

The upper-bound of the volume of the dual polytopes of
integral convex polytopes P in $\mathbb{R}^n$
with $\text{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$

東北学院大学教養学部 土橋 宏康

(Hiroyasu Tsuchihashi)

P を $\mathbb{R}^n$ 内の整凸多面体とする。即ち、 P は $\mathbb{Z}^n$ の有限部分集合の凸包である。さらに、 P は $\dim P = n$, $\text{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たすと仮定する。このような P から得られる扇 $\{\mathbb{R}_{\geq 0} F \mid F \text{ は } \square P \text{ の面}\} \cup \{\{0\}\}$ に対応するコンパクト n 次元 toric 多様体 X_P は標準特異点しか持たず、 P の境界が単体的ならば X_P は $\mathbb{Q}$ -Fano 多様体であることが知られている。逆に、すべての $\mathbb{Q}$ -Fano toric 多様体は上記の条件を満たす整凸多面体から得られる。また、 X_P が $\mathbb{Q}$ -factorial でなくても反標準因子 $-K_{X_P}$ は $\mathbb{Q}$ -Cartier であり、 $(-K_{X_P})^n$ が定義できる。 P の双対多面体を

$$P^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \geq -1 \text{ for } \forall y \in P\}$$

により定義すれば $(-K_{X_P})^n = n! \text{vol}(P^*)$ であることが知られている。現在までに知られているものの中で $\text{vol}(P^*)$ が最大となる整凸多面体 P は Zaks, Perles & Wills [2] によって最初に発見された次の例で与えられる。

例 $y_1 = 2, y_2 = 3, \dots, y_{k+1} = y_1 y_2 \dots y_k + 1$ により数列 $\{y_k\}$ を定める。 P_n を ${}^t(1, 0, \dots, 0), \dots, {}^t(0, \dots, 0, 1), {}^t(2(1-y_n)/y_1, \dots, 2(1-y_n)/y_{n-1}, -1)$ を頂点とする単体とすれば、双対多面体 P_n^* は ${}^t(-1+y_1, -1, \dots, -1), \dots, {}^t(-1, \dots, -1, -1+y_{n-1}, -1), {}^t(-1, \dots, -1, -1+2(y_n-1)), {}^t(-1, \dots, -1)$ を頂点とする単体である。従って、 P_n^* も整凸多面体であり、 $\text{Int}(P_n) \cap \mathbb{Z}^n = \text{Int}(P_n^*) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ である。また $n! \text{vol}(P_n^*) = y_1 y_2 \dots y_{n-1} 2(y_n-1) = 2(y_n-1)^2$ である。

予想 A_n ($n \geq 3$) P が $\text{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の n 次元整凸多面体ならば、 $n! \text{vol}(P^*) \leq 2(y_n - 1)^2$ 。

注 $n = 2$ のとき P を ${}^t(1, 0)$, ${}^t(0, 1)$, ${}^t(-1, -1)$ を頂点とする単体とすれば $2! \text{vol}(P^*) = 9 > 2(y_2 - 1)^2 = 8$ だから A_2 は偽である。

上記の予想は次の定理により、簡単なアルゴリズムで確かめることのできる別の予想 ([1] の B_n) に帰着できる。

定理 n を 3 以上の整数とする。1 以上 $n - 1$ 以下の各整数 ℓ に対して次の条件を満たす正の実数 $L(\ell)$ が存在すると仮定する。

$$L(\ell) \geq L(\ell - 1) (L(\ell - 1) + 1).$$

$\mathbb{Q}^{\ell}_0$ の任意の点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_\ell)$ に対して $\text{Int}(\Delta(x)) \cap \mathbb{Z}^\ell = \{0\}$ ならば $1 + x_1 + x_2 + \dots + x_\ell \leq L(\ell)$ 。ここに、 $\Delta(x)$ は $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1), -x$ を頂点とする単体である。

このとき、 $\text{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の任意の整凸多面体 P に対して $n! \text{vol}(P^*) \leq 2L(n-1)^2$ である。

$y_{\ell+1} - 1 = y_1 y_2 \dots y_\ell = (y_\ell - 1) y_\ell$ であるから、上記の定理で $L(\ell) = y_{\ell+1} - 1$ とすることができれば予想 A_n は正しい。ところが、 $L(1) = 2 = y_2 - 1$, $L(2) = 6 = y_3 - 1$ とできることは簡単に分るから ([1])、予想 A_3 が正しいことも分る。また、計算機により $\ell \leq 5$ に対して $L(\ell) = y_{\ell+1} - 1$ とできることも確かめられた ([1])。

定理の証明 先ず、 P が単体の場合を考える。即ち、 P は $\mathbb{Z}^n$ の $n + 1$ 個の元 $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ の凸包である。このとき $v_{n+1} = -x_1 v_1 - x_2 v_2 - \dots - x_n v_n$ を満たす正有理数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ がある。ここで、 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 1$ としてよい。 $M = v_1 \mathbb{Z} \oplus v_2 \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus v_n \mathbb{Z}$ とすれば、 M は $\mathbb{Z}^n$

の指数有限な部分加群であるから、

$$\begin{aligned} \text{vol}(P^*) &\leq \text{vol}_{M^*}(P^*) = \text{vol}(\Delta({}^t(x_1, x_2, \dots, x_n))^*) \\ &= (1/n!)(1 + \sum_{j=1}^n x_j)^n / (x_1 x_2 \dots x_n) \end{aligned}$$

である。次に、 $w_j = x_j / (1 + x_n)$ とおけば、 $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_{n-1} \geq 1/2$ 、 $\text{Int}(\Delta({}^t(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}))) \cap \mathbb{Z}^{n-1} = \{0\}$ 、

$(1 + \sum_{j=1}^n x_j)^n / (x_1 x_2 \dots x_n) = (1 + 1/x_n)(1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)^n / (w_1 w_2 \dots w_{n-1}) \leq 2 (1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)^n / (w_1 w_2 \dots w_{n-1})$ であるから、次の補題により P が単体の場合の証明は終る。

補題 1 $w = {}^t(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{Q}_{>0}^{n-1}$ が $\text{Int}(\Delta(w)) \cap \mathbb{Z}^{n-1} = \{0\}$ 、 $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_{n-1} \geq 1/2$ を満たせば

$$(1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)^n / (w_1 w_2 \dots w_{n-1}) \leq L(n-1)^2$$

証明 $n = 3$ のときは簡単に確かめられる。以下、 n を 4 以上の整数とする。 $w_j^1 = w_j / (1 + w_{n-1})$ とすると

$$\text{Int}(\Delta({}^t(w_1^1, w_2^1, \dots, w_{n-2}^1))) \cap \mathbb{Z}^{n-2} = \{0\},$$

$$w_1^1 \geq w_2^1 \geq \dots \geq w_{n-2}^1 \geq 1/3,$$

$$(1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)^n / (w_1 w_2 \dots w_{n-1}) =$$

$$(1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)(1 + 1/w_{n-1})(1 + \sum_{j=1}^{n-2} w_j^1)^{n-1} / (w_1^1 w_2^1 \dots w_{n-2}^1)$$

となる。

最初に、 $w_{n-2}^1 \geq 1/2$ の場合を考える。帰納法の仮定より

$$(1 + \sum_{j=1}^{n-2} w_j^1)^{n-1} / (w_1^1 w_2^1 \dots w_{n-2}^1) \leq L(n-2)^2.$$

$w_{n-1} \geq L(n-2)$ ならば $(1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)(1 + 1/w_{n-1}) \leq L(n-1)(1 + 1/L(n-2)) = L(n-1)(L(n-2) + 1)/L(n-2)$ だから

$(1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)^n / (w_1 w_2 \dots w_{n-1}) \leq L(n-2)^2 L(n-1)(L(n-2) + 1)/L(n-2) = L(n-1)L(n-2)(L(n-2) + 1) \leq L(n-1)^2$ 、 $w_{n-1} < L(n-2)$ ならば

$(1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)(1 + 1/w_{n-1}) = (1 + \sum_{j=1}^{n-2} w_j^1)(1 + w_{n-1})^2 / w_{n-1} \leq L(n-2)(1 + L(n-2))^2 / L(n-2) = (1 + L(n-2))^2$ だから

$$(1 + \sum_{j=1}^{n-1} w_j)^n / (w_1 w_2 \dots w_{n-1}) \leq L(n-2)^2 (L(n-2) + 1)^2 \leq L(n-1)^2.$$

次に、 $w_{n-2}^1 < 1/2$ の場合を考える。このとき、 $w_{n-1} < 1$ である。 $w_j^k = w_j^{k-1} / (1 + w_{n-k}^{k-1})$ ($2 \leq k \leq n-2, 1 \leq j \leq n-k-1$) とすれば

$$w_1^k \geq w_2^k \geq \dots \geq w_{n-k-1}^k \geq 1/(k+2),$$

$$\text{Int}(\Delta(w_1^k, w_2^k, \dots, w_{n-k-1}^k)) \cap \mathbb{Z}^{n-k-1} = \{0\}$$

である。従って、特に $w_1^{n-2} \leq 1$ である。まず、ある k ($2 \leq k \leq n-2$) に対して $w_{n-2}^1, w_{n-3}^2, \dots, w_{n-k}^{k-1} < 1/2$, $w_{n-k-1}^k \geq 1/2$ であると仮定する。このとき、 $2 \leq j < k$ に対して $(1+w_{n-j-1}^j)^{j+2}/w_{n-j-1}^j$

$$\leq \max((1+1/2)^{j+2}/(1/2), (1+1/(j+2))^{j+2}/(1/(j+2)))$$

$$= \max(3^{j+2}/2^{j+1}, (j+3)^{j+2}/(j+2)^{j+1}) < y_{j+2-1} < y_{j+2}.$$

また

$$((1+w_{n-2}^1)^3/w_{n-2}^1)((1+w_{n-1}^2)^2/w_{n-1}^2) \leq (4^3/3^2)((1+1/2)^2/(1/2))$$

$$= 32 < y_3 y_2 y_1 \quad \text{である。一方、} k \leq n-3 \text{ のとき}$$

$$(1 + \sum_{j=1}^k w_j^j)^n / (w_1^k w_2^k \dots w_{n-k-1}^k)$$

$$= (1 + \sum_{j=1}^{k-1} w_j^j)^k (1 + \sum_{j=1}^{k-1} w_j^j)^{n-k} / (w_1^k w_2^k \dots w_{n-k-1}^k)$$

$$\leq L(n-k-1)^k L(n-k-1)^2 = L(n-k-1)^{k+2} \leq L(n-k-1)^{k-1} < L(n-k)^{k-1} < \dots < L(n-1)$$

であり、 $k = n-2$ のときも、 $(1+w_1^1)^{n-2}(1+w_1^2)^2/w_1^k \leq 2^{n-2} \cdot 9/2 < y_{n-1} \leq L(n-1)$ である。従って、

$$(1 + \sum_{j=1}^n w_j^j)^n / (w_1 w_2 \dots w_{n-1})$$

$$= ((1 + \sum_{j=1}^2 w_j^j)^n / (w_1^1 w_2^1 \dots w_{n-2}^1))((1+w_{n-1}^2)^2/w_{n-1}^2) = \dots$$

$$= ((1 + \sum_{j=1}^{k-1} w_j^j)^n / (w_1^k w_2^k \dots w_{n-k-1}^k))((1+w_{n-k}^{k-1})^{k+1}/w_{n-k}^{k-1}) \dots$$

$$((1+w_{n-1}^2)^2/w_{n-1}^2) < L(n-1) y_{k+1} \dots y_2 y_1 = L(n-1) (y_{k+2-1}) \leq$$

$$L(n-1) (y_{n-1}) \leq L(n-1)^2 \quad \text{である。最後に、} w_{n-2}^1, w_{n-3}^2, \dots, w_1^{n-2} < 1/2 \text{ のときは、}$$

$$(1 + \sum_{j=1}^n w_j^j)^n / (w_1 w_2 \dots w_{n-1})$$

$$= ((1+w_1^{n-2})^n/w_1^{n-2})((1+w_2^{n-3})^{n-1}/w_2^{n-3}) \dots ((1+w_{n-1}^2)^2/w_{n-1}^2)$$

$$< (y_{n-1}) y_{n-1} \dots y_2 y_1 = (y_{n-1})^2 \leq L(n-1)^2 \quad \text{である。} \quad \blacksquare$$

次に、 P が単体でない場合を考える。 $\mathbb{R}^n$ 内の凸体 Q_1, Q_2 に対して、 $Q_1 \subset Q_2$ ならば $Q_1^* \supset Q_2^*$ であることに注意すると P は包含関係に関して極小と仮定してよい。即ち、 Q が P に含まれる n 次元整凸多面体ならば $Q = P$ かまたは $0 \notin \text{Int}(Q)$ 。

補題 2 Q を $\mathbb{R}^n$ 内の原点を内部に含む凸体とする。 Q が単体でなければ、次の条件を満たす凸多面体 Q_0 が存在する。

(*) $0 \in \text{Int}(Q_0)$, $\{\text{the vertices of } Q_0\} \subseteq \{\text{the vertices of } Q\}$

証明 $v_1, v_2, \dots, v_s$ を Q の頂点とする。各頂点 v_j に対して $0 \in v_j v_j$ を満たす Q の境界上の点 v_j が唯一つ存在する。 F_j を v_j を内部に含む Q の面とする (v_j が頂点のときは $F_j = v_j$)。 v_j と F_j の凸包 Q_j が Q に等しくなれば、 $Q_0 = Q_j$ は (*) を満たす。そこですべての j について $Q_j = Q$ であると仮定する。このとき、 v_j 以外の Q の頂点はすべて F_j 上にあるから $\langle v_k, u_j \rangle = -1 (j \neq k)$ を満たす $\mathbb{R}^n$ の元 u_j が存在する。すると $s \neq j \neq k$ ($s \neq j = k$) のとき $\langle v_k - v_s, u_j \rangle = 0$ (> 0) だから $v_1 - v_s, v_2 - v_s, \dots, v_{s-1} - v_s$ は線型独立であることになり、 Q は単体であることになる。 ■

$Q = P$ に対して、上の補題の条件 (*) を満たす凸多面体の中で次元が最大のもを一つ選んで P_0 とし、その次元を m とする。 P は極小であるから、 $m < n$ である。 $v_1, v_2, \dots, v_s$ を P の頂点とする。このとき、 P_0 の頂点は $v_1, v_2, \dots, v_r$ ($r < s$) であるとしてよい。 H を P_0 で張られる $\mathbb{R}^n$ の部分空間とし、 $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/H$ を射影とする。 P は極小であるから、 $p(v_{r+1}), p(v_{r+2}), \dots, p(v_s)$ は $p(P)$ の頂点である。さらに、 $p(P)$ が単体であることも次のようにしてわかる。 $Q = p(P)$ が単体でなければ、上の補題により $\{v_{r+1}, \dots, v_s\}$ の固有部分集合 $\{u_1, \dots, u_\ell\}$ で $p(u_1), \dots, p(u_\ell)$ の凸包が原点を内部に含むものがある。すると $u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_r$ の凸包は条件 (*) を満たし次元は m より大きいから、 P_0 の選び方に矛盾する。従って、 $n - m + 1 = s - r$ である。以下で、 P^* の体積を評価するために射影 $P^* \rightarrow P^*_0$ の fiber の体積の評価を考える。正の有理数 $b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_s$ で $b_{r+1} + b_{r+2} + \dots + b_s = 1, b_{r+1}p(v_{r+1}) + b_{r+2}p(v_{r+2}) + \dots + b_s p(v_s) = 0$ を満たすものが存在する。このとき、 $u_0 := b_{r+1}v_{r+1} + b_{r+2}v_{r+2} + \dots + b_s v_s$ は H に含まれる。 $u_0 \neq 0$ ならば $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ の中の一次独立な元 $u_1, u_2, \dots, u_\ell$ で $u_0, u_1, \dots, u_\ell$ の凸包 Q_0 が原点を内部に含むものがある。また、 $u_1, \dots, u_\ell, v_{r+1}, \dots, v_s$ の凸包を Q とする。 ($u_0 = 0$ のときは $Q_0 = \{0\}$, Q は $v_{r+1}, \dots, v_s$ の凸包とする。) このとき、 Q は単体であり、原点を内部に含む。 $n > \dim Q = \ell + n - m$ だから $\ell < m$ である。 I と J をそれぞれ Q と Q_0 で張られる $\mathbb{R}^n$ の部分空間とすれば、 $J = H \cap I, \mathbb{R}^n = H +$

I である。それゆえ、 $\mathbb{R}^n/H \cong I/J$ である。 $q_1 : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow H^*$, $q_2 : I^* \rightarrow J^*$, $j_1 : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow I^*$, $j_2 : H^* \rightarrow J^*$ を自然な射影とする。このとき、 $q_2 \circ j_1 = j_2 \circ q_1$, $q_1(P^*) \subset P_0^*$, $q_2(Q^*) = Q_0^*$, $j_1(P^*) \subset Q^*$, $j_2(P_0^*) \subset Q_0^*$ である。また、 $H^*(J^*)$ の点 x_1 (x_2) に対して $q_1^{-1}(x_1)$ ($q_2^{-1}(x_2)$) 内の凸体 C_1 (C_2) の体積を $\text{vol}(C_1) = \text{vol}(C_1 - v_1)$ ($\text{vol}(C_2) = \text{vol}(C_2 - v_2)$) で定義する。ここに、 v_1 (v_2) は $q_1^{-1}(x_1)$ ($q_2^{-1}(x_2)$) の点である。 j_1 の $\ker(q_1)$ への制限は $\ker(q_2)$ の上への同型写像であるから、 P_0^* の点 v に対して $\text{vol}(q_1^{-1}(v) \cap P^*) \leq \text{vol}(q_2^{-1}(j_2(v)) \cap Q^*)$ である。一方、 $u_1^*, \dots, u_l^*, v_{r+1}^*, \dots, v_s^*$ を $\langle u_j, u_j^* \rangle > 0$, $\langle v_j, v_j^* \rangle > 0$ を満たす Q^* の頂点とし、 $u_0^*, u_1^*, \dots, u_l^*$ を $\langle u_j, u_j^* \rangle > 0$ を満たす Q_0^* の頂点とする (ただし、 $u_0 = 0$ のときは $u_0^* = 0$) と、 $q_2(u_j^*) = u_j$, $q_2(v_j^*) = u_0$ である。従って、 Q_0^* の任意の点 u に対して $h := \text{vol}(q_2^{-1}(u_0^*) \cap Q^*) \geq \text{vol}(q_2^{-1}(u) \cap Q^*)$ である。それゆえ、 $h \geq \max\{\text{vol}(q_1^{-1}(v) \cap P^*) \mid v \in P_0^*\}$ である。

補題 3 $h \leq (n-m+1)L(l) \dots L(l+n-m-1)$ ただし $L(0) = 1$.

証明 先ず、 $(n-m+l)! \text{vol}(Q^*) = l! \text{vol}(Q_0^*) (n-m)! h$ であることに注意する。 $c_1 + c_2 + \dots + c_{n-m+l+1} = 1, c_1 u_1 + \dots + c_l u_l + c_{l+1} v_{r+1} + \dots + c_{n-m+l+1} v_s = 0$ を満たす正の有理数 $c_1, c_2, \dots, c_{n-m+l+1}$ が存在する。ここで、 $c_{l+1} \geq c_{l+2} \geq \dots \geq c_{n-m+l+1}$ と仮定してよい。 $L(L')$ を $u_1, \dots, u_l, v_{r+1}, \dots, v_{s-1}$ ($u_1, \dots, u_l$) で生成される $I \cap \mathbb{Z}^n$ ($J \cap \mathbb{Z}^n$) の部分加群とする。 $v_s = -(c_1/c_{n-m+l+1})u_1 - \dots - (c_{n-m+l}/c_{n-m+l+1})v_{s-1}$ ($u_0 = -(c_1/(1-c_1-\dots-c_l))u_1 - \dots - (c_l/(1-c_1-\dots-c_l))u_l$) だから $(n-m+l)! \text{vol}(Q^*) = c_1^{-1} c_2^{-1} \dots c_{n-m+l}^{-1} [I \cap \mathbb{Z}^n : L]^{-1} (l! \text{vol}(Q_0^*) = c_1^{-1} c_2^{-1} \dots c_l^{-1} [J \cap \mathbb{Z}^n : L']^{-1})$ である。 $[I \cap \mathbb{Z}^n : L] \geq [J \cap \mathbb{Z}^n : L']$ だから $(n-m)! h \leq c_l^{-1} c_{l+1}^{-1} \dots c_{n-m+l}^{-1}$ である。 $c_j' = c_j + \dots + c_{l+n-m+1}$ ($= 1 - c_1 - \dots - c_{j-1}$), $w_j = -(c_1/c_j')u_1 - \dots - (c_l/c_j')u_l - (c_{l+1}/c_j')v_{r+1} - \dots - (c_{j-1}/c_j')$

$/c_j)v_{j+n-\ell-1} = (c_j/c_j)v_{j+n-\ell} + \dots + (c_{\ell+n-m+1}/c_j)v_s$ とする。

このとき、 $(\mathbf{R}u_1 + \dots + \mathbf{R}u_\ell + \mathbf{R}v_{r+1} + \dots + \mathbf{R}v_{j+n-\ell-1}) \cap \overline{v_{j+n-\ell} \dots v_s} = \{w_j\}$ である。 $j \geq 2$ のとき、 $\text{Int}(Q) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ だから $L(j-1) \geq 1 + (c_1 + c_2 + \dots + c_{j-1})/c_j = 1 + (1 - c_j)/c_j = 1/c_j$ である。 $j=1$ のときは、 $1/c_j = 1 = L(0)$ である。従って、 $j \geq \ell + 1$ のとき $(n-m+\ell+2-j)c_j \geq c_j \geq L(j-1)^{-1}$ である。それゆえ、 $(n-m)!h \leq (n-m+1)L(\ell)(n-m)L(\ell+1)\dots 2L(\ell+n-m-1) = (n-m+1)!L(\ell)\dots L(\ell+n-m-1)$ 。 ■

$n-m+\ell = \dim Q \leq \dim P_0 = m$ だから $m \geq n/2$ である。特に、 $m = n/2$ ならば $\ell = 0$ 、従って $u_0 = 0$ である。

$n = 3$ のときは $m = 2$ である。 $u_0 = 0$ ならば $h \leq 2$ 、従って $\text{vol}(P^*) \leq \text{vol}(P_0^*)h \leq (9/2)2 < (1/3!)2(y_3-1)^2$ 。 $u_0 \neq 0$ ならば P は $GL(3, \mathbb{Z})$ の元により、次の 4 つの凸体のいずれかに移されることが容易にわかる。

(1) ${}^t(1, 0, 0), {}^t(0, 1, 0), {}^t(-1, -1, 0), {}^t(0, 0, 1), {}^t(1, 1, -1)$ の凸包

(2) ${}^t(\pm 1, -1, 0), {}^t(0, 1, 0), {}^t(0, -1, \pm 1)$ の凸包

(3) ${}^t(\pm 1, -1, 0), {}^t(0, 1, 0), {}^t(0, 0, 1), {}^t(0, -1, -1)$ の凸包

(4) ${}^t(\pm 1, -1, 0), {}^t(0, 1, 0), {}^t(1, 0, 2), {}^t(-1, -2, -2)$ の凸包

これらの凸体の双対多面体の体積はいずれも $(1/3!)2(y_3-1)^2$ 以下である。

$n = 4$ のときは $m = 2$ または 3 である。 $m = 2$ ならば $\text{vol}(P^*) \leq \text{vol}(P_0^*)h \leq (9/2)3L(0)L(1) < (1/4!)2L(3)^2$ 。 $m = 3$ ならば $\ell \leq m-1 = 2$ 、 $L(2) \geq y_3-1 = 6$ だから $\text{vol}(P_0^*)h \leq (1/3!)2L(2)^2 2L(\ell) < (1/4!)2L(3)^2$ である。

$n \geq 5$ のときは $m \geq 3$ である。従って、 $\text{vol}(P^*) \leq \text{vol}(P_0^*)h \leq (1/m!)2L(m-1)^2(n-m+1)L(\ell)\dots L(\ell+n-m-1) < (1/m!)2L(m-1)^2(n-m+1)(L(m-1)+1)\dots (L(n-2)+1) \leq (1/n!)2L(n-1)^2(n-m+1)((m+1)/(L(m-1)+1)\dots (n/L(n-2)+1) < (1/n!)2L(n-1)^2$ である。 ■

文献

- [1] 土橋宏康「 $\text{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$ を満たす $\mathbb{R}^n$ 内の整凸多面体 P の双対多面体の体積の上限について」数理解析研究所講究録「計算幾何学と離散幾何学」に掲載予定
- [2] J. Zaks, M. A. Perles and J. M. Wills, On the lattice vertex polytopes having interior lattice points, Elemente der Math., 37 No. 2, (1982), 44-46.