

関数環と martingale

早大理工 新井 仁之 (Hitoshi Arai)

早大教育 和田 淳蔵 (Junzo Wada)

本講演では、前半で、N.Th.Varopoulos ([9]) が定義した正則(holomorphic) martingale からなる H^p 空間について、関数環論に関連した最近までの結果を紹介しながら、いくつかの注意を与える。また、 H^∞ が $*$ 弱極大でないことを証明する。後半では、 H^p の理論を 2-parameter の場合に拡張することを試みる。

§1 正則 martingale からなる H^p 空間

$(x_1(t))_{t \geq 0}, \dots, (x_m(t))_{t \geq 0}; (y_1(t))_{t \geq 0}, \dots, (y_m(t))_{t \geq 0}$ を確率空間 $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ で定義された $2m$ 個の独立な 1 次元 Brown 運動で、 $x_j(0) = y_j(0) = 0$ (a.s. $1 \leq j \leq m$) となっているものとする。

$$\mathcal{F}_t \equiv \sigma[x_j(s), y_j(s) : 1 \leq j \leq m; 0 \leq s \leq t] \quad (t \geq 0)$$

とし、 $\sigma[\mathcal{F}_t; t \geq 0] = \mathcal{F}$ を仮定しておく。

$$Z_j \equiv x_j + iy_j; \bar{Z}_j \equiv x_j - iy_j \quad (1 \leq j \leq m)$$

とする。このとき、組 $(\Omega; \mathcal{F}; \mathcal{F}_t, t \geq 0; P), Z_1, \dots, Z_m$ を B_{2m} -空間という。 $(\Omega; \mathcal{F}; \bar{P})$ を $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ の完備化とし、 $\bar{\mathcal{F}}_t \equiv \mathcal{F}_t \vee \{\bar{P}\text{-零集合}\} (t \geq 0)$ とする。 $\bar{\mathcal{F}} = \bigvee_t \bar{\mathcal{F}}_t$ である。

$\bar{\mathcal{F}}_t$ に適合した (resp. 局所) martingale を、ここでは、 B_{2m} - (resp. 局所) martingale ということにする。

$\mathcal{L}_2^{loc} \equiv \{(\alpha_s) : (\alpha_s) \text{ は、} \bar{\mathcal{F}}_t \text{ に適合した可測過程で、任意の } t > 0 \text{ に対して、確率 1 で、} \int_0^t |\alpha_s|^2 ds < \infty \text{ が成り立つ。}\}$

とおく。 (X_t) が正則 (resp. 局所) martingale であるとは、 (X_t) が B_{2m} - (resp. 局所) martingale で、かつ、次の (1.1) をみたすことである。

$$(1.1) \quad \exists \alpha_j \in \mathcal{L}_2^{loc} \quad (1 \leq j \leq m) : X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dz_j$$

今後、 $X \in L^1 (\equiv L^1(\bar{\mathcal{F}}))$ に対し X_t で、 $E[X | \mathcal{F}_t]$ を表わす。 $(t \geq 0)$

$H^p (\equiv H^p(\bar{\mathcal{F}})) \equiv \{X \in L^p : (X_t) \text{ は正則 martingale}\} \quad (1 \leq p \leq \infty)$ とする。

(注意 1 : (X_t) が正則局所 martingale で、 $X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^1$ をみたすとする。停止時間列 $\{\sigma_n\}$ が存在して、 $\sigma_n < \infty, \sigma_n \uparrow \infty$ a.s. かつ $(X_{t \wedge \sigma_n})_t$ は L^2 martingale になる。 $|X_{t \wedge \sigma_n}| \leq X^*$ より、 $\{X_{t \wedge \sigma_n}\}_{t,n}$ は一様可積分で、 $\lim_n E|X_{t \wedge \sigma_n} - X_t| = 0$ である。これと $E[X_{t \wedge \sigma_n} | \bar{\mathcal{F}}_s] = X_s (t > s)$ より、 $E[X_t | \bar{\mathcal{F}}_s] = X_s$ となる。ゆえに、 (X_t) は、一様可積分 martingale になる。ゆえに $X_0 \in H^1$ である。)

(X_t) が 2 乗可積分 B_{2m} -martingale のとき

$$\exists_1 \alpha_j, \beta_j \in \mathcal{L}_2 \equiv \{ \gamma \in \mathcal{L}_2^{10c} : E[\int_0^t |\gamma|^2 ds] < \infty (\forall t \geq 0) \} (1 \leq j \leq m)$$

$$\text{s. t. } X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j dy_j \quad (t \geq 0)$$

が成り立つ。([11] 参照) そこで、

$$HX_t \equiv -\sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dy_j \quad (t \geq 0)$$

とする。すると、 $(X_t + iHX_t)$ は正則 martingale になり、さらに、 $E|X_t - X_0|^2 = E[\sum_{j=1}^m \int_0^t (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) ds] (t \geq 0)$ (L^2 恒等式) より、 $\|HX_t\|_{L^2(\mathcal{F}_t)} = \|X_t - X_0\|_{L^2(\mathcal{F}_t)}$ となる。特に (X_t) が L^2 有界なら、 $X_\infty + iHX_\infty \in H^2$ となる。この H を Hilbert 変換という。

ところで、一様可積分な B_{2m} -martingale (X_t) は、

$$(1.2) \quad X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j dy_j \quad (\alpha_j, \beta_j \in \mathcal{L}_2^{10c}; 1 \leq j \leq m)$$

と表わすことができるので、形式的には、 HX_∞ を定義できる。しかし、 $X + iHX_\infty \in H^1$ となる保障はない。これに関して、次の定理がある。

定理 1.1. ([9] Th3.2) $X \in L^1$ のとき、1), 2) は同値である。

$$1) \quad X + iHX_\infty \in H^1 \quad 2) \quad X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^1$$

証明 (2) $\Rightarrow$ 1) X_t が (1.2) で表わされているとする。[3]

の (2.2) より、 $E[\sup_{t \leq s} |HX_t|] \leq C_1 E[\langle HX, HX \rangle_s^{\frac{1}{2}}] = C_1 E[\langle X - X_0, X - X_0 \rangle_s^{\frac{1}{2}}] \leq C_1 C_1 (E[X^*] + E[|X_0|]) < \infty (\forall s \geq 0)$ 。ゆえに、(注意 1) より、 $X + iHX_\infty \in H^1$ となる。(1) $\Rightarrow$ 2) $Z_t = X_t + iHX_t$ とおく。 Z_t は、[3] の

Conformal martingale ゆえ、1) と [3] (6.3) より、

$$E[X^*] \leq 4E[|Z_\infty|] < \infty \quad \blacksquare$$

§2 正則martingaleと解析関数との合成定理

[9] Lemma 3.1 を、次の形に修正しておく

定理2.1. $X_1, \dots, X_n \in H^1$ とする。 D を $\mathbb{C}^n$ 内の領域で、
 $P\{\forall t \geq 0 : (X_1(t), \dots, X_n(t)) \in D\} = 1$ とする。

φ を $\mathbb{C}^n$ 上で C^2 級で、かつ D 上で解析的な関数とする。このとき、(1) $Z_t \equiv \varphi(X_1(t), \dots, X_n(t))$ は、正則局所martingaleである。(2) $Z^* \in L^1$ ならば、 $Z_\infty \in H^1$ である。(3) $X_j \in H^\infty$ ($1 \leq j \leq n$) ならば、 $Z_\infty \in H^\infty$ である。

証明 $X_k(t) = X_k(0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j^{(k)} dz_j$ ($k=1, \dots, n$) とする。
 $F_t = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ とおく。伊藤の公式から、
 $\varphi(F_t) = \varphi(F_0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(F_s) \alpha_j^{(k)}(s) dz_j(s)$ ($t \geq 0$) と表わせるから、 $(\varphi(F_t))$ は、正則局所martingaleである。 $Z^* \in L^1$ のとき、(注意1)より、 (Z_t) は一様可積なmartingaleであるから、 $\varphi(F_t) = \varphi(F)_t$ ($t \geq 0$) となる。ゆえに、 $Z_\infty \in H^1$ である。 $X_j \in H^\infty$ ($1 \leq j \leq n$) のときは、 $\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}$ が、 $\{F_s(\omega) : 0 \leq s \leq \infty, \omega \in \Omega\} \subset \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq \sum_{j=1}^n \|X_j\|_\infty\}$ で有界であるから、 (Z_t) は正則martingaleになる。 $\varphi(F) \in L^\infty$ より、 $Z_\infty \in H^\infty$ である。■

(注:[9]との違いは、 $X_1, \dots, X_n \in H^1$ の仮定の部分である。)

§3 H^p と関数環

次の定理は、今後の議論の基礎になる。

定理3.1. ([9]) (3.1) H^∞ は、 $L^\infty(\bar{\alpha})$ の部分環をなす。すな

あち、 H^∞ は複素線型空間で、 $\forall X, Y \in H^\infty : XY \in H^\infty$ をみたす。

(3.2) H^∞ は、 $L^\infty(\bar{\mathcal{A}})$ で、* 弱閉である。

(3.3) $H^\infty \ni 1$

(3.4) $\forall X, Y \in H^\infty : E(XY) = E(X)E(Y)$

(3.5) H^2 は、 $L^2(\bar{\mathcal{A}})$ ノルム閉である。

(3.6) H^p の元は、 H^∞ の元で $L^p(\bar{\mathcal{A}})$ ノルム近似できる。($1 \leq p < \infty$)

(3.7) $\forall \Phi \in \text{Re } L^\infty(\bar{\mathcal{A}}), \exists \phi \in (H^\infty)^{-1} : |\log |\phi|| = \Phi$

(ただし、 $(H^\infty)^{-1} \equiv \{f \in H^\infty : \exists g \in H^\infty \text{ s.t. } fg = 1\}$ とする。)

証明 (3.3) は明らか。(3.1), (3.4) は定理 2.1 による。

(3.5) は L^2 恒等式 (3.4 - ジ参照) による。 $H^\infty = H^2 \cap L^\infty$ と (3.5) 及び Krein-Smulian の結果 ([1]) より (3.2) が出る。 $X \in H^p$ ($1 \leq p < \infty$) をとる。 $T_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$ とすると、 $|X_{T_n}| \leq n$ で、 $X_{T_n} = X_0 + \int_0^{T_n} \chi_{(T_n > s)} dX_s$ となるから、 $X_{T_n} \in H^\infty$ である。[3] の (6.3) と Lebesgue の優収束定理より、(3.6) がわかる。(3.7) については、 $\phi_t \equiv \exp[\Phi_t + iH\Phi_t]$ とおけば、 $\sup_t |\phi_t| \leq \exp \|\Phi\|_\infty + 1$ であるから、定理 2.1 (2) より ϕ が求めるものである。■

定理 3.1 の結果は、関数環論では、非常に重要な性質とされている。このことをみるため、ここで、関数環の一般論に少し触れることにする。しかし、一口に関数環といっても、その種類は、たくさんある。ここでは、 H^∞ をとらえるのに有効であると思われる * 弱 Dirichlet 環について述べる。

— *弱Dirichlet 環と H^p —

$(X; \mathcal{A}; \mu)$ を任意の確率空間とする。 A を $L^0(\mathcal{A})$ の部分集合とする。 A が次の (*1) ~ (*4) をみたすとき、 A を *弱Dirichlet 環という。

(*1) A は、 $L^0(\mathcal{A})$ の部分環をなす。 (*2) $A \ni 1$

(*3) $\forall f, g \in A : \int fg d\mu = \int f d\mu \int g d\mu$

(*4) $A + \bar{A}$ は、 $L^0(\mathcal{A})$ で *弱稠密である。ただし、 $\bar{A} \equiv \{\bar{f} : f \in A\}$ で、 $\bar{}$ は複素共役を表わす記号とする。

関数族 B に対し、 $[B]_p$ という記号で、 $p = \infty$ のときは、 B の $L^0(\mathcal{A})$ での *弱閉包を表わし、 $0 < p < \infty$ のときは、 B の $L^p(\mathcal{A})$ ノルム閉包を表わすことにする。

定理 3.2 (Srinivasan-Wang, [8] 定理 5.6.1 参照)

A が *弱Dirichlet 環であるための必要十分条件は、 A が (*1), (*2), (*3) 及び (*4') $\forall u \in \text{Re } L^0(\mathcal{A}), \exists f \in [A]_\infty^- : \log |f| = u$ の条件をみたすことである。

(3.2) より、 $[H^\infty]_\infty = H^\infty$ となる。定理 3.1 と定理 3.2 から、 H^∞ は *弱Dirichlet 環になることがわかる。

ここで、 H^∞ の *弱Dirichlet 性を使って、次のことを証明する。

定理 3.3 $[H^\infty]_p = H^p \quad (1 \leq p < \infty)$

証明 B_2 空間で証明する。 B_{2m} 空間でも、以下の議論を形

式的に拡張すればよい。 $[H^\infty]_p \supset H^p$ は、定理 3.1 による。ここでは、" $H^\infty \ni X^{(n)}, E|X^{(n)} - X|^p \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \Rightarrow X \in H^p$ " を示す。

$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha dx_1 + \int_0^t \beta dy_1, (\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^{loc})$ とおける。 $\sigma_n \equiv \inf\{t: \int_0^t |\alpha|^2 ds \geq n\} \wedge n$, $\tau_n \equiv \inf\{t: \int_0^t |\beta|^2 ds \geq n\} \wedge n$, $T_n \equiv \inf\{t: |X_t| \geq n\} (n \in \mathbb{N})$ とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_{T_n}^{(n)} - X_{T_n}|^p = 0$ と $X_{T_n}^{(n)} \in H^\infty$ より、 $X_{T_n} \in [H^\infty]_p \cap L^p(\bar{\mathcal{F}})$ である。 H^∞ は、*弱 Dirichlet 環であるから、[8] (5.2.11) より、 $[H^\infty]_p \cap L^p(\bar{\mathcal{F}}) = H^\infty$ となる。ゆえに、 $X_{T_n} \in H^\infty$ である。 $(N \in \mathbb{N})$ 従って、 $X_{T_n \wedge t} = X_0 + \int_0^t \gamma^{(N)} dz_1, (\gamma^{(N)} \in \mathcal{L}_2)$ $(N \in \mathbb{N})$ とおける。伊藤表現の一貫性と、 $\sigma_n \rightarrow \infty, \tau_n \rightarrow \infty, T_n \rightarrow \infty$ $(n \rightarrow \infty, a.s.)$ とから、 $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha dz_1$ となることがわかる。よって、 $X \in H^p$ である。■

さて、一般に、 A が *弱 Dirichlet 環のとき、 $[A]_p$ は、単位円周 $\mathbb{T}$ 上の古典的 Hardy 空間 $H^p(\mathbb{T})$ の妥当な抽象化としてよく知られている。実際、 $\mathbb{T}$ 上で成り立っている多くの重要な定理、たとえば、不変部分空間定理、因数分解定理、Szegő の定理、Helson-Szegő の定理 etc. は *弱 Dirichlet 環にまで一般化できている。そのほか、Jensen の公式 " $\forall f \in [A]_1: \log \int f d\mu \leq \int \log |f| d\mu$ " も成り立っている。([8], [5] 参照) 従って、関数環論を通すことによって、 H^∞ も今述べた一連の定理をみたすことがわかる。

ここで問題とすることは、 $H^\infty(\mathbb{T})$ で成り立っているが、

一般の $[A]_\infty$ がみたすとは限らないような性質を、 H^∞ がもっているか、ということである。このような問題となる性質として、たとえば、次の3つのものがあげられる。

コロナ定理、 解析構造、 *弱極大性

結論からいえば、 H^∞ は、コロナ定理をみたし ([9])、解析構造をもたず ([2])、*弱極大になっていない (筆者)。

定理 3.4 (コロナ定理, [9]) $f_1, \dots, f_n \in H^\infty$ が、ある定数 $\delta > 0$ に対して、 $\sum_{j=1}^n |E[f_j | \mathcal{F}_t]| \geq \delta \ (\forall t \geq 0) \text{ a.s.}$ をみたすとき、適当な $g_1, \dots, g_n \in H^\infty$ をとって、 $\sum_{j=1}^n f_j g_j = 1$ とできる。

証明 [9] での構成法を紹介する。まず、 B_2 空間で考える。以下、 $dG = \beta dz_1$ のとき β を G' で表わす。 $K_{ij} \equiv \bar{f}_i \bar{f}_j' - \bar{f}_j \bar{f}_i'$ とし、 $F \equiv (f_1, \dots, f_n)$, $u_{ij}^{(0)}(t) \equiv \int_0^t K_{ij} / |F|^4 d\bar{z}_1 - \int_0^t \langle \bar{F} \cdot F' \rangle K_{ij} / |F|^6 ds$ とおく。

$u_{ij}^{(0)} = u_{ij}^{(0)}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_{ij}^{(0)}(t) \in \text{BMO}(\bar{\mathcal{F}})$ だから、 $L(\varphi) \equiv E[u_{ij}^{(0)} \varphi]$ ($\varphi \in H^1$) とすると、定理 1.1 と Fefferman の双対定理より、 $L \in (H^1)^*$ である。L に、Hahn-Banach の定理と Riesz の表現定理を適用して、 $E[u_{ij}^{(0)} \varphi] = E[v_{ij} \varphi]$ ($\varphi \in H^1$) なる $v_{ij} \in L^\infty$ の存在がわかる。任意の $\varphi \in H^1$ に対し、 $E[(u_{ij}^{(0)} - v_{ij}) \varphi] = 0$ だから、 $u_{ij}^{(0)} - v_{ij} \in H^2$ となる。 $\lambda_{ij} \equiv (u_{ij}^{(0)} - v_{ij})'$ とおく。そこで、 $g_i^{(1)} \equiv (\bar{f}_i / |F|^2) + \sum_{j=1}^n (u_{ij}^{(0)} + \int \lambda_{ij} dz_1) f_j$ とおくと、伊藤の公式から、 $g_i^{(1)} \in H^2 \cap L^\infty = H^\infty$ かつ $\sum_{i=1}^n f_i g_i = 1$ となる。 B_{2m} 空間でも、同様に構成できる。

(解析構造) これについては、[2] を参照。

(*弱極大性) $[A]_{\infty}$ が $L^{\infty}(\mathcal{A})$ で *弱極大であるとは、

$[A]_{\infty} \subsetneq B \subsetneq L^{\infty}(\mathcal{A})$ となるような *弱閉環 B が存在しないことである。 A が *弱 Dirichlet 環のとき、次の Muhly の定理は重要である。

定理 3.5 ([1] p152 参照)

A が *弱 Dirichlet 環のとき、1), 2) は同値である。

1) $[A]_{\infty}$ は *弱極大である。 2) $\forall f \in [A]_{\infty} : \mu(f=0) > 0 \Rightarrow \mu(f=0) = 1$

この Muhly の定理を使って、次のことを証明する。

定理 3.6 H^{∞} は、*弱極大ではない。

証明 $T \equiv \inf\{t : |Z_1(t)| \geq 1\}$ とおく。 $P(T > r) > 0$ かつ

$P(T < r) > 0$ となる正数 r をとり固定する。(このような r の存在は、Brown 運動の性質から容易に証明できる。) そこで、

$$\alpha(s, \omega) \equiv \begin{cases} 0 & (0 \leq s < r) \\ 1 & (r \leq s) \end{cases} \quad \omega \in \Omega$$

とおき、 $X_t \equiv \int_0^t \alpha dZ_1$ とおく。 $X_{T \wedge t} = \int_0^t \chi_{(T > s)} \alpha(s) dZ_1(s)$

だから、 $(X_{T \wedge t})_t$ は正則 martingale である。確率積分の計算で、 $|X_T| \leq 2$ a.s. がわかるから、 $X_T \in H^{\infty}$ である。さらに、

$$P(X_T = 0) \geq P(T < r) > 0, \quad P(X_T \neq 0) \geq P(T > r) > 0$$

となっていることもわかる。よって、定理 3.5 より、 H^{∞} は、

*弱極大にはなっていない。■

§4 2-parameter 正則martingaleと関数環

$(\Omega_j; \mathcal{F}_t^j; \mathcal{F}_t^j, t \geq 0; P^j)$, Z_j を §1 で定義した B_2 空間とし、 $\bar{\mathcal{F}}^j$, $\bar{P}^j, \bar{\mathcal{F}}_t^j$ も §1 で定めたものとする。($j=1, 2$)

$(\Omega; \mathcal{F}; P)$ を直積測度空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2; \bar{\mathcal{F}}^1 \times \bar{\mathcal{F}}^2; \bar{P}^1 \times \bar{P}^2)$ の完備化とし、 $\mathcal{F}_{st} \equiv (\bar{\mathcal{F}}_s^1 \times \bar{\mathcal{F}}_t^2) \vee \{P \text{ 零集合} \}$ ($s, t \geq 0$) とする。

2-parameter の確率過程 $(X_{st})_{(s,t) \in [0, \infty]^2}$ が

(4.1) $\forall s \in [0, \infty] : (X_{st})_t$ が $\bar{\mathcal{F}}_t^2$ に関して正則martingale.

(4.2) $\forall t \in [0, \infty] : (X_{st})_s$ が $\bar{\mathcal{F}}_s^1$ に関して正則martingale.

の2条件をみたすとき、 (X_{st}) を、ここでは、正則な確率過程ということにする。

$X \in L^1(\mathcal{F})$ に対して、 X_{st} で、 $E[X | \mathcal{F}_{st}]$ を表わすことにする。

$1 \leq p \leq \infty$ に対して、

$H^p(\mathcal{F}) \equiv \{X \in L^p(\mathcal{F}) : (X_{st}) \text{ は正則な確率過程} \}$

とおく。 $H^p(\mathcal{F}) \ni X$ のとき、 (X_{st}) は $\mathcal{F}_{st}$ に適合したmartingaleであるので、 (X_{st}) を H^p 正則martingaleと呼ぶことにする。

(注: $H^2(\mathcal{F}) \ni X$ のとき、 (X_{st}) は、ある $\Phi \in \Lambda^2$ ([7] 参照) で、

$$X_{st} = X_{s0} + X_{0t} - X_{00} + \int_0^s \int_0^t \Phi dz_2 dz_1 \text{ とかける。しかし、このこ}$$

とは、以下の議論に関する限り、必要ではない。)

1-parameter の正則martingaleを2-parameterの場合に拡張するということも、Varopoulosによってなされたが、Varopoulosの2-parameter 正則martingaleの定義では、 C^∞ 性

を仮定していて、1-parameter のときのように関数環として取り扱っていない。われわれは、この Varopoulos の定義から C^∞ 性を除いたものを H^p 正則 martingale と定義して、関数環論の枠組みの中で、いろいろと考察していく。

各 parameter ごとに、1-parameter のときの結果 (定理 3.1, 定理 3.3, Jensen の公式 (7 ページ参照)) をくり返し適用すれば、次のことが証明できる。

定理 4.1 (4.3) $H^\infty(\mathbb{F})$ は、 $L^\infty(\mathbb{F})$ の $*$ 弱閉な部分環をなす。

(4.4) $H^\infty(\mathbb{F}) \ni 1$

(4.5) $\forall X, Y \in H^\infty(\mathbb{F}) : E[XY] = E[X]E[Y]$ (ただし、 $E[\cdot]$ は

P に関する積分を表わすものとする。)

(4.6) $H^p(\mathbb{F})$ は、 $L^p(\mathbb{F})$ ノルム閉である。

(4.7) $\forall X \in H^1(\mathbb{F}) : \log |X_{\infty}| = \log |E[X]| \leq E[\log |X|]$

証明 (4.7) を証明する。7 ページでも述べたように、

$\forall X \in H^1(\bar{\mathbb{F}}^+) : \log |E_j[X]| \leq E_j[\log |X|]$ ($j=1, 2$) が成り立つ。ただし、 $E_j[\cdot]$ は $\bar{\mathbb{P}}^+$ に関する積分を表わすものとする。

任意の $X \in H^1(\mathbb{F})$ をとる。 $X_{\infty} = 0$ の場合は明らかであるから、 $X_{\infty} \neq 0$ の場合を示す。 $X_{\infty} \neq 0$ のとき

$$\infty > E[|X|] \geq E_2 E_1[\log |X|] \geq E_2[\log |E_1[X]|]$$

$$= E_2[\log |X_{\infty}|] \geq \log |E_2[X_{\infty}]| = \log |X_{\infty}| > -\infty$$

よって、Fubini の定理より、 $\log |E[X]| = \log |X_{\infty}|$

$\leq E[\log |X|]$ となる。■

(注: (4.4) から、 $[H^\infty(\mathbb{F})]_p \subset H^p(\mathbb{F})$ であることがわかる。
 $[H^\infty(\mathbb{F})]_p = H^p(\mathbb{F})$ は、まだ証明できていない。)

ここで、定理 4.1 の関数環論的な意味を述べる。 $H^\infty(\mathbb{F})$ は
 *弱 Dirichlet 環になっていないので (§6 参照)、今度は、
 König の H^p 空間論を使う。

— König の Hardy 空間論と $H^p(\mathbb{F})$ —

$(\mathfrak{A}; \mathcal{A}; \mu)$ を任意の確率空間とする。 (H, μ) が次の (★1) ~
 (★3) をみたすとき、 (H, μ) を Hardy algebra situation という。

(★1) H は、 $L^\infty(\mathcal{A})$ の *弱閉な部分環をなす。

(★2) $H \ni 1$

(★3) $\forall f, g \in H : \int fg d\mu = \int f d\mu \int g d\mu$

また、さらに

(★4) $\forall f \in H : \log |\int f d\mu| \leq \int \log |f| d\mu$

をみたすとき、 μ は Jensen 測度であるという。

(注: 定理 4.1 より、 $(H^\infty(\mathbb{F}), P)$ は、Hardy algebra situation で、かつ P は Jensen 測度になっている。)

次に、König の理論で良く使われる記号を導入する。

$L(\mathcal{A}) \equiv \{f \mid f \text{ は } \mathcal{A}\text{-可測関数}\}$

$H^\#(\mathcal{A}) \equiv \{f \in L(\mathcal{A}) \mid (\exists u_n \in H)(\|u_n\|_\infty \leq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = f \text{ (a. s.)} \\ \& u_n f \in H (n=1, 2, \dots))\}$

$$E(\mathcal{A}) \equiv \{u \in \text{Re} L(\mathcal{A}) \mid (\exists v \in \text{Re} L(\mathcal{A})) (\forall t \in \mathbb{R} : \\ \exp t[u+iv] \in H^\#(\mathcal{A})) \}$$

$H^\#$ は、 $\mathbb{T}$ 上の H^p 空間論で重要な、Nevanlinna 族からつくられる N^+ の抽象化である。また、 E は、 $\mathbb{T}$ 上の共役可能な関数からなる集合をモデルにしている。実際、上の記号で、 v は u の、ある意味で、共役関数になっていると考えられる。ただし、 v は、このままだと一意的に定まらないので、次の定理によって一意化しておく。

定理 4.2 ([1]) $\forall u \in E(\mathcal{A}), \exists ! v \in \text{Re} L(\mathcal{A}), \forall t \in \mathbb{R} :$

$$\exp t[u+iv] \in H^\#(\mathcal{A}) \quad \& \quad \int \exp t[u+iv] d\mu = \exp t d(u)$$

ただし、 $\alpha(f) \equiv \inf \{-\log |\int f d\mu| : g \in H, -\log |g| \geq f\}$ とする。

この定理で定まった v を $*u$ と書き、 u の共役関数という。

$E^\infty(\mathcal{A}) \equiv E(\mathcal{A}) \cap L^\infty(\mathcal{A})$ とおく。次の定理は、§5 で使う。

定理 4.3 (抽象的 H^p 空間での M. Riesz の不等式, [1])

(H, μ) を Hardy algebra situation とし、 μ を Jensen 測度とする。 $A_p \equiv \max[\tan(\frac{\pi}{2p}), \cotan(\frac{\pi}{2p})]$ とおく。このとき、

$$\forall u \in E^\infty(\mathcal{A}) : \|*u\|_{L^p} \leq A_p \|u\|_{L^p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

が成り立つ。

König の理論は、[1] に詳説されている。また [12] にも解説がある。詳しくは、それらを参照されたい。

この § の最後に、次の定理を証明する。

定理4.4 $X_1, \dots, X_n \in H^1(\mathbb{F})$ とする。 D を $\mathbb{C}^n$ 内の領域で、
 $P\{\forall s, t \geq 0 : (X_1(s, t), \dots, X_n(s, t)) \in D\} = 1$ とする。

φ を $\mathbb{C}^n$ 上で C^2 級で、かつ D 上で解析的な関数とする。このとき、次のことが成り立つ。

(1) $\sup_{s, t} |\varphi(X_1(s, t), \dots, X_n(s, t))| \in L^1(\mathbb{F})$ ならば、

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) \in H^1(\mathbb{F})$$

(2) $X_j \in H^\infty(\mathbb{F})$ ($1 \leq j \leq n$) ならば、 $\varphi(X_1, \dots, X_n) \in H^\infty(\mathbb{F})$

証明 $M_{st} \equiv (X_1(s, t), \dots, X_n(s, t))$ とおく。任意の $s \geq 0$ を固定する。定理2.1より、 $\varphi(M_{st}) = \varphi(M_{s\infty})_t$ ($t \geq 0$) となるから (4.1) が成り立つ。(4.2) も同様にして成り立つ。

$$\begin{aligned} E[\varphi(M) | \mathcal{F}_{st}] &= E_2[E_1[\varphi(M) | \mathcal{F}_s^1] | \mathcal{F}_t^2] = E_2[\varphi(M_{s\infty}) | \mathcal{F}_t^2] \\ &= \varphi(M_{st}) \end{aligned}$$

よって、 $\varphi(M) \in H^1(\mathbb{F})$ である。(2)は(1)より明らか。■

§5 正値な実部をもつ H^1 正則martingale

以下、 $L^p(\mathbb{F})$ ノルムを $\|\cdot\|_p$ と表わすことにする。($1 \leq p \leq \infty$)

まず、König の理論でよく使われる H^+ を定義する。

$$H^+ \equiv \{X \in L(\mathbb{F}) : \operatorname{Re} X \geq 0 \text{ a.s.} \& \exp(-tX) \in H^\infty(\mathbb{F}) \ (\forall t \geq 0)\}$$

命題5.1 $H^1(\mathbb{F}) \ni X$ が実数値なら、 $X = E[X]$ a.s. である。

証明 (4.7) から、命題5.1は、関数環論では自明なことでとされている。その理由は、([8]補題5.6.2 : $g \in \operatorname{Re} L^1(\mathbb{F})$ とする。 $\exists \delta > 0, \forall t \in (-\delta, \delta) : \int |\log |1 - tg|| d\mu \geq 0 \Rightarrow g = 0$ a.s.) にあ

る。実際 (4.7) より、 $Y = X - E[X]$ とおけば、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し、 $E[\log |1 - tY|] \geq \log |E[1 - tY]| = 0$ であるから、 $X = E[X]$ a.s. となる。■

次の補題は、以下の議論で重要である。

補題 5.2 $X \in H^1(\mathbb{F})$, $\exp(X) \in L^\infty(\mathbb{F}) \Rightarrow \exp(X) \in H^\infty(\mathbb{F})$

証明 $\operatorname{Re} X_{st} \leq \log(\|\exp(X)\|_\infty + 1)$ であるから、

$|\exp(X_{st})| \leq \|\exp(X)\|_\infty + 1 < \infty$ よって、定理 4.4 より、

$\exp(X) \in H^1(\mathbb{F}) \cap L^\infty(\mathbb{F}) = H^\infty(\mathbb{F})$ となる。■

補題 5.3 $X \in H^1(\mathbb{F})$, $\operatorname{Re} X \geq 0$ a.s. $\Rightarrow X \in H^+$

証明 任意の $t \geq 0$ に対して、 $\exp(-tX) \in L^\infty(\mathbb{F})$ であるから、

補題 5.2 より、 $X \in H^+$ となる。■

さて、 Log で対数関数の主値を表わすことにする。次のことが成り立つ。

定理 5.4 $X \in H^1(\mathbb{F})$, $\operatorname{Re} X \geq 0$; $X \neq 0$ a.s. $\Rightarrow \operatorname{Log} X \in [H^\infty(\mathbb{F})]_1$

証明 補題 5.3 より、 $X \in H^+$ である。[1] p 92 より、

$\exists \{h_k\}_{k=1}^\infty \subset H^\infty(\mathbb{F}) : \operatorname{Re} h_k \geq 0, |X| \geq |h_k|, \lim_{k \rightarrow \infty} h_k = X$ a.s.

が成り立つ。 $X_n \equiv X + \frac{1}{n}$, $h_k^{(n)} \equiv h_k + \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) とおく。すると、

$\operatorname{Re} h_k^{(n)} \geq \frac{1}{n}$, $|h_k^{(n)}| \leq |X| + 1$ である。

$s_k^{(n)} \equiv \max(\|\operatorname{Re} h_k^{(n)}\|_\infty, \|\operatorname{Im} h_k^{(n)}\|_\infty)$, $\delta_n = \frac{1}{n}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \|h_k^{(n)} - ([\delta_n + (s_k^{(n)})^2]/\delta_n)\|_\infty &\leq \sqrt{-2\delta_n + ([\delta_n + (s_k^{(n)})^2]/\delta_n)^2} \\ &< [\delta_n + (s_k^{(n)})^2]/\delta_n \end{aligned}$$

となるから、関数論の Runge の一様近似定理より、
 $\text{Log } h_k^{(n)} \in \overline{H^\infty(F)}^{\|\cdot\|_\infty} = H^\infty(F)$ となる。

$$|\text{Log } h_k^{(n)}| \leq \max(\log n, \log(|X|+1)) + \pi \quad (\forall n, k \in \mathbb{N})$$

$$|\text{Log } X_n| \leq \max(\log(|X|+1), |\log |X||) + \pi \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

である。また、(4.7) より、 $\log |X| \in L^1(F)$ である。(実際、 $E[X] \neq 0$ であり、かつ $E[|\log |X||] \leq 2\|X\|_1 - \log |E[X]|$ である)
 以上のことと、Lebesgue の優収束定理により、

$\text{Log } X \in [H^\infty(F)]_1$ となる。■

定理 5.5 $X \in H^1(F)$, $\text{Re } X \geq 0$; $X \neq 0$ a.s. ならば、 X は外関数である。すなわち、 $-\infty < \log |E[X]| = E[\log |X|]$ となる。

(この定理の証明のために、次の補題を証明する。)

補題 5.6 $X \in H^1(F)$, $\text{Re } X \in L^\infty(F) \Rightarrow X \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} [H^\infty(F)]_p$

補題 5.6 の証明 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $\exp(tX) \in L^\infty(F)$ であり、 $tX \in H^1(F)$ であるから、補題 5.2 より、 $\exp(tX) \in H^\infty(F)$ である。[1] p 70 より、 $H^\infty(F) = H^\#(F) \cap L^\infty(F)$ ゆえ、 $\text{Re } X \in E(F)$ である。[1] p 111 より、ある $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して、 $\text{Im } X = i^*(\text{Re } X) + \lambda$ となる。定理 4.3 より、 $i^*(\text{Re } X) \in \bigcap_{1 < p < \infty} L^p(F)$ となる。[1] p 115 より、 $\text{Re } X + i^*(\text{Re } X) \in H^\#(F) \cap [\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(F)] \subset \bigcap_{1 \leq p < \infty} [H^\infty(F)]_p$ となる。よって、 $X \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} [H^\infty(F)]_p$ となる。■

定理 5.5 の証明 〈場合 I : $\exists \delta > 0$ s.t. $\text{Re } X \geq \delta$ の場合〉

定理 5.4 より、 $\text{Log } X \in H^1(F)$ である。 $i \text{Log } X$ に補題 5.6 を適

用すれば、 $\log X \in [H^\infty(\mathbb{F})]_2$ となる。 $g \equiv \log X$ とおくと、

$\exists g_n \in H^\infty(\mathbb{F}) : \|g_n - g\|_2 \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ となるから、[1] p 128 と

定理 4.3 より、 $\| \operatorname{Im} g_n - \operatorname{Im} E[g_n] - (\operatorname{Im} g_k - \operatorname{Im} E[g_k]) \|_2$

$$\leq A_2 \| \operatorname{Re} g_n - \operatorname{Re} g_k \|_2 \rightarrow 0 \ (n, k \rightarrow \infty)$$

ゆえに、 $\| \operatorname{Im} g_n - \operatorname{Im} E[g_n] - \widetilde{\operatorname{Re}} g \|_2 \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ なる $\widetilde{\operatorname{Re}} g \in L^2(\mathbb{F})$ が存在

する。このとき、

$$\| g_n - \operatorname{Im} E[g_n] - (\operatorname{Re} g + i \widetilde{\operatorname{Re}} g) \|_2 \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$$

であるから、 $\operatorname{Re} g + i \widetilde{\operatorname{Re}} g \in [H^\infty(\mathbb{F})]_2$ となる。

$$\widetilde{\operatorname{Re}} g - \operatorname{Im} g = i \{ \operatorname{Re} g + i \widetilde{\operatorname{Re}} g - g \} \in [H^\infty(\mathbb{F})]_2 \subset H^2(\mathbb{F})$$

であるから、命題 5.1 より、ある定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\widetilde{\operatorname{Re}} g = \operatorname{Im} g + \alpha \quad \text{となる。従って、} g = \operatorname{Re} g + i \widetilde{\operatorname{Re}} g - i \alpha \quad \text{である。}$$

ゆえに、 $X = \exp g = e^{-i\alpha} \exp(\operatorname{Re} g + i \widetilde{\operatorname{Re}} g)$ である。そこで、

$$Y = e^{i\alpha} \exp(-\operatorname{Re} g - i \widetilde{\operatorname{Re}} g) \quad \text{とおくと、} |Y| \leq \frac{1}{\delta} \quad \text{となるから、補題}$$

5.2 より、 $Y \in H^\infty(\mathbb{F})$ で、 $XY = 1$ となる。ゆえに、(4.7) より、

$$-\infty < \log |E[X]| = E[\log |X|] \quad \text{となる。}$$

<場合 II: 一般の場合> $X_n = X + \frac{1}{n}$ とし、 X_n に場合 I を適用

すると、 $-\infty < \log |E[X_n]| = E[\log |X_n|]$ となる。

$|\log |X_n|| \leq \max(|\log |X||, |X|)$ と Lebesgue の優収束定理から

$n \rightarrow \infty$ とすると、 $-\infty < \log |E[X]| = E[\log |X|]$ が得られる。■

§6 $H^p(\mathbb{F})$ と $H^p(\mathbb{T}^2)$

$H^p(\mathbb{T}^2)$ をトーラス $\mathbb{T}^2$ 上の古典的 H^p 空間とする。

われわれの $H^p(\mathbb{H})$ は、 $H^p(\mathbb{T}^2)$ と次の関係がある。

$S \equiv \inf\{s: |Z_1(s)| \geq 1\}$, $T \equiv \inf\{t: |Z_2(t)| \geq 1\}$ とし、
 $\mathcal{B} \equiv \sigma[Z_{1S}, Z_{2T}]$ とする。

定理 6.1 $H^p(\mathbb{H}) \cap L^p(\mathcal{B}) = \{f(Z_{1S}, Z_{2T}) : f \in H^p(\mathbb{T}^2)\}$

証明 任意の $X \in (\text{左辺})$ をとると、ある $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$ が存在して、 $X = f(Z_{1S}, Z_{2T})$ となる。任意の $(m, n) \in (\mathbb{Z}_+)^2$ をとる。
 $m < 0$ としても以下のことは、一般性を失わない。

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \hat{f}(m, n) &= \int f(\theta, \varphi) e^{-im\theta} e^{-in\varphi} d\theta d\varphi \\ &= E[f(Z_{1S}, Z_{2T}) Z_{1S}^{(-m)} Z_{2T}^{(-n)}] = E_2[E_1[f(Z_{1S}, Z_{2T}) Z_{1S}^{(-m)}] Z_{2T}^{(-n)}] \\ &= E_2[E_1[f(Z_{1S}, Z_{2T})] E_1[Z_{1S}^{(-m)}] Z_{2T}^{(-n)}] \\ &= E_2[E_1[f(Z_{1S}, Z_{2T})] \cdot 0 \cdot Z_{2T}^{(-n)}] = 0 \end{aligned}$$

ゆえに、 $f \in H^p(\mathbb{T}^2)$ となる。従って、 $(\text{左辺}) \subset (\text{右辺})$ となる。

" $\supset$ " 側は、明らかである。■

この定理を使って、§5の結果は、 $H^p(\mathbb{T}^2)$ に翻訳することができる。

§7 あとがき

Holomorphic martingale をここでは、正則 martingale と呼んだが、これは、[4] の訳語に従ったものである。

参考文献

- [1] K. Barbey - H. König, Abstract analytic function theory and Hardy algebras, Lecture Note in Math.

593 (1977) Springer

- [2] K.Carne, The algebra of bounded holomorphic martingales, J.Funct. Anal. 45 (1982) 95-108
- [3] R.K.Gettoor - M.J. Sharpe, Conformal martingales, Invent.Math. 16 (1972) 271-308
- [4] 荷見守助, Dirichlet algebra の周辺, 数理解析研究所講究録 451 (1982) 187-206
- [5] I. Hirschman - R. Rochberg, Conjugate function theory in weak * Dirichlet algebras, J. Funct. Anal. 16 (1974) 359-371
- [6] W. Rudin, Function theory in polydiscs, Benjamin Inc. (1969)
- [7] H. Sato, Caractérisation par les transformation de Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions bi-harmoniques sur $\mathbb{R}_+^{m+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$, These de doctrat, L'universite scientifique et medical de Grenoble (1979)
- [8] 竹之内脩 - 阪井章 - 貴志一男 - 神保敏弥, 関数環 培風館 数理科学シリーズ 8 (1977)
- [9] N.Th.Varopoulos, The Helson-Szegö theorem and Ap-functions for Brownian motion and several

variables, J. Funct. Anal. 39 (1980) 85-121

[10] N.Th.Varopoulos, Probabilistic approach to some problems in complex analysis, Bull. Sc. math. 2^e Série 105 (1981) 181-224

[11] 渡辺信三 確率微分方程式 産業図書 数理解析とその周辺 9 (1975)

[12] "関数環とその関連分野" 特集, 数学 28 (1976)