

相互作用戸田方程式と線形方程式

(付：直接法に於ける或る現象)

静 大 理 米 山 徹 (Yoneyama, Tohru)

P a r t I K d V 方程式

§ 1 K d V 方程式 と 線形方程式

§ 2 I n t K d V 方程式 と 線形方程式

§ 3 $\phi_i \rightarrow g_i$ の 変換

P a r t II T o d a 方程式

§ 4 T o d a 方程式 と 線形方程式

§ 5 I n t T o d a 方程式 と 線形方程式

§ 6 $\phi_i(n) \rightarrow V_i(n)$ の 変換

P a r t III 直接法

§ 7 直接法に於ける或る現象

P a r t I K d V 方程式

§ 1 K d V 方程式 と 線形方程式

K d V 方程式の形を

$$d u + 6 u \partial u + \partial^3 u = 0$$

とする. 但し $d \equiv \partial / \partial t$, $\partial \equiv \partial / \partial x$

I n t K d V 方程式の形は

$$d u_i + 6 u \partial u_i + \partial^3 u_i = 0$$

N-soliton solution; $u = \sum_{i=1}^N u_i$ (文献 1)

既に知られている (文献 2) 形から

$$\phi^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N), \quad B_{ij} = \phi_i \phi_j / (\kappa_i + \kappa_j)$$

とすると 行列 $M = I / (I + B)$ を使って, $g \equiv M \phi$ が

$$u_i \propto g_i^2 = (g g^T)_{ii}$$

を満たす. 尚 $u_i = 4 \kappa_i g_i^2$, $u = \sum u_i$ (文献 2)

x, t の scale 変換 をして線形項が残る様にする; 実数 a で $x = a X, t = a^3 T$ とすると,

$$d = a^{-3} d',$$

$$\partial = a^{-1} \partial',$$

$$\partial^3 = a^{-3} \partial'^3$$

であるから

$$a^{-3} d' u' + 6 a^{-1} u \partial' u' + a^{-3} \partial'^3 u' = 0$$

即ち

$$d' u' + 6 a^2 u' \partial' u' + \partial'^3 u' = 0$$

これは $u \rightarrow a^2 u'$ と書換えたと思ってもよい. 実はこれ

は $u \sim 0$ の所を考えていることに相当する。今後 X, T は使わない。

よって $a \rightarrow 0$ ($u \rightarrow 0$) で線形微分方程式

$$d u + \partial^3 u = 0$$

文献

1 T. Yoneyama: J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985) 1081.

2 M. Wadati and K. Sawada:

J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 312.

§ 2 Int KdV 方程式と線形方程式

これに対応する相互作用ソリトン方程式は

$$d u_i + \partial^3 u_i = 0$$

$$\text{or} \quad (d + \partial^3) u_i = 0$$

2成分逆散乱法の量 f_i, g_i の満たす式

$$(\partial - \kappa_i) f_i = u g_i,$$

$$(\partial + \kappa_i) g_i = -f_i$$

及び $d g = -A(t, x, \kappa) g + C(t, x, \kappa) f,$

$d f = A(t, x, \kappa) f + B(t, x, \kappa) g,$ 但し

$$A = -(4\kappa^3 + 2\kappa u + u_x)$$

$$B = -(4\kappa^2 u + 2\kappa u_x + 2u^2 + u_{xx})$$

$$C = 4\kappa^2 + 2u$$

よって

$$d g = -2(2 \kappa^2 + u)(\partial g) + u_x g$$

とも書けるが, これらの関係から

$$u_i = \alpha_i g_i^2, \quad (\alpha_i: \text{const.}) \quad (\text{文献 1}).$$

$u \rightarrow 0$ の時 $u_i = \alpha_i \phi_i^2$, $(g_i \rightarrow \phi_i)$ となるが

$$d u_i / \alpha_i = 2 \phi_i d \phi_i,$$

$$\partial^3 u_i / \alpha_i$$

$$= 2 \phi_i \partial^3 \phi_i + 6(\partial \phi_i)(\partial^2 \phi_i)$$

$$\partial^2 g_i = (-u + \kappa_i^2) g_i$$

$$\partial^2 \phi_i = \kappa_i^2 \phi_i$$

$$\partial^3 u_i / \alpha_i = 8 \kappa_i^3 \phi_i^2$$

$$\therefore d \phi_i = -4 \kappa_i^3 \phi_i$$

よって

$$\phi_i = \exp(\kappa_i x - 4 \kappa_i^3 t + c_i)$$

と広田の直接法などで出る $\exp$ の中の形が出た.

これは $u \rightarrow 0$ の所でソリトンの「シッポ」を捕まえた事になる.

In t K d V 方程式とは

$(d + 6 u \partial + \partial^3) g g^T$ の対角要素が 0 となることである.

§ 3 $\phi_i \rightarrow g_i$ の変換

$g \equiv M\phi$ と置いて M を求める事はこの研究会迄には出来なかった。[しかし、その後考えた所によると、何とか出せる見通しはついている。(' 87年12月現在)]

既に知られている文献2の形から

$$M = I / (I + B)$$

となることは分かっている。尚

$$g = M\phi,$$

$$u_i = 4\kappa_i g_i^2,$$

$$u = \sum u_i$$

であり、また

$$\partial^2 g = (k^2 - u)g$$

Part II Toda 方程式

§ 4 Toda 方程式 と 線形方程式

Toda 方程式;

$$d [d V(n) / (1 + V(n))] = \Delta^2 V(n),$$

但し $d \equiv \partial / \partial t$, Δ は差分演算子

Int Toda 方程式;

$$d [d V_i(n) / (1 + V(n))] = \Delta^2 V_i(n)$$

N-soliton solution; $u = \sum_{i=1}^N u_i$

既に知られている (文献3) 形から

$$P = I / (I + B),$$

$$V_i(n) = a(n) f_i(n) f_i(n+1),$$

$$V(n) = \sum V_i(n)$$

文献

3 T. Yoneyama: J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 753.

§5 Int Toda 方程式 と 線形方程式

KdV の時と同様に $V(n) \rightarrow 0$ の時の線形方程式を考えると

$$d^2 V_i(n) = \Delta^2 V_i(n)$$

$$\text{or} \quad (d^2 - \Delta^2) V_i(n) = 0$$

逆散乱法 (Flaschka) で $V(n) = 0$ とすると

$$\phi_i(n-1) + \phi_i(n+1) = 2\lambda_i \phi_i(n)$$

$$= (z_i^{-1} + z_i^1) \phi_i(n)$$

$$\phi_i(n+1) = z_i^{-1} \phi_i(n) \text{ とすると}$$

$$\phi_i(n) = \exp(-\alpha_i n)$$

次に $\phi_i(n)$ の t -dependence を求める.

$$d\phi_i = \frac{1}{2} [\phi_i(n-1) - \phi_i(n+1)]$$

$$= (\sinh \alpha_i) \phi_i(n)$$

$$\phi_i(t) = \exp(\sinh \alpha_i t) \equiv \exp(\beta_i t)$$

よって

$$\phi_i(t, n) = \exp(\beta_i t - \alpha_i n + c_i)$$

§ 6 $\phi_i(n) \rightarrow V_i(n)$ の変換

$f \equiv P\phi$ と置いて P を求める事はこの研究会迄には出来なかった。しかし既に知られている文献 3 の形から

$$P = I / (I + B)$$

となることは分かっている。尚

$$f = P\phi,$$

$$V_i(n) = a(n)f_i(n)f_i(n+1),$$

$$V(n) = \sum V_i(n)$$

である。

Part III 直接法

§ 7 直接法に於ける或る現象

Int KdV 方程式の線形の形

$$(d + \partial^3) g_i^2 = 0$$

と広田の直接法の形

$$D_x (D_t + D_x^3) F \cdot F = 0$$

との類似が目につく。そこで

$$\partial (d + \partial^3) g_i^2$$

と $D_x (D_t + D_x^3) g_i \cdot g_i$

との差を出して見る.

$$D_x = (\partial - \partial'), \quad D_t = (d - d')$$

であるから

$$D_x D_t g_i \cdot g_i = 2g(d\partial g) - 2(dg)(\partial g)$$

$$D_x^4 g_i \cdot g_i = 2g(\partial^4 g) - 8(\partial g)(\partial^3 g) + 6(\partial^2 g)^2$$

となり, 又

$$\begin{aligned} \partial d(g_i^2) &= 2d[g_i(\partial g_i)] \\ &= 2g_i(d\partial g_i) + 2(dg_i)(\partial g_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial^4(g_i^2) &= 2g_i(\partial^4 g_i) + 8(\partial g_i)(\partial^3 g_i) \\ &\quad + 6(\partial^2 g_i)^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} D_x (D_t + D_x^3) g_i \cdot g_i - \partial (d + \partial^3) g_i^2 \\ &= -4(dg_i)(\partial g_i) - 16(\partial g_i)(\partial^3 g_i) \\ &= 12(\partial g_i)[u_x g_i + 2u(\partial g_i)] \\ &= 12[u_x g_i(\partial g_i) + 2u(\partial g_i)^2] \end{aligned}$$

これに対して

$$\begin{aligned} \partial [6u(\partial g_i^2)] &= 12\partial(ug_i\partial g_i) \\ &= 12[u_x g_i(\partial g_i) + u(\partial g_i)^2 + u g_i(\partial^2 g_i)] \end{aligned}$$

となるが $u(\partial g_i)^2 \neq u g_i(\partial^2 g_i)$ なので

差は 0 では ナイ. 即ち

$$D_x(D_t + D_x^3) g_i \cdot g_i \\ \neq \partial(d + 6u\partial + \partial^3) g_i^2 = 0$$

双線形方程式は exact に $F = \det(I + B)$ が満している
るので, g_i に期待しても無理であろう. 但し次の関係が注
目される.

$$g = (I + B)^{-1} \phi \\ = [\det(I + B)]^{-1} (\widetilde{I + B}) \phi \\ = F^{-1} (\widetilde{I + B}) \phi$$

ここで $\widetilde{A}$ は A の随伴行列式である.

[当日ロビーで広田先生に教えていただいたことを基に,
式をきちんと書いてみると ナント

$$D_x [D_t + 6u D_x + D_x^3] g_i \cdot g_i = 0$$

という, 双非線形方程式とでもいうような奇妙な形となる.
但し [] の前の D_x は u に作用しないものとする.]

以上は K d V 方程式についてであるが T o d a 方程式
についてもこれから考えたい.

以上