

体系 $C\lambda_{I\lambda}$ に関する予想の証明

千葉大学 理学研究科 基盤理学専攻

松田 直祐

Matsuda Naosuke

Division of Fundamental Sciences, Graduate School of Science, Chiba University

体系 $C\lambda_{I\lambda}$ の予想に証明を与える. 体系については山川さんの資料を参考にする.

$M, N : \lambda\text{-term}$, $R : C\lambda\text{-term}$ とする時, 目標は次の定理の証明である.

$$N \text{ が } M \text{ の } \beta\text{-nf} \Rightarrow M^* \rightarrow N$$

以降の話題では, $C\lambda_{I\lambda}$ の reduction $\rightarrow$ の他に, ラムダ計算における β -reduction が登場する. 混同する恐れがあるため, 後者を $\mapsto_\beta$ で表記することにする. また特に, reduction-記号の右下に数字が書いてある場合, その回数分の簡約が起こっているものと考えている. 例えば, $M \mapsto_{3\beta} N$ と書いたら M から N へ 3 回の β -簡約で達することを表している. また, $\equiv$ を α -同値を表す記号として用いる.

1 準備, 証明方針

まずは, 変換 $I_\lambda 1, I_\lambda \beta$ が次のように働くことを述べておく.

(1) $I_\lambda 1$ -変換

$$\begin{aligned} (\lambda x.M)^* &\equiv I_\lambda \lambda^* x.M^* \\ &\rightarrow_{1I_\lambda 1} \lambda x.(\lambda^* x.M^*)x \\ &\rightarrow_{S,K} \lambda x.M^* \end{aligned}$$

(2) $I_\lambda \beta$ -変換

$$\begin{aligned} ((\lambda x.M)N)^* &\equiv I_\lambda (\lambda^* x.M^*)N^* \\ &\rightarrow_{1I_\lambda \beta} (\lambda^* x.M^*)N^* \\ &\rightarrow_{S,K} ([N/x]M)^* \end{aligned}$$

このように $I_\lambda \beta$ -変換は, term の小さい部分だけを見ると非常にきれいな動きをするのだが, 複雑な $C\lambda$ -term の中では, 思い通りの動きをしてくれないことがある ($M \mapsto_\beta N$ でも $M^* \mapsto_\beta N^*$ とならないことがある). 大きな問題の一つは, λ^* -抽象が term の構造を破壊す

ることである。例えば,

$$((\lambda x.xy)y) \equiv I_\lambda(SI(Ky))y \rightarrow (yy)^*$$

$$\begin{aligned} (\lambda y.(\lambda x.xy)y)^* &\equiv I_\lambda \lambda^* y.((\lambda x.xy)y)^* \\ &\equiv I_\lambda(S(S(KI_\lambda)(S(K(SI))K))I) \not\rightarrow (\lambda y.yy)^* \end{aligned}$$

このような問題点を, $I_\lambda 1$ -変換を使ってどのように解決するかが証明の鍵となってくる. 今回は, 左側から順に I_λ を消していくことで問題を解決していく. つまり, 外側の λ^* -抽象を λ -抽象に直してやって, 内側の term をきれいな形に戻していくのである.

$(\lambda y.(\lambda x.xy)y)^* \rightarrow \lambda y.yy$ の道のり

$$\begin{aligned} (\lambda y.(\lambda x.xy)y)^* &\equiv I_\lambda \lambda^* y.((\lambda x.xy)y)^* \\ &\rightarrow_{I_\lambda 1} \lambda y.(\lambda^* y.((\lambda x.xy)y)^*)y \\ &\rightarrow_{S,K} \lambda y.((\lambda x.xy)y)^* \\ &\equiv \lambda y.I_\lambda(\lambda^* x.xy)y \\ &\rightarrow_{I_\lambda \beta} \lambda y.(\lambda^* x.xy)y \\ &\rightarrow_{S,K} \lambda y.yy \end{aligned}$$

2 証明

Lemma 2.1

$$((\lambda x.M)N)^* \rightarrow_{I_\lambda \beta} ([N/x]M)^*$$

Proof

$$\begin{aligned} ((\lambda x.M)N)^* &\equiv I_\lambda(\lambda^* x.M^*)N^* \rightarrow_{I_\lambda \beta} (\lambda^* x.M^*)N^* \\ &\rightarrow_{S,K} [N^*/x]M^* \equiv ([N/x]M)^* \end{aligned}$$

■

Lemma 2.2

$$(\lambda \vec{x}.M)^* \rightarrow \lambda \vec{x}.M^*$$

Proof

$\vec{x}$ の長さについて帰納的に示す. 長さ 0 の時は明らか. 長さ 1 以上の時は $\vec{x} = (y, \vec{z})$

として

$$\begin{aligned} (\lambda y. \lambda \vec{z}. M)^* &\equiv I_\lambda \lambda^* y. (\lambda \vec{z}. M)^* \\ &\rightarrow_{1I_\lambda 1} \lambda y. (\lambda \vec{z}. M)^* \rightarrow \lambda y. \lambda \vec{z}. M^* \end{aligned}$$

■

Lemma 2.3

$$M \equiv \lambda \vec{y}. (\lambda x. M_0) M_1 M_2 \dots M_n \mapsto_{1h\beta} \lambda \vec{y}. [M_1/x] M_0 M_2 \dots M_n$$

であるとする. ただし, $\mapsto_{h\beta}$ で head reduction を表す. この時, 次が成り立つ.

- (1) $M^* \rightarrow \lambda \vec{y}. ([M_1/x] M_0 M_2 \dots M_n)^*$
- (2) $N \equiv \lambda \vec{y}. \lambda \vec{z}. N_1$ の時, $M^* \rightarrow \lambda \vec{y}. \lambda \vec{z}. N_1^*$

Proof

(1)

補題 2.1, 2.2 を用いればよい.

(2)

(1) より $M^* \rightarrow \lambda \vec{y}. (\lambda \vec{z}. N_1)^*$ が言えるので, 後は補題 2.2 を用いればよい.

■

Corollary 2.4

$M \mapsto_{h\beta} N \equiv \lambda \vec{v}. N_1$ (N_1 は抽象でない) とする. この時, $M^* \rightarrow \lambda \vec{v}. N_1^*$.

Proof

$M \mapsto_{nh\beta} N$ であるとし, n についての帰納法で示す.

(1) $n = 0$ の時

補題 2.2 そのものである.

(2) $n \geq 1$ の時

$$M \mapsto_{(n-1)h\beta} R \mapsto_{1h\beta} N, \quad R \equiv \lambda \vec{y}. R_1, \quad N \equiv \lambda \vec{y}. \lambda \vec{z}. N_1$$

であるとする. 帰納法の仮定から $M^* \rightarrow \lambda \vec{y}. R_1$. また, $R_1 \mapsto_{1h\beta} \lambda \vec{z}. N_1$ なので, 補題 2.3 より $R^* \rightarrow \lambda \vec{z}. N_1^*$. 従って, $M^* \rightarrow \lambda \vec{y}. \lambda \vec{z}. N_1^*$.

■

Theorem 2.5

M, N を λ -term とする. この時, $M \mapsto_\beta N$ ならば $M^* \rightarrow N$.

Proof

N の長さについての帰納法を用いる.

(1) $N \equiv x$ の時

$M \mapsto_{h\beta} x$ が知られている. 従って, 系 2.4 より $M^* \rightarrow x$.

(2) N が変数でない時

M から N への最左 β -簡約列が存在する. その列を眺めると, $M \mapsto_{h\beta} R \mapsto_{i\beta} N$ なる R が現れる (ただし, $\mapsto_{i\beta}$ は inner reduction を表す). 加えて, $R \equiv \lambda \vec{y}. z M_1 \dots M_n$, $N \equiv$

$\lambda \vec{y}.zN_1 \dots N_n$ ($M_i \mapsto_{\beta} N_i$) という形である. 帰納法の仮定より $M_i^* \rightarrow N_i$, 系 2.4 より $M^* \rightarrow \lambda \vec{y}.zM_1^* \dots M_n^*$ がそれぞれ言えるので, $M^* \rightarrow N$ である. ■

3 β -正規形を求めるための具体的な手続き (まとめ)

次のような2つの変換 $f : \lambda\text{-term} \rightarrow C\lambda\text{-term}$, $g : C\lambda\text{-term} \rightarrow C\lambda\text{-term}$ を考える. ただし, 以下の定義で複数の条件に引っかかるケースは若い番号を適用するものとする.

$$(f1) f(x) \equiv x$$

$$(f2) f(MN) \equiv f(M)f(N)$$

$$(f3) f(\lambda x.M) \equiv I_{\lambda} \lambda^* x.f(M)$$

$$(g1) g(xA_1 \dots A_n) \equiv xg(A_1) \dots g(A_n)$$

$$(g2) g(I_{\lambda}M) \equiv g(N) \text{ (} N \text{ は } M \text{ の } S, K\text{-正規形)}$$

$$(g3) g(I_{\lambda}MNA_1 \dots A_n) \equiv g(RA_1 \dots A_n) \text{ (} R \text{ は } MN \text{ の } S, K\text{-正規形)}$$

また, 変換 $F : \lambda\text{-term} \rightarrow C\lambda\text{-term}$ を $F(M) \equiv g(f(M))$ で定める. すると, 上の証明を見ればわかるように, 正規形 N を持つような $\lambda\text{-term}$ M に対しては, $F(M)$ の計算は止まり, 結果 N を返してくる. この計算途中で α -変換は1度も起こらない.