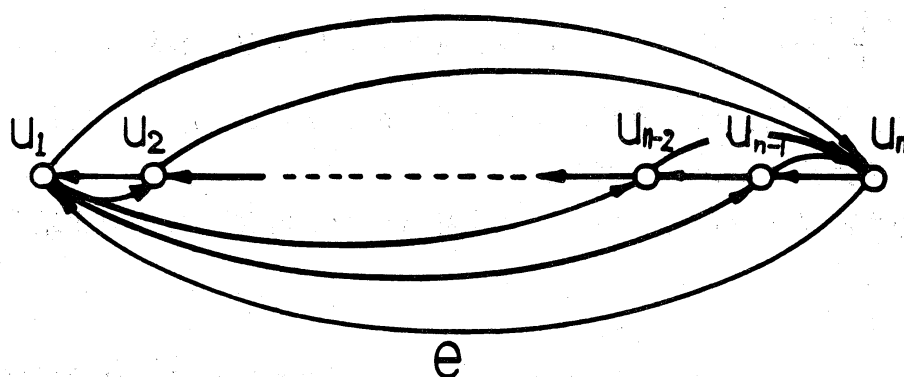
4.1.では、直径最小化と連結度最大化の関係と同様に、直径最小化により直径罹障度最小化も図れることを示す。即ち、最大次数 d 、直径 k を与えたとき、点数 n が有向ムーア上界値に近づくほど、1点除去時の直径罹障度 $K_n(1;G)$ も小さくなることを示す。さらに4.2.で直径最小であるde Bruijn グラフ $G_b(d^k, d)$ 、拡大完全グラフ $G_i(d^k + d^{k-1}, d)$ の点(枝)直径罹障度 $K_n(s;G)$ ($Ke(s;G)$) が最小であることを示す。

4.1. 直径と直径罹障度の関係

一般のグラフの直径罹障度については以下のことがなりたっている。無向グラフの枝直径罹障度についてPlesnik [7] は『枝を1本除去した無向グラフの直径は無限大かもとのグラフの直径の二倍以下であること』を示している。しかしながら、有向グラフについては『枝を1本除去したグラフの直径は、たとえ強連結でも $n-1$ まで大きくなりうる』ことが図2の例からわかる。また点直径罹障度については、Chung & Garey [8] により、有向グラフ、無向グラフによらず、次の性質が示されている。

[性質 2] 点数 n のグラフ G が λ -点連結なら、 G から t 個の点を除去したグラフ G' の直径は次式を満たし、この上界は実現される。

$$k(G') \leq \left\lceil \frac{n-t-2}{\lambda-t} \right\rceil + 1$$



点数 n
 $k(G)=3$
 $Ke(1;G)=n-1$

図2 1本の枝 e を除去して、直径が $n-1$ となる例

次の定理は、最大次数 d 、直径 k を与えたとき、点数 n が有向ムーア上界値に近づくほど、1点除去時の直径罹障度 $K_n(1;G)$ が小さくなることを示している。

[定理 2] 最大次数 d 、直径 k の有向グラフ G の点数 n が

$$n \geq d^m + d^{m+1} + \dots + d^k \quad (0 \leq m \leq k-1) \quad \text{ならば、}$$

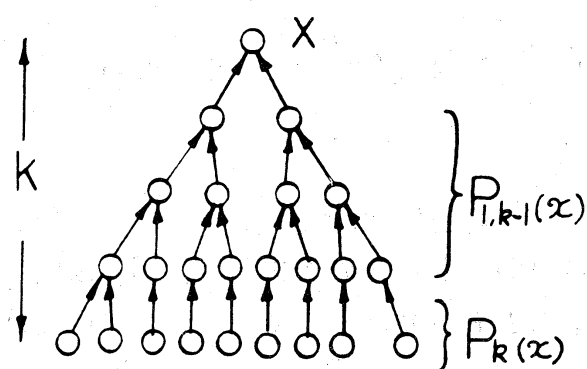
$$Kn(1;G) \leq \begin{cases} k+1 & m=0 \text{ (但し } d \geq 2 \text{)} \\ k+m & 1 \leq m \leq k-1 \text{ (但し } d \geq 3 \text{)} \end{cases}$$

である。

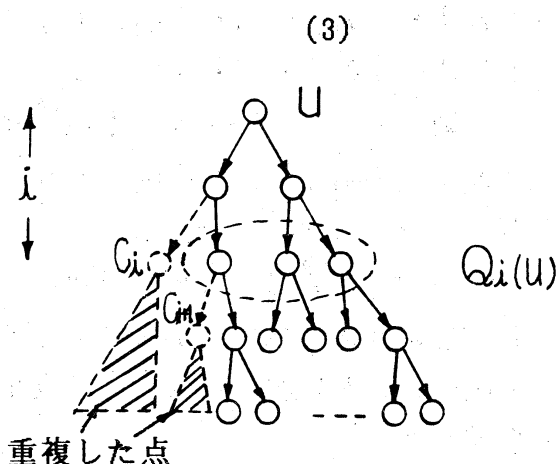
[証明] グラフ G から除去する点を x とする。 x への高さ最小 (高さ k) の入りスパニング 트리 $T_x(G)$ を考える。(図 3 (a) 参照) x への最短距離が k である点の集合を $P_k(x)$ とする。 $P_k(x)$ と x 以外の点の集合を $P_{1,k-1}(x)$ とする。

点集合 $P_{1,k-1}(x)$ への入枝のうち、スパニング 트리 $T_x(G)$ で使われていない枝の本数 e は、次式を満たす。

$$e \leq 1+d+\dots+d^k - n$$

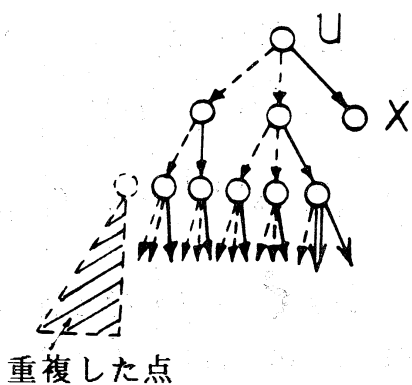


(a) スパニング 트리 $T_x(G)$



(重複した点 (スパニング 트리には含まれない点))

(b) スパニング 트리 $T_u(G)$



(c) スパニング 트리 $T_u(G-x)$

Q_0^x
 Q_1^x
 Q_2^x

→ : スパニング 트리 $T_x(G)$ で使われている枝
 ---→ : 点集合 $P_{1,k-1}(x)$ への入枝のうちスパニング 트리 $T_x(G)$ で使われていない枝
 ⇨ : 点集合 $P_k(x)$ へ入る枝

図 3 定理 2 の証明のための説明図

$P_k(x)$ に含まれる点は、 x が障害しても、他の全ての点へ距離 k 以内で到達できるので、以下では x を除去したグラフ $G-x$ において、 $P_{1,k-1}(x)$ に含まれる任意の点から、点集合 $P_k(x)$ への距離をみつめる。

グラフ G における $P_{1,k-1}(x)$ の任意の点 u からの高さ最小のスパニング 트리を $T_u(G)$ 、グラフ $G-x$ における $P_{1,k-1}(x)$ の任意の点 u からの高さ最小のスパニング 트리

-を $T'u(G-x)$ とする。 $T'u(G)$ において点 u から丁度距離 i で到達する点の集合を $Q_i(u)$ とし、 $T'u(G-x)$ において点 u から丁度距離 i で到達する点の集合を $Q_i^x(u)$ とする。

$Q_i(u)$ の点数は次を満たす。(図 3 (b) 参照)

$$\begin{aligned}
 |Q_0| &= 1 \\
 |Q_0| + |Q_1| &= 1+d \\
 |Q_0| + |Q_1| + \dots + |Q_{i-1}| &= 1+d+\dots+d^{i-1} \\
 |Q_0| + |Q_1| + \dots + |Q_{i-1}| + |Q_i| &\geq 1+d+\dots+d^i - C_i \\
 |Q_0| + |Q_1| + \dots + |Q_{i+1}| &\geq 1+d+\dots+d^{i+1} - C_i - (C_i \cdot d + C_{i+1}) \\
 |Q_0| + |Q_1| + \dots + |Q_{k-1}| \\
 &\geq |Q_0| + \dots + |Q_{k-2}| + d^{k-1} - (C_i \cdot d^{k-1-i} + C_{i+1} \cdot d^{k-2-i} + \dots + C_{k-1}) \\
 |Q_0| + |Q_1| + \dots + |Q_k| &= n \\
 \text{但し } 1+d+\dots+d^k &= n \\
 &= C_i \cdot (1+d+\dots+d^{k-i}) + \dots + C_{\alpha} \cdot (1+d+\dots+d^{k-\alpha}) + \dots + C_{k-1} \cdot (1+d) + C_k \quad (4)
 \end{aligned}$$

各 C_{α} は α が小さい方からできる限り大きい値をとるものとする。($C_{\alpha} \geq 0$)

$T'u(G-x)$ においては、 u の子が点 x であることもありうるので、各 $|Q_i^x(u)|$ は以下を満たす。

$$\begin{aligned}
 |Q_0^x| &= 1 \\
 |Q_0^x| + |Q_1^x| &\geq 1+(d-1) \\
 |Q_0^x| + |Q_1^x| + \dots + |Q_{i-1}^x| &\geq 1+(d-1) \cdot (1+d+\dots+d^{i-2}) \\
 |Q_0^x| + |Q_1^x| + \dots + |Q_{i-1}^x| + |Q_i^x| &\geq 1+(d-1) \cdot (1+d+\dots+d^{i-1}) - C_i \\
 |Q_0^x| + |Q_1^x| + \dots + |Q_{i+1}^x| &\geq 1+(d-1) \cdot (1+d+\dots+d^i) - C_i - (C_i \cdot d + C_{i+1}) \\
 |Q_0^x| + |Q_1^x| + \dots + |Q_{k-1}^x| \\
 &\geq |Q_0^x| + \dots + |Q_{k-2}^x| + (d-1)d^{k-2} - (C_i \cdot d^{k-1-i} + C_{i+1} \cdot d^{k-2-i} + \dots + C_{k-1}) \\
 |Q_0^x| + |Q_1^x| + \dots + |Q_k^x| &\geq n - (1+d+\dots+d^{k-1}) \quad (5)
 \end{aligned}$$

点 u 及び u の子孫の点の出枝のうち一本は、 x へのスパニングトリー $T_x(G)$ で使われた枝であり、残りの枝は、前述の本数 e の点集合 $P_{1,k-1}(x)$ への入枝のうちスパニングトリー T_x で使われていない枝か、点集合 $P_k(x)$ への入枝である。(図 3 (c))

従って、 e が次式を満たしていれば、点 x を除去したグラフ $G-x$ において、任意の点 $u \in P_{1,k-1}(x)$ から距離 j 以内で点集合 $P_k(x)$ のある点へ到達し、任意の点へ距離 $k+j$ 以内で到達する。

$$e + 1 \leq |Q_0^x| + \dots + |Q_j^x| - (|Q_0^x| + \dots + |Q_{j-1}^x|) \quad (6)$$

いま、 $n \geq d^m + d^{m+1} + \dots + d^k$ ($0 \leq m \leq k-1$) とする。(3) より、

$$e \leq \begin{cases} 1+d+\dots+d^{m-1} & m \geq 1 \\ 0 & m=0 \end{cases}$$

(4) より $C_{k-m+1} = 1$, その他の α に対して $C_\alpha = 0$

(5) より $|Q\tilde{0}| + \dots + |Q\tilde{j}| \geq \begin{cases} d^j & j \leq k-m \\ d^j - (1+d+\dots+d^{j-(k-m+1)}) & j \geq k-m+1 \end{cases}$

よって、 $\begin{cases} m=0 \text{ のとき} & 1 \leq (d-1)d^{j-1} \\ m \geq 1 \text{ のとき} & 2+d+\dots+d^{m-1} \leq \begin{cases} (d-1)d^{j-1} & j \leq k-m \\ ((d-1)d^{j-1} - d^{j-(k-m+1)}) & j \geq k-m+1 \end{cases} \end{cases}$

であれば、式(6)を満たす。即ち、

$$\begin{cases} m=0 \text{ のとき、} j=1 & (d \geq 2) \\ 1 \leq m \leq k-1 \text{ のとき、} j=m & (d \geq 3) \end{cases}$$

である。

Q.E.D.

この定理から、直径最小化により直径羅障度も最小化される傾向のあることがわかる。

4.2. de Bruijn グラフ、拡大完全グラフの直径羅障度

直径最小である de Bruijn グラフ $G_b(d^k, d)$ 、拡大完全グラフ $G_i(d^k + d^{k-1}, d)$ は、それぞれ完全グラフ K_d の各点に自己ループを付加したグラフ K_d' 、完全グラフ K_{d+1} に $(k-1)$ 回線グラフ変換を繰返して構成される。線グラフ変換は、グラフ G を次の手順によって $L(G)$ に写す変換である。

- (手順1) G の枝に対して、 $L(G)$ の点を 1 対 1 に対応させる。
- (手順2) $L(G)$ の任意の二つの点 v_1, v_2 に対して、 G において v_1 に対応する枝の終点と v_2 に対応する枝の始点が一致する時に限り、 $L(G)$ の v_1 から v_2 へ枝を付加する。

図4に K_3' を線グラフ変換した結果を示す。

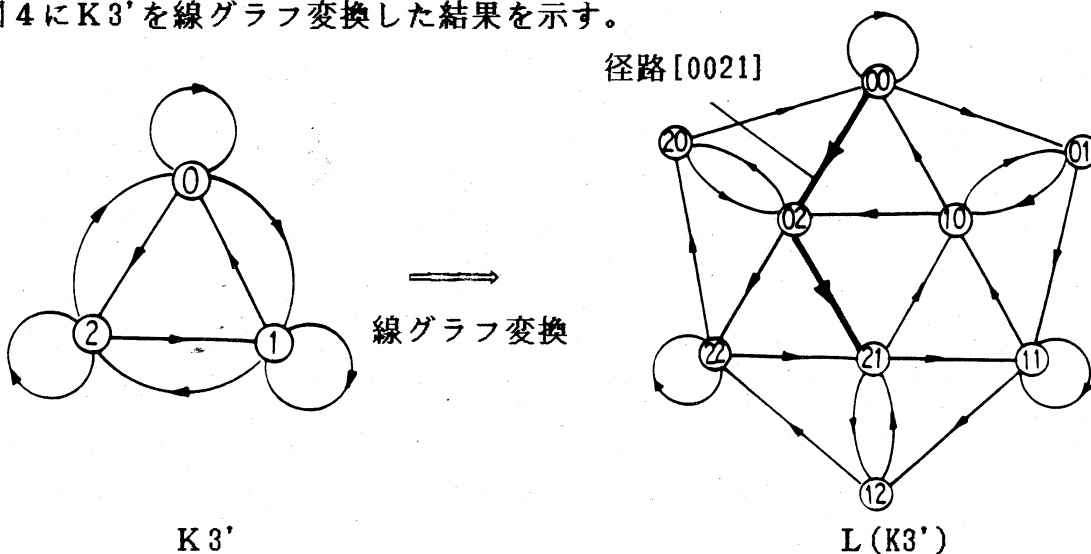


図4 K_3' の線グラフ変換

文献[1], [9] では拡大完全グラフの点直径羅障度について述べている。文献[1] の

証明では線グラフの性質を陽に用いていず、文献[9]では具体的な径路の選び方が不明確である。以下では、線グラフの性質を使ってde Bruijnグラフの直径羅障度が最小であることを示す。具体的な径路をも示すため、まずde Bruijnグラフのシフトレジスタ表現について述べる。

シフトレジスタ表現

$G_b(d^k, d)$ の点は、 $G_b(d^k, d)$ が線グラフの繰返しで構成されていることから、 k 桁、 d 進数 $(a_1, \dots, a_k)$ (但し $a_i \in \{0, 1, \dots, d-1\}$) で表現できる。また各点 $(a_1, \dots, a_k)$ から d 個の点 $(a_2, \dots, a_{k+1})$ へ有向枝があり、枝は $k+1$ 桁、 d 進数 $\langle a_1, \dots, a_{k+1} \rangle$ で表現できる。このように点を表現すると、点 u から点 v への距離が h ($1 \leq h \leq k$) であれば、 u の最後の $k-h$ 桁と v の最初の $k-h$ 桁は一致する。

$$\begin{cases} u = (a_h, \dots, a_1, c_1, \dots, c_{k-h}) \\ v = (c_1, \dots, c_{k-h}, b_1, \dots, b_h) \end{cases} \quad (7)$$

従って、長さ h の径路は $k+h$ の系列 $[a_h, \dots, a_1, c_1, \dots, c_{k-h}, b_1, \dots, b_h]$ で表現できる。例えば、図4の $L(K_d')$ において、点(00)から点(21)への最短径路(長さ2)は[0021]となる。この系列を最上位の桁から2桁ずつの組で見えていくと、この径路は点(00)→点(02)→点(21)であり、どの点を経由しているかがわかる。

直径羅障度

[定理 3] de Bruijn グラフ $G_b(d^k, d)$ の直径羅障度は最小である。即ち、

$$K_n(s; G_b) = K_e(s; G_b) \leq k+1 = L_n(s, d^k, d) = L_e(s, d^k, d) \quad (s \leq d-1)$$

[証明] $G_b(d^k, d)$ の距離 h である任意の2点 u から v (式(7)参照)への径路を次のようにとる。

1本の最短径路

$$P(k) = [a_h, \dots, a_1, c_1, \dots, c_{k-h}, b_1, \dots, b_h]$$

(d-2)本の長さ(k+1)の径路

$$Q_s(k) = [a_h, \dots, a_1, c_1, \dots, c_{k-h}, x_s, c_1, \dots, c_{k-h}, b_1, \dots, b_h] \quad (s=1, \dots, d-2)$$

但し、 $x_1, \dots, x_{d-2}, a_1, b_1$ は互いに異なる。

以下では命題『径路 $P(k), Q_s(k)$ が互いに点独立かつ枝独立である』を直径 i に関する数学的帰納法で示す。

明らかに $i=1$ のときは成立する。いま、上記命題が $i \leq k-1$ で成立すると仮定する。 u, v を $G_b(d^k, d)$ の2点とすると、 $G_b(d^{k-1}, d)$ にはそれらに対応する2本の枝 $\langle q_1, q_2 \rangle, \langle q_3, q_4 \rangle$ がある。但し $q_1 = (a_h, \dots, a_1, c_1, \dots, c_{k-h-1})$ 、 $q_2 = (a_{h-1}, \dots, a_1, c_1, \dots, c_{k-h})$ 、 $q_3 = (c_1, \dots, c_{k-h}, b_1, \dots, b_{h-1})$ 、 $q_4 = (c_2, \dots, c_{k-h}, b_1, \dots, b_h)$ である。

(場合1) $q_2 \approx q_3$

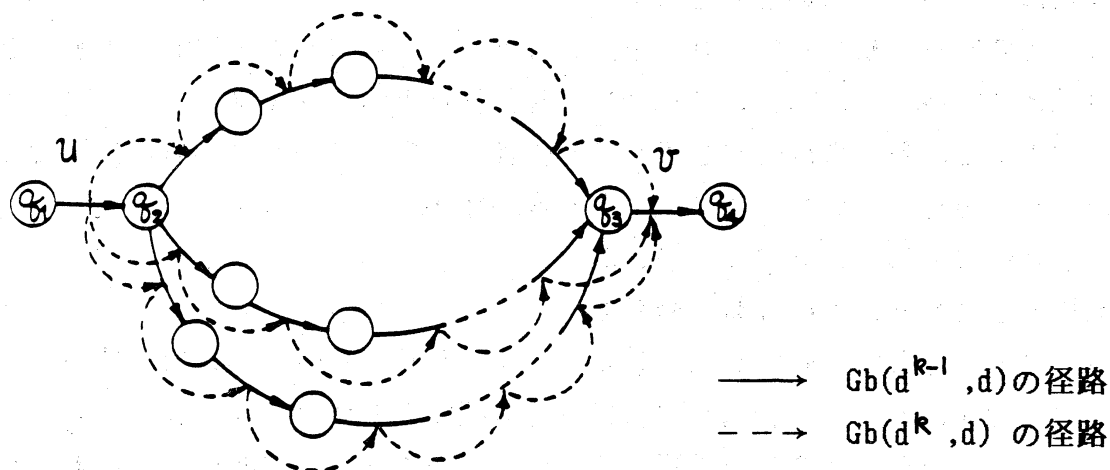
$G_b(d^{k-1}, d)$ 上で q_2 から q_3 への $(d-1)$ 本の径路

$$P(k-1) = [a_{h-1}, \dots, a_1, c_1, \dots, c_{k-h}, b_1, \dots, b_{h-1}]$$

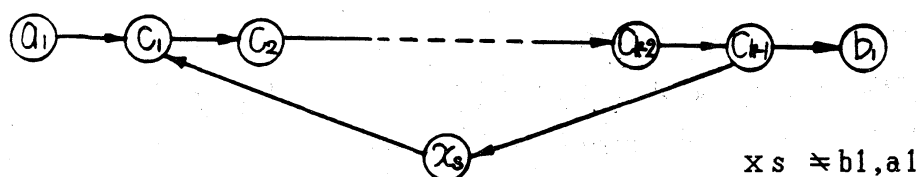
$$Q_s(k-1) = [a_{h-1}, \dots, a_1, c_1, \dots, c_{k-h}, x_s, c_1, \dots, c_{k-h}, b_1, \dots, b_{h-1}] \quad (s=1, \dots, d-2)$$

但し、 $x_1, \dots, x_{d-2}, a_1, b_1$ は互いに異なる。

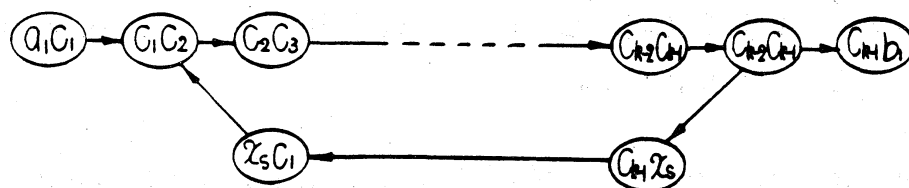
は枝独立であるから、図5(a)に示すように明らかに $G_b(d^k, d)$ 上の点 u から点 v へ、要求された長さの $(d-1)$ 本の径路 $P(k)$ 、 $Q_s(k)$ は点独立かつ枝独立である。



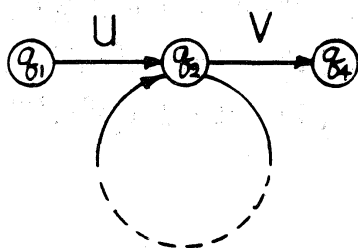
(a) $q_2 \neq q_3$ の場合



(b) $G_b(d, d)$



(c) $G_b(d^2, d)$



(d) $G_b(d^{k-1}, d)$

図5 $G_b(d^k, d)$ の点 $u=(q_1, q_2)$ から点 $v=(q_3, q_4)$ への d 本の点(枝)独立な径路

(場合 2) $q_2 = q_3$

この場合、 $v = (c_1, \dots, c_{k-1}, b_1)$ は $u = (a_1, c_1, \dots, c_{k-1})$ の子である。

$G_b(d, d)$ (図 5 (b) 参照) において、点 c_{k-1} から点 c_1 への $(d-2)$ 本の径路

$$Q_s(1) = [c_{k-1}, x_s, c_1] \quad \text{但し、} x_s (s=1, \dots, d-2), a_1, b_1 \text{ は互いに異なる。}$$

は枝独立であり、次の性質を満たす。

(i) どの径路も枝 $\langle c_{k-1}, b_1 \rangle$ から始まったり、枝 $\langle a_1, c_1 \rangle$ で終わったりしない。

(ii) どの径路も $[a_1, c_1, \dots, c_{k-1}, b_1]$ を部分径路として含まない。

このことから、 $G_b(d, d)$ を線グラフ変換した $G_b(d^2, d)$ (図 5 (c)) で点 (c_{k-2}, c_{k-1}) から点 (c_1, c_2) への $(d-2)$ 本の径路

$$Q_s(2) = [c_{k-2}, c_{k-1}, x_s, c_1, c_2]$$

は枝独立であり、次の性質を満たす。

(i) どの径路も枝 $\langle c_{k-2}, c_{k-1}, b_1 \rangle$ から始まったり、枝 $\langle a_1, c_1, c_2 \rangle$ で終わったりしない。

(ii) どの径路も $[a_1, c_1, \dots, c_{k-1}, b_1]$ を部分径路として含まない。

同様に、線グラフ変換を繰返し施した $G_b(d^{k-1}, d)$ (図 5 (d)) において、点 q_2 を含んだ $(d-2)$ 本の閉路

$$Q_s(k-1) = [c_1, \dots, c_{k-1}, x_s, c_1, \dots, c_{k-1}]$$

は枝独立であり、次の性質を満たす。

(i) どの閉路も枝 v から始まったり、枝 u で終わったりしない。

(ii) どの閉路も $[u, v]$ を部分径路として含まない。

従って、 $G_b(d^k, d)$ の隣接する 2 点 u, v 間の $(d-1)$ 本の径路 $P(k), Q_s(k)$ は点独立であり、また上記性質 (i) (ii) から枝独立でもある。以上より、de Bruijn グラフ $G_b(d^k, d)$ の直径罹障度 $K_n(s; G_b) = K_e(s; G_b) \leq k+1$ であり、前述の下界値 $L_n(s, d^k, d)$ に一致することが示された。

Q.E.D.

同様にして、拡大完全グラフ $G_i(d^k + d^{k-1}, d)$ が最小であることも示せる。(但し $s = d-1$ のときは下界値より高々 1 大きい。) [1], [9]

[定理 4] 拡大完全グラフ $G_i(d^k + d^{k-1}, d)$ の直径罹障度は次を満たす。

$$K_n(s; G_i) = K_e(s; G_i) \leq \begin{cases} k+1 = L_n(s, d^k + d^{k-1}, d) & (s=1, \dots, d-2) \\ k+2 = L_n(d-1, d^k + d^{k-1}, d) + 1 & (s=d-1) \end{cases}$$

5. むすび

直径最小化により、即ち最大次数 d と直径 k を与えて、点数 n がムーア上界値に近づくほど、連結度最大化ばかりでなく、直径罹障度も最小化される関係を示した。また直径最小である de Bruijn グラフ、拡大完全グラフの点 (枝) 直径罹障度が最小で

あることを示した。

残された課題として、次が考えられる。

- (1) 順回転グラフ $G_b(n,d)$ 、逆回転グラフ $G_i(n,d)$ の直径罹患度を任意の点数で求める。
- (2) 一般に、点（枝）が障害となった時、その点（枝）を通過していたメッセージが迂回するため、他の点や枝の負荷が増大する。この迂回が特定の点または枝に集中すると、輻輳の原因となる。この現象を評価する尺度として、予稿集では点負荷増加量を提案した。直径最小化グラフでは点負荷増加量も小さいことが予想される。これを理論的に明らかにする必要がある。

参考文献

- [1] 今瀬，曾根岡，岡田：“拡大完全グラフにおける節点除去時の直径増加量とルーチング”，信学技報，CAS83-115，pp.35-40，(Sept.1983)
- [2] 曾根岡，今瀬，岡田：“直径が小さい正則有向グラフの連結度について”，信学技報，CAS83-114，pp.29-34，(Sept.1983)
- [3] Bridge, W.G.: "On the Impossibility of Directed Moore Graphs", Journal of Combinatorial Theory, Series B29, pp.339-341, (1980).
- [4] De Bruijn, N.G.: "A combinatorial problem", in Proc. Akademie Van Wetenschappen, vol.49, part 2, pp.758-764, (1946).
- [5] Reddy, S.M. and Pradhan, D.K. and Kuhl, J.G.: "Directed graphs with minimum diameter and maximum node connectivity", School and Engineering, Oakland Univ., Tech. Rep. (July 1980)
- [6] 今瀬，伊藤，岡田：“直径が準最小な正則有向グラフ構成法”，信学技報，CAS82-84，pp.101-107，(1982)
- [7] Plesnik: "Note on Diametrically Critical Graphs", in recent advances in graph theory, Proc. Symp. Prague, Academia Prauge, pp. 455-465, (1975)
- [8] Chung, F.R.K. & Garey, M.R.: "Diameter Bounds for Altered Graphs", to appear
- [9] Reddy, S.M., Kuhl, J.G., Hosseini, S.H. and Lee, H.: "On Digraphs with Minimum Diameter and Maximum Connectivity", Proceedings of 20th Annual Allerton Conference, (Oct. 1982)