

非対称な境界条件をもつベナール対流における波の非線形共鳴

和歌山大学・教育 水島二郎 (Jiro Mizushima)

1. はじめに

下から熱せられた水平流体層に発生する対流は J. Thomson (1882), によって初めて報告され (P. G. Drazin & W. H. Reed (1981), *Hydrodynamic stability*, 参照), Bénard (1900) により定量的に調べられた。Bénard は 1mm 程度の非常に薄い流体層を用いて実験を行った。実験に用いた流体層の底面は金属板, 上面は空気に接する自由表面であった。底面の金属板を一様に徐々に熱して行く和我々がよく知っている六角形のセルが生じた。セルの中央では上昇流が起こり, セルの周辺部では下降流が発生した。その後, ベナール対流の研究は Bénard が論文の中で示した '美しい形' に刺激されて活発に行われてきたが, '形の発生' に関してはまだまだ十分に解明されていないように思われる。

たとえば, 流れが不安定となる臨界点においては不安定攪乱のモード (波数・形) は線形安定性理論により決定されるが, パラメータ (レイノルズ数・レイリー数など) が臨界値を越えると複数個または無限個のモードが不安定となり, これまでの弱非線形安定性理論では, 不安定となった複数個のモードのうちどのモードが実際に現れるのかを示すことは困難であった。実際に実験で現れるモードを理論的に特定しようとする試みは主に, あるモードの平衡解に対する変調不安定性を調べる方法、モード間の非線形相互作用、平衡解に対する (3 次元) 微小攪乱による不安定性の 3 つの方法で行われている。

ベナール対流の線形安定性は Pellew & Southwell (1940)、Jeffreys (1928) および Reid & Harris (1958) により調べられた。弱非線形安定性は Gor'kov (1957) や Malkus & Veronis (1958) によって調べられ、ランダウ係数が負であること、すなわち超臨界平衡状態が存在することが示され、その定常解が求められている。また、Schlüter, Lortz & Busse (1965) は弱非線形安定性の方法を用いて定常解を計算し 2 次元ロール状の対流のみが安定であることを示し、その安定条件を求めた。さらに、ロール状の対流が上下 2 枚の平板間の熱輸送を最大にすることが示された。これは Malkus & Veronis (1958) の結果とも一致している。Busse (1967) はロール解の非線形定常解を求めさらにそのロール解の 3 次元攪乱に対する線形安定性を調べた。その結果、ロール解は zigzag モードと cross-roll モードに対して不安定であり、ロール解が安定に存在するパラメータ領域は元の静止状態の不安定領域に比べてずっと小さくなることがわかった。Busse の結果は Busse & Whitehead (1971) により実験的に確かめられた。Clever & Busse (1974) と Busse & Clever (1979) はさらに詳しく定常ロール解の性質を調べ、その 3 次元攪乱に対する線形安定性を調べた。その結果、さきに挙げた zigzag と cross-roll の 2 つの不安定性以外にも Eckhaus instability, Oscillatory instability, knot instability, skewed varicose instability などがあることが明らかになった。そして、2 次元ロール解が安定に存在するパラメータ領域が詳しく調べられた。そのパラメータ領域はブッセのバルーンと呼ばれている。

二つのモードが同時に不安定となるときのモード間の相互作用については Kidachi (1982) と Knobloch & Guckenheimer (1983) により調べられた。彼らは有限の直方体の流体層に発生するベナール対流では同時に二つのモードが不安定となり得ることを示し、それらのモードの相互作用を詳しく調べ、二つの解の重なり合った混合解も安定に存在する可能性も示した。これとよく似た解は Busse & Or (1986) によっても得られている。また、二つのモード間の共鳴相互作用については Busse (1987) により 1:2 共鳴が, Mizushima &

Fujimura (1991) により 1:3 共鳴が詳しく調べられた。これらの非線形共鳴相互作用は Dangelmayr (1986), Dangelmayr & Armbruster (1986) により正規形の理論 (The theory of normal forms) を用いてより一般的に $n:m$ 共鳴として定式化された。

六角形セルの形成については Palm (1960) がその安定性を調べた。彼は流体の粘性が温度に依存すると仮定して六角形セルが安定になり得ることを示した。同様な研究は Busse (1967) や Palm, Ellingsen & Gjevik (1967) によっても行われている。また, Scanlon & Segel (1967) は表面張力の効果を取り入れることにより六角形セルが安定となることを示した。これらの結果は Koschmieder (1967) によって実験的に確かめられた。

ここでは、底が粘着境界条件、上面がすべり境界条件の場合のベナール対流を取り扱う。まず、線形安定性を調べ、次に非線形平衡解の性質を詳しく調べる。そこで得られた非線形平衡解の性質は 1:2, 1:2:3 共鳴等のモード間の相互作用で説明できることを弱非線形安定性理論により示す。さらに弱非線形安定性理論から得られる結果をさらに拡張することによって、モード間の相互作用のモデル化を行う。このモデル方程式を用いると、多くのモードが同時に不安定となるときのどのモードまたはモードの組合せが安定に出現するか予測することが可能となることを示す。

2. 基礎方程式と線形安定性

温度の異なる 2 枚の水平平板間に流体が満たされているとし、座標系は鉛直方向に z_* 軸をとり、それに直角に x_* 軸と y_* 軸をとる。次元を持つ変数にアスタリスク*を付けることにすると、流体が静止した熱伝導状態は次の式で表される。

$$\mathbf{U}_* = \mathbf{0}, \quad \Theta_* = \theta_0 - \beta z_*,$$

$$P_* = p_0 - g\rho_0(z_* + \frac{1}{2}\gamma\beta z_*^2), \quad \text{for } 0 \leq z_* \leq d, \quad (1)$$

ここで、 θ_0 は流体層の底面における温度であり、 ρ_0 はそこでの流体の密度である。 β は静止状態における流体層中の温度勾配で、 $\beta = \delta\theta/d$ で表される。 $\delta\theta$ は上下 2 枚の固体壁の温度差であり、 d は平板間の間隔である。また、 γ は流体の熱膨張係数であり、 g は重力加速度を表す。浮力項を除いては流体の物質的性質は一定であるとするブシネスク近似を用いると、流体の速度 $\mathbf{u}$ と流体が静止した熱伝導状態からの温度の変化 θ を支配する方程式は次のように書くことができる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Gamma + PR\theta\lambda + P\Delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \lambda \cdot \mathbf{u} + \Delta \theta, \quad (4)$$

ここで、すべての物理量は代表的な長さとして流体層の厚さ d 、代表的な時間として d^2/κ 、代表的な温度として上下 2 枚の平板間の温度差 $\delta\theta$ を用いて無次元化されている。 λ は z 方向の単位ベクトルを表す。(3) 式において勾配の形でかける項はすべて $\nabla \Gamma$ の項に含まれている。また、 R はレイリー数、 P はプラントル数であり、次式で定義される。

$$R = \frac{\gamma g \delta \theta d^3}{\nu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (5)$$

ここで、 κ は流体の熱拡散係数、 ν は動粘性係数を表す。底面の固体壁と上面の自由面における速度 $\mathbf{u}$ と温度 θ に対する境界条件は次のように書ける。

$$u = v = w = \theta = 0 \quad \text{at } z = -1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = w = \theta = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ である。すべり・粘着境界条件をもつベナール対流の線形安定性は $z = -1$ と $z = 1$ に2枚の平板境界をもつベナール対流において z 方向に奇対称性を持つ攪乱に対する線形安定性と等価である。ベナール対流の線形安定性は **Pellew & Southwell (1940)**, **Jeffreys (1928)** や **Reid & Harris (1958)** により詳しく調べられた。その結果次のようなことがわかっている。この問題では安定性の交代の原理 (**principle of exchange of stability**) が成り立ち、もし増幅する攪乱があるとすればその攪乱の波としての位相速度はゼロである。また、すべり・粘着条件を持つベナール対流における不安定モードは鉛直方向に対称性を持たない。図1に線形中立安定曲線を示す。線形中立安定曲線はプラントル数に依存しない。また図2に $P = 7$ の場合の線形増幅率を示す。

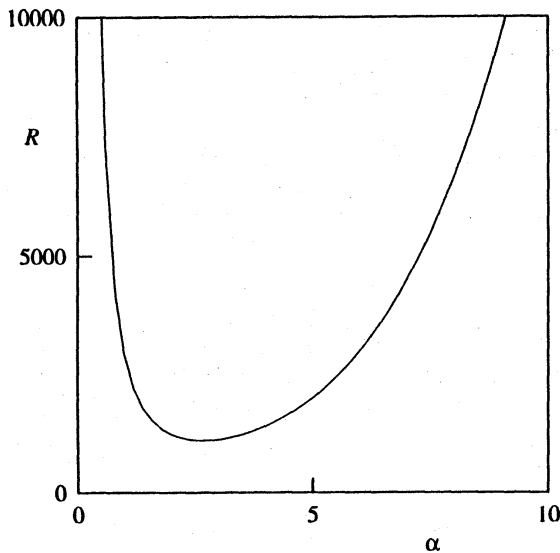


図1. 線形中立安定曲線。

プラントル数には依存しない。

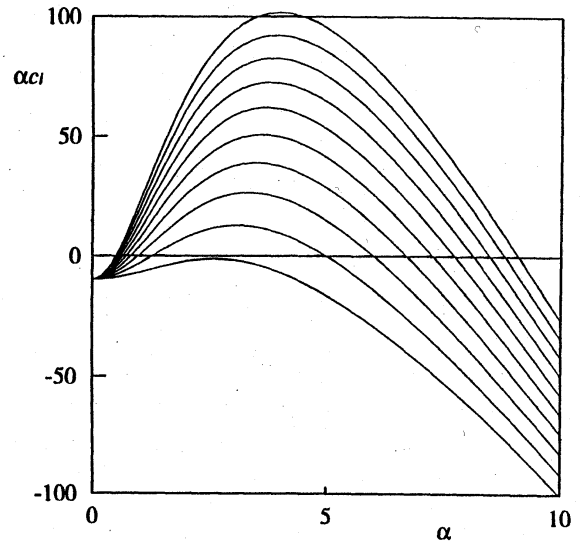


図2. 線形増幅率 αc_1 の分布。 $P = 7.0$ 。

攪乱の線形臨界レイリー数 R_c は 1100.649 であり、そのときの水平方向の臨界波数 α_c は 2.682 である。線形安定性理論の範囲内では増幅する攪乱の平面形については何もわからないが、仮に2次元ロール形の攪乱を考えると臨界波長は $2\pi/\alpha_c = 2.343$ となり、およそ流体層の厚さの2倍の周期を持つロール状の2次対流が発生することになる。また、2枚の平板間に発生するベナール対流での臨界波数 2.016 と比べるとやや扁平になっている。

3. ロール状攪乱の非線形平衡解

この節では、2次元ロール状攪乱の非線形平衡解を詳しく調べる。 (x, z) 平面での流れ関数 ψ を導入すると、(1), (2), (3) 式は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - P \Delta^2 \psi + P R \frac{\partial \theta}{\partial x} = J(\psi, \Delta \psi), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Delta \theta = J(\psi, \theta), \quad (8)$$

ここで、 $J(f, g)$ は次式で定義されるヤコビアンであり、

$$J(f, g) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)},$$

Δ は次式で定義される (x, z) -平面における 2 次元ラプラシアンである。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

ψ と θ に対する境界条件は次のように書くことができる。

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \theta = 0 \quad \text{at } z = -1, \quad \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \theta = 0 \quad \text{at } z = 0. \quad (9)$$

ψ と θ を次のように x 方向にフーリエ展開する。

$$\psi = \sum_{n=-N}^N \phi_n e^{in\alpha x}, \quad (10)$$

$$\theta = \sum_{n=-N}^N \theta_n e^{in\alpha x}, \quad (11)$$

ただし、上式では展開を $n = -N$ から N までで打ち切った。 ϕ_n は純虚数であり、 $\phi_{-n} = -\phi_n$ の関係があり、 θ_n は実数で、 $\theta_{-n} = \theta_n$ の関係がある。フーリエ係数 ϕ_n と θ_n に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial S_n \phi_n}{\partial t} - P S_n^2 \phi_n + in\alpha P R \theta_n = N_{1n},$$

$$N_{1n} = \sum_{p+q=n} i\alpha [p\phi_p S_q D\phi_q - qD\phi_p S_q \phi_q], \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} + in\alpha \phi_n - S_n \theta_n = N_{2n},$$

$$N_{2n} = \sum_{p+q=n} i\alpha [p\phi_p D\theta_q - qD\phi_p \theta_q]. \quad (13)$$

ここでは、平衡解を求めるため上式で $\partial/\partial t = 0$ とおく。さらに、前節で述べたように攪乱は z 方向に対称性を持たないが、いま取り扱っている問題は $z = -1$ と $z = 1$ に 2 枚の平板間のベナール対流において z 方向に奇対称な攪乱が発生する問題と等価であるので、 ϕ_n お

よび θ_n を奇数次のチェビシェフ多項式で展開する。すなわち、 ϕ_n, θ_n を次のように展開する。

$$\phi_n = i \sum_{m=0}^M a_{nm} (1 - (2z)^2)^2 T_{2m+1}(z), \quad \theta_n = \sum_{m=0}^M b_{nm} (1 - (2z)^2)^2 T_{2m+1}(z). \quad (14)$$

ここで、 $T_n(x)$ は n 次のチェビシェフ多項式である。これらの展開式を (7), (8) 式に代入し、 $\partial/\partial t = 0$ とおいて得られる $2(N+1)(M+1)$ 個の実係数 a_{nm} と b_{nm} に対する代数方程式をガレルキン法を用いたニュートン・ラフソンの方法で解いた。

$P = 7.0$ の場合の非線形平衡解の $z = -1/\sqrt{2}$ での振幅 $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$ の分布を図 3 に示す。図 3 からわかるように平衡振幅は $R = 1200$ に対しては 1 本の曲線から成り立っているが、 $R = 1500$ に対しては 2 本の曲線から、 $R = 2000$ に対しては 3 本の曲線から成り立っていることが分かる。さらに大きな R に対して平衡振幅を表す曲線はより多くの曲線から構成されるであろうことが容易に想像できる。

後の比較のために $R = 1500$ での平衡振幅の分布を図 4 に示す。計算の方法から分かるように図 4 に示す解は $n = 0$ から $n = N$ までのすべてのフーリエモードが含まれているという意味ですべて混合解である。この分岐ダイアグラムは Busse (1987) が示した分岐ダイアグラムと同じ形をしている。Busse は流体密度が温度の 2 次関数であることを仮定し、鉛直方向に非対称な攪乱に対して弱非線形安定性理論によりこれと同じ形の分岐ダイアグラムを得た。非対称な攪乱が発生するメカニズムは異なっているが Busse が求めた分岐ダイアグラムとここで得られた分岐ダイアグラムは本質的には同じものを表している。そのことは次節で弱非線形安定性を調べるとさらに明らかになる。

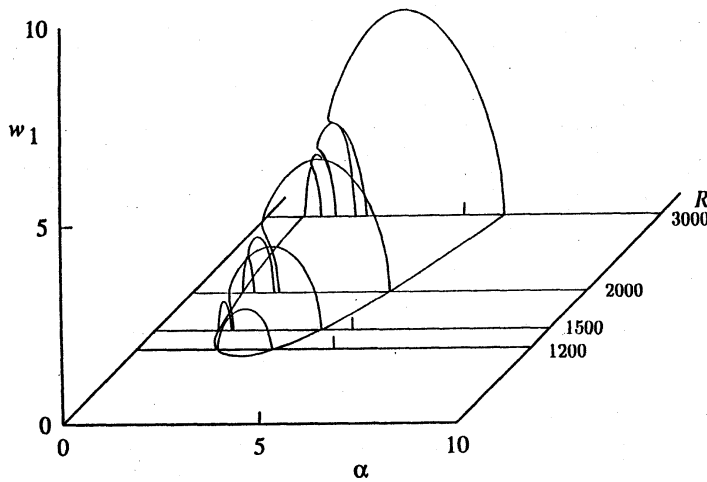


図 3. 非線形平衡解の $z = -1/\sqrt{2}$ での振幅 $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$ の分布。 $P = 7.0$ 。

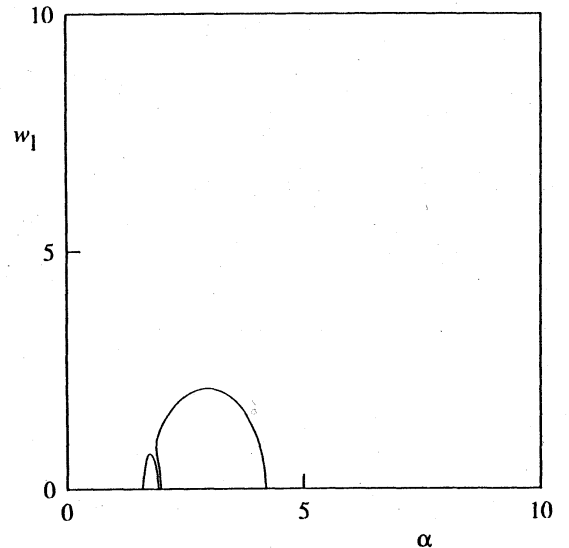


図 4. 非線形平衡解の $z = -1/\sqrt{2}$ での振幅 $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$ の分布。 $P = 7.0$ 。 $R = 1500$ 。

4. 弱非線形安定性理論

前節ではロール状攪乱の非線形平衡解を直接に求めた。その結果、平衡振幅を表す曲線は $R = 1200$ では 1 本であるが、レイリー数 R が大きくなるに従って多くの曲線から構成されるようになることがわかった。この結果はモード間の非線形共鳴で説明できることをこの節で示す。

振幅展開法を用いた通常の弱非線形安定性理論に従えば波数 α を持つ単一の基本モードの複素振幅 A_1 に対する振幅方程式が次のように得られる。

$$\frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1. \quad (15)$$

この振幅方程式に従えば、増幅攪乱 $\lambda_1 > 0$ はランダウ係数 λ_{-111} が負のときは平衡振幅 $|A_1|_{eq} = (-\lambda_1/\lambda_{-111})^{1/2}$ を持つ。比較的小さなレイリー数において $\alpha_c = 2.682$ に対してはのちに述べる高調波との共鳴の影響はなく(15)式が成り立ち、プラントル数 $P = 7.0$ において平衡振幅 $w_1 \equiv |A_1|_{eq}/\alpha$ を計算すると、図5のようになる。図5では比較のため前節で説明したフーリエ打ち切りによる結果も同時に示した。(15)式から計算した値は臨界レイリー数付近ではほぼ正しいがレイリー数が大きくなるに従ってフーリエ打ち切りによる正確な値からずれていく。

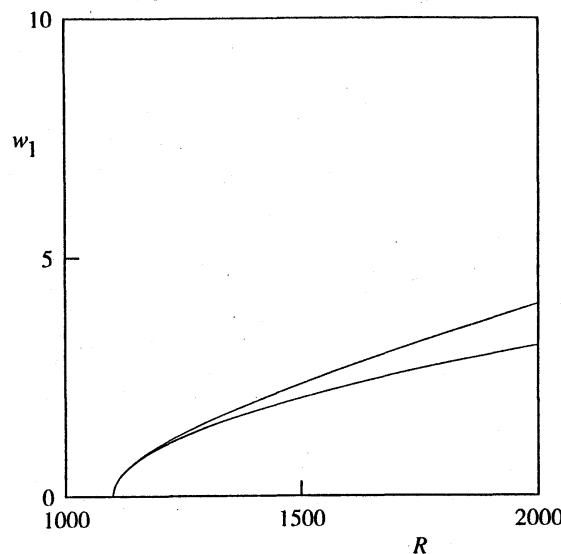


図5. 非線形平衡解の $z=0$ での振幅 $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$ (下側の曲線)と弱非線形安定性理論から求めた w_1 (上側の曲線)の比較. $P = 7.0$. $\alpha = 2.682$.

(15)式に従う限り、線形不安定な攪乱が振幅ゼロまで減衰することは考えることは不可能である。攪乱の振幅が小さくなると非線形項が無視でき、線形安定特性により攪乱は成長することが予想される。

鉛直流体層での自然対流の非線形発展過程においては基本波とその高調波との非線形共鳴により、同様な現象が現れた(Fujimura & Mizushima, 1987)。ここでも同じ非線形共鳴が起こっていると考えられる。基本波と高調波との非線形共鳴を考慮に入れると振幅方程式は次のようになる。

$$\frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-12} A_1^* A_2 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-212} |A_2|^2 A_1, \quad (16)$$

$$\frac{dA_2}{dt} = \lambda_2 A_2 + \lambda_{11} A_1^2 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2, \quad (17)$$

ここで、 A_1 及び A_2 はそれぞれ基本波及び高調波に対する複素振幅である。また、すべての係数 λ は実数である。この方程式はBusse (1987) が導いた方程式と同じ形をしており、Dangelmayr (1986), Dangelmayr & Armbruster (1986) が正規形の理論を用いて導いた方程式の特別な形になっている。

方程式 (16) と (17) の係数を実際に計算し、平衡解を求めた。図 6 に $P = 7.0$ 、 $R = 1500$ における平衡振幅 w_1 の分布を示す。フーリエ打ち切りの方から計算した結果図 4 と比較すると定性的にはもちろんのこと、定量的にもよく一致していることがわかる。前節でも述べたように図 4，すなわち図 6 でも同様であるが、これらの図で示される分岐ダイアグラムは Busse (1987) が求めた分岐ダイアグラムと定性的には同じ形となっている。

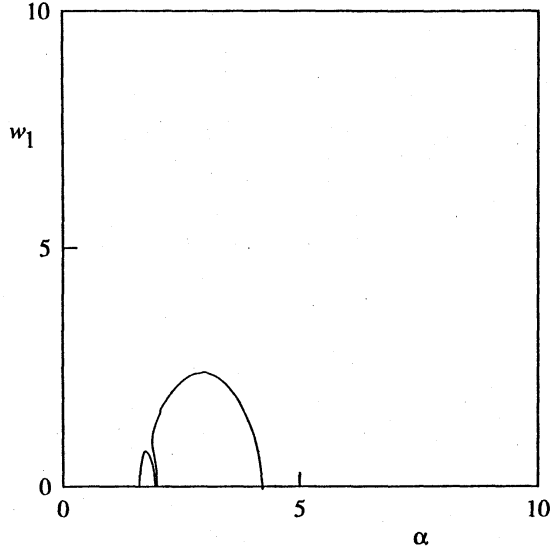


図 6. 弱非線形安定性理論から求めた w_1 の分布。
 $P = 7.0$. $R = 1500$.

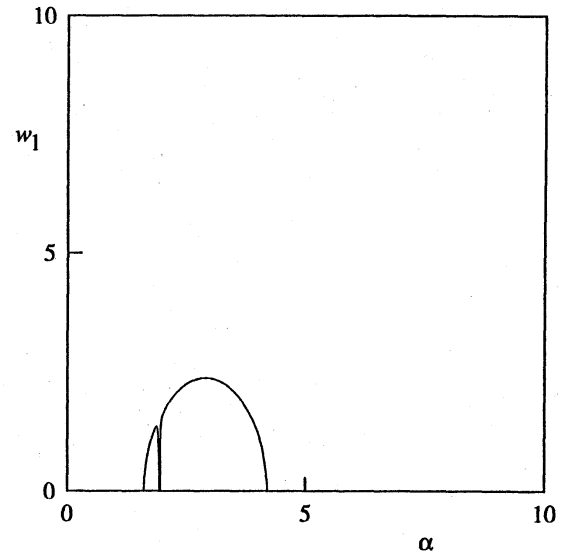


図 7. 弱非線形安定性理論から求めた w_1 の分布。
 $P = 7.0$. $R = 1500$. ただし、線形増幅率 λ_1 , λ_2 については線形安定性理論から得られる正確な値を、非線形項の係数については、 α によらず一定の値すなわち、 $\lambda_{11} = 0.2$, $\lambda_{12} = -1.0$, $\lambda_{13} = -1.1$, $\lambda_{21} = -0.2$, $\lambda_{22} = -1.1$, $\lambda_{23} = -1.0$ を用いた。

図 6 では方程式 (16), (17) の係数を元の基礎方程式 (12), (13) から評価し、その係数を用いて方程式 (16), (17) の平衡振幅を求めている。ところがこのように元の基礎方程式から正確方程式 (16), (17) の係数を評価せずに係数に適当な値を仮定するだけでも図 6 と定性的に同じ分岐ダイアグラムを求めることが可能である。図 7 は線形増幅率 λ_1 , λ_2 については線形安定性理論から得られる正確な値を、非線形項の係数については、 α によらず一定の値すなわち、 $\lambda_{11} = 0.2$, $\lambda_{12} = -1.0$, $\lambda_{13} = -1.1$, $\lambda_{21} = -0.2$, $\lambda_{22} = -1.1$, $\lambda_{23} = -1.0$ を用いて平衡振幅を求めた結果である。この図から、このように係数に適当な値を仮定しても定性的に正しい分岐ダイアグラムが得られることがわかった。

$R = 2000$ においては基本波と第一高調波および第二高調波との 3 波共鳴を取り扱わなければならない。また、 $R = 3000$ ではそれらに加えてさらに第三高調波との共鳴も考慮にいたれた 4 波共鳴を取り扱う必要がある。次節ではこれらの非線形共鳴をもっと一般的に取り扱う方法について考える。

5. モデル方程式

これからはモデル系を取り扱うこととし、臨界レイノルズ数 R_c は 1 に、臨界波数 α_c も 1 に規格化しておく。簡単のためにレイノルズ数が 1 よりも大きくなっても最大増幅モードは常に $\alpha = 1$ のモードであると仮定する。 $R \leq 10$ の範囲では不安定なモードは $\alpha \leq 2$ の範囲に入っている。

無限に広がった系を考えるので波数は 0 から無限に大きい値まで連続的にとることができるが、モデルとして有限の波数領域 $0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ の範囲にあるモードだけを考え、この波数領域を N 等分して波数 $\Delta\alpha \times n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) を持つ $N+1$ 個のモードのみを取り扱うことにする。ここで、 $\Delta\alpha = \alpha_{max}/N$ である。流体力学の基礎方程式から次の形の振幅方程式を振幅展開の方法により導くことができる。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p f_{np} A_{n-p} A_p + \sum_{p,q} g_{npq} A_{n-p-q} A_p A_q, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

ここで、いくつかの注意が必要である。中心多様体定理によれば、系は不安定モードの振幅だけで記述でき、安定モードの振幅は不安定モードの振幅と関数関係で結ばれている。しかし、ここでは特に安定モードの振幅も方程式 (1) で支配されているとしている。方程式 (18) ではすべてのモードが非線形共鳴を行っており、前節で求めた振幅方程式の自然な一般化になっている。

モデル方程式 (18) において係数 $f_{np} \equiv 0$ 、 $p+q \neq 0$ に対しては $g_{npq} \equiv 0$ の特別な場合について調べることにする。このとき方程式 (18) は

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_p d_{np} A_p^2 A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

となる。

方程式 (19) 式の定常解は単一モード解と混合モード解がある。単一モード解は $A_{neq} = \sqrt{-a_n/d_{nn}}$ となる。この単一モード解は自分自身のゆらぎに対しては常に安定であるが $q \neq n$ であるモード q のゆらぎに対しては $a_q < a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき安定であり、 $a_q > a_n \times d_{qn}/d_{nn}$ のとき不安定である。このことから、もし d_{np} が q に依存せずに一定であるならば線形増幅率が最大のモードだけが安定に残り、それ以外のモードは不安定になり、そのエネルギーは線形増幅率最大のモードに吸収されてしまうことが想像できる。 d_{np} が q に依存して変化するときでも比 d_{qn}/d_{nn} が 1 に近いときには線形増幅率最大のモードを含んでその周りのモードが生き残り、それ以外のモードは不安定なって、減衰してしまう。

混合モード解は d_{np} が n と p に依存しないで一定の時には存在しないが、一定でないときには存在する。混合解が存在する条件は d_{np} がつくる行列の行列式が正則であることである。混合モード解の安定条件は簡単に書き下すことができるが、その物理的解釈は簡単ではないのでここでは議論を行わないことにする。

方程式 (19) を初期値問題として数値的に解く。 $\alpha_{max} = 2.0$, $N = 20$ とする。 α のきざみ $\Delta\alpha$ は 0.1 である。 ランダウ係数に相当する係数 d_{np} は最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いることにする。 初期条件は $A_n = 0.01$ ($n = 1, 2, \dots, N$) とした。 $R = 10$ の場合の結果を図 8 に示す。 この図で $A(\alpha) = A_n$, $\alpha = n \times 0.1$ である。 図から分かるように初めは ($t \leq 5$) 各モードはそれぞれの持つ線形増幅率に従って増幅するが振幅が大きくなると非線形効果によって、より増幅率の大きいモードによりその成長が抑えられ、最大増幅率を持つモード以外は減衰させられてしまう。 その結果充分時間が経ったのちには最大増幅モードのみが生き残り他のモードは減衰してしまう。 この結果は線形安定性理論では複数のモードが不安定であるが、実験ではある波数のモードが現れることが多い理由の説明になっている。 また、この結果は上の単一モードの安定性から想像できる結果ともよく一致している。

ランダウ係数 d_{np} だけを $d_{nn} = -1.0$, $d_{np} = -0.8$ ($n \neq p$) と変えて数値シミュレーションを行った結果を図 9 に示す。 このときにも初期は各モードの線形増幅率にしたがって成長しているが、時間が経つと最大増幅モードを中心としてあるバンドの幅のなかに入ったモードが成長しそれ以外のモードは減衰していくことがわかる。 この図から生き残るモードは 5 つであることがわかる。 この場合にはある 1 つの波数を持ったモードだけが生き残るのではなく、ある波数の波をキャリアとしてその波が変調した空間パターンが現れることを示している。

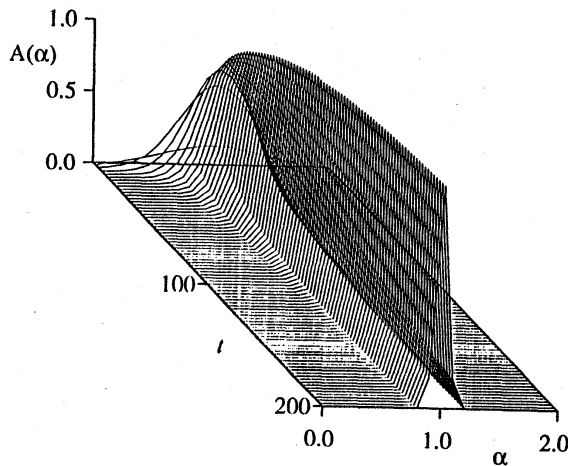


図 8. 非線形共鳴がないときの振幅の時間発展。
 $R = 10$, $d_{np} = -1.0$.

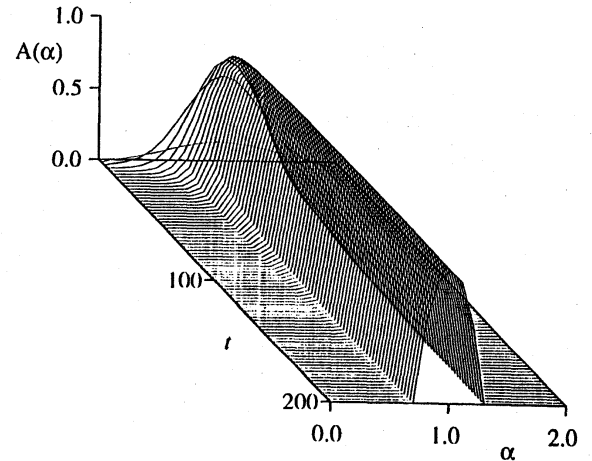


図 9. 非線形共鳴がないときの振幅の時間発展。
 $R = 10$, $d_{nn} = -1.0$, $d_{np} = -0.8$ ($n \neq p$).

次に全てのモードが共鳴をする場合を取り扱う。 ただし、2 次の非線形相互作用はすべて取り入れるが、3 次の非線形項は $A_p^2 A_n$ の形の項のみを取入れ、それ以外の 3 次の非線形項は重要でないと仮定する。 このとき方程式 (18) は次のように書き換えることができる。

$$\frac{dA_n}{dt} = a_n A_n + \sum_{p=1}^{N-n} b_{np} A_p A_{n+p} + \sum_{p=1}^{[n/2]} c_{np} A_p A_{n-p} + \sum_{p=1}^N d_{np} A_p^2 A_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

ここでも、 A_0 は他のモードの発展に影響を与えないものと仮定した。

方程式 (20) を初期値問題として数値的に解く。 $\alpha_{max} = 2.0$, $N = 20$ とする。 また、ランダウ係数に相当する係数 d_{np} は最も簡単な場合として $d_{np} \equiv -1.0$ を用いる。 共鳴項の係数を $b_{np} = -0.1$, $c_{np} = 0.1$ とし、初期条件を $A_1 = 0.01$, $A_n = 0.0$ ($n = 2, 3, \dots, N$) にとり、 $R = 10$ とした場合の結果を図 10 に示す。 この図から初めは A_1 から他のモードにエネルギーが移り、その後複雑な相互作用を行った後、 $\alpha = 1.0$ のモードだけが生き残り、他のモードは全て減衰していることがわかる。

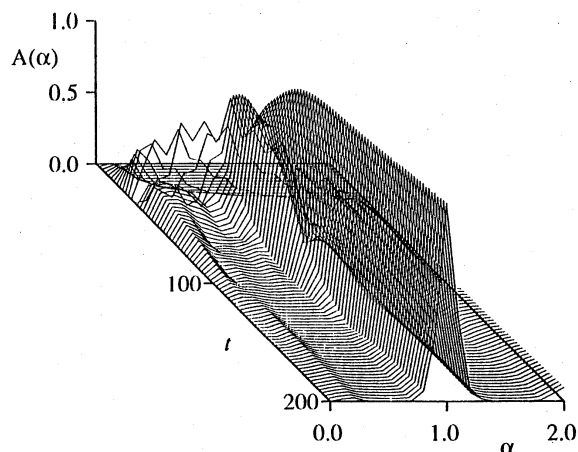


図 10. 非線形共鳴があるときの振幅の時間発展.
 $R = 10$, $b_{np} = -0.1$, $c_{np} = 0.1$.

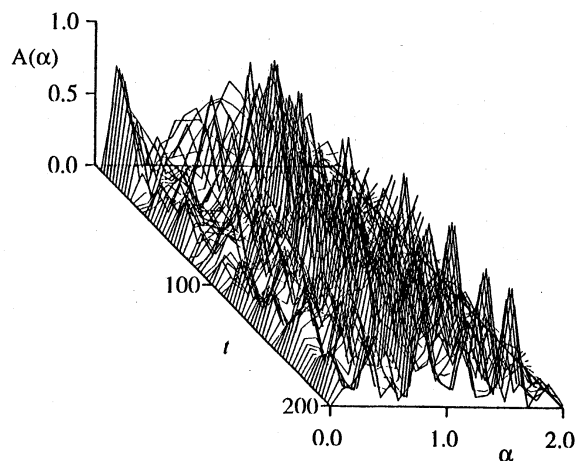


図 11. 非線形共鳴があるときの振幅の時間発展.
 $R = 10$, $b_{np} = -0.5$, $c_{np} = 0.5$.

さらに共鳴項の係数を大きくし、 $b_{np} = -0.5$, $c_{np} = 0.5$ としたときの結果を図 11 に示す。 共鳴項の係数が大きくなると解はカオス的になっている。 この解が本当にカオス的であるのか、カオスであるとすればその性質はどのような性質であり、そのストレンジアトラクターの次元は幾らであるかなど解析を行う必要があるが、まだそれらの解析は行っていないので他の機会に述べることにする。

References

- Bénard, H. 1900 Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide, *Revue Gén. Sci. Pur. Appl.* **11**, 1261-1271 and 1309-1328.
- Busse, F.H. 1967 On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below, *J. Math. and Phys.* **46**, 140-150.
- Busse, F.H. 1987 Transition to asymmetric convection rolls, in *Bifurcation : Analysis, Algorithms, Applications* (ed. T. Küpper, R. Seydel and H. Troger), pp.18-26. Birkhäuser.
- Busse, F.H. & Clever, R.M. 1979 Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number, *J. Fluid Mech.* **91**, 319-335.
- Busse, F.H. & Or, A.C. 1986 Subharmonic and asymmetric convection rolls, *Z. Angew. Math. Phys.* **37**, 608-623.
- Busse, F.H. & Whitehead, J.A. 1971 Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid, *J. Fluid Mech.* **47**, 305-320.
- Clever, R.M. & Busse, F.H. 1974 Transition to time-dependent convection, *J. Fluid Mech.* **65**, 625-645.
- Dangelmayr, G. 1986 Steady-state mode interactions in the presence of $O(2)$ -symmetry, *Dyn. Stab. Syst.* **1**, 159-185.
- Dangelmayr, G. & Armbruster, D. 1986 Steady-state mode interactions in the presence of $O(2)$ -symmetry and in non-flux boundary value problems, *Contemp. Maths* **56**, 53-67.
- Fujimura, K. 1989 The equivalence between two perturbation methods in weakly nonlinear stability theory for parallel shear flows, *Proc. R. Soc. Lond.* **A424**, 373 -392.
- Fujimura, K. & Mizushima, J. 1987 Nonlinear interaction of disturbances in free convection between vertical parallel plates, in *Nonlinear Wave Interactions in Fluids* (ed. R.W.Miksad et al.), pp.123-130. ASME-AMD-vol.87
- Gollub, J.P. & Benson, S.V. 1980 Many routes to turbulent convection, *J. Fluid Mech.* **100**, 449-470.
- Gor'kov, L.P. 1957 Stationary convection in a plane liquid layer near the critical heat transfer point, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 402-407.
- Jeffreys, H. 1928 Some cases of instability in fluid motion, *Proc. R. Soc. Lond.* **A118**, 195-208.
- Kidachi, H. 1982 Side wall effect on the pattern formation of the Rayleigh- Bénard convection, *Prog. Theor. Phys.* **68**, 49-63.
- Koschmieder, E.L. 1967 On Convective under an air surface, *J. Fluid Mech.* **30**, 9-15.
- Knobloch, E. & Guckenheimer, J. 1983 Convective transitions induced by a varying aspect ratio, *Phys. Rev. A* **27**, 408-417.
- Li, R. 1986 Analysis for Taylor vortex flow, Ph.D.thesis, Virginia Polytechnic Institute.
- Malkus, W.V.R. & Veronis, G. 1958 Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.* **4**, 225-260.

- Mizushima, J. & Saito, Y. 1988 Equilibrium characteristics of the secondary convection in a vertical fluid layer between two flat plates, *Fluid Dynamics Research* **2**, 183-191.
- Mizushima, J. & Fujimura, K. 1992 Higher harmonic resonance of two-dimensional disturbances in Rayleigh-Bénard convection, *J. Fluid Mech.* **234**, 651-667.
- Nagata, M. & Busse, F.H. 1983 Three-dimensional tertiary motions in a plane shear layer, *J. Fluid Mech.* **135**, 1-26.
- Palm, E. 1960 On the tendency towards hexagonal cells in steady convection, *J. Fluid Mech.* **8**, 183-192.
- Palm, E., Ellingsen, T. & Gjevik, B. 1967 On the occurrence of cellular motion in Bénard convection, *J. Fluid Mech.* **30**, 651-661.
- Pellew, A. & Southwell, R.V. 1940 On maintained convective motion in a fluid heated from below, *Proc. R. Soc. Lond.* **A176**, 312-343.
- Reid, W.H. & Harris, D.L. 1958 Some further results on the Bénard problem, *Phys. Fluids* **1**, 102-110.
- Scanlon & Segel, L.A. 1967 Finite amplitude cellular convection induced by surface tension, *J. Fluid Mech.* **30**, 149-162.
- Schlüter, A., Lortz, D. & Busse, F.H. 1965 On the stability of steady finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.* **23**, 129-144.
- Thomson, J. 1982 On a changing tessellated structure in certain liquids. *Proc. Phil. Soc. Glasgow.* **13**, 693-704.