

Automorphisms of Alltop's 4-designs

東大 理 榎本 彦衛

永い間、自明でない 4-design は Mathieu 群と関係したもの (有限個) しか知られておらず、新しい 4-design が見つければ新しい 4 重可移群が見つかるのではないかと期待されていました。Alltop により初めて 4-design の無限系列が構成された (J. Combinatorial Theory 6 (1969) 320-322) のですが、不思議なことにこの design の全自己同型群はすぐには決定されませんでした。今年になってようやく全自己同型群が決定できたのですが、残念ながら既に存在のわかっているもの以外には自己同型の存在しないことがわかり、新しい 4 重可移群の発見とはなりませんでした。

まず、この design の構成法の復習から始めることにします。 $q = 2^n$ とおき、

$$\Omega = GF(q) \cup \{\infty\}$$

を q 個の元からなる有限体 $GF(q)$ 上の射影直線とします。

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= \Omega - \{\infty, 0, 1\} \\
 &= GF(8) - GF(2) \\
 &= \{\alpha \in GF(8) \mid \alpha^2 \neq \alpha\}
 \end{aligned}$$

と置き、 $\alpha \in \Omega_1$ に対し

$$\Delta(\alpha) = \{\infty, 0, 1, \alpha, \alpha+1\}$$

と定義します。 $PGL(2, 8)$ が Ω の上に自然に働いているので、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(\alpha) &= \{\Delta(\alpha)^g \mid g \in PGL(2, 8)\}, \\
 \mathcal{D} &= \bigcup_{\alpha \in \Omega_1} \mathcal{D}(\alpha)
 \end{aligned}$$

と定義します。 $PGL(2, 8)$ の Ω 上の作用は 3 重可移なので、この design $(\Omega, \mathcal{D})$ が 3-design であることは明らかですが、実は $4-(8+1, 5, 5)$ design になっていることが次の補題からわかります。

補題 1 (Alltop). $\alpha \in \Omega_1$ に対し

$$\Gamma(\alpha) = \{\alpha+1, \frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha}, \alpha^2, \sqrt{\alpha}\}$$

と置く。 n が 3 以上の奇数ならば、これらの 5 点は異なり、

$$\{\infty, 0, 1, \alpha, \beta\} \in \mathcal{D} \iff \beta \in \Gamma(\alpha)$$

が成り立つ。

(注) n が偶数の時にはこの補題は成り立たないが、 $(\Omega, \mathcal{D})$

も 4-design に 7557511。

目標は次の定理を証明することです。

定理 n が 5 以上の奇数ならば、 $PPL(2, q)$ が 2 の design の全自己同型群になる。

(注) $n = 3$ の時には

$$\Gamma(\alpha) = \Omega - \{\infty, 0, 1, \alpha\}$$

となり、 Ω の任意の 5 点部分集合が block となる。すなわちこれは自明な design であって、その全自己同型群は 9 次対称群となる。

$(\Omega, \mathcal{B})$ の全自己同型群を G とおく。以下、 n を 5 以上の奇数とし、 $G = PPL(2, q)$ を示すことが目標であるが、 f を有限体 $GF(q)$ の自己同型とすると、

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha)^f &= \{\infty^f, 0^f, 1^f, \alpha^f, (\alpha+1)^f\} \\ &= \{\infty, 0, 1, \alpha^f, \alpha^f+1\} \\ &= \Delta(\alpha^f) \end{aligned}$$

となり、これも $\mathcal{B}$ に属するので、 $PPL(2, q)$ が G に含まれることはすぐにわかる。逆を証明するためには、3 重可移に働いていることがわかっているので、3 点を固定する部分群

についていえばよい。とあるが、 $PL(2, 8)$ の元で $\infty, 0, 1$ の3点を固定するものは有限体 $GF(8)$ の自己同型から引き起されるものである。故に

" $G_{\infty, 0, 1}$ に入る自己同型 α は、有限体 $GF(8)$ の自己同型として作用する"

というのを証明すればよい。

まず、 $\Gamma(\alpha)$ の点 β に対し $\Gamma(\beta)$ を計算すると、

$$\Gamma(\alpha+1) = \left\{ \alpha, \frac{\alpha+1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha+1}, \alpha^2+1, \sqrt{\alpha}+1 \right\},$$

$$\Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) = \left\{ \frac{1}{\alpha+1}, \alpha, \frac{\alpha+1}{\alpha}, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}, \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+1} \right\},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left\{ \frac{\alpha+1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha+1}, \alpha, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right\},$$

$$\Gamma(\alpha^2) = \left\{ \alpha^2+1, \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}, \frac{1}{\alpha^2}, \alpha^4, \alpha \right\}$$

$$\Gamma(\sqrt{\alpha}) = \left\{ \sqrt{\alpha}+1, \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+1}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \alpha, \sqrt[4]{\alpha} \right\}$$

となるが、 $\alpha^8 \neq \alpha$ ならば右辺に出てくるものは形が違えば値も違うことがわかる。したがって

$$\Gamma_1(\alpha) = \left\{ \alpha+1, \frac{\alpha}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha} \right\},$$

$$\Gamma_2(\alpha) = \left\{ \alpha^2, \sqrt{\alpha} \right\}$$

とおく。

補題 2. $\beta \in \Gamma_i(\alpha)$, $\gamma \in \Gamma_j(\alpha)$, $\beta \neq \gamma$ ならば

$$|\Gamma(\beta) \cap \Gamma(\gamma)| = \begin{cases} 4 & \alpha^\delta = \alpha \\ 3 & \alpha^\delta \neq \alpha, \quad i = j = 1 \\ 2 & \alpha^\delta \neq \alpha, \quad i \neq j \\ 1 & \alpha^\delta \neq \alpha, \quad i = j = 2 \end{cases}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= GF(8) - GF(8) \\ &= \{ \alpha \in GF(8) \mid \alpha^\delta \neq \alpha \} \end{aligned}$$

とおく。

$$\alpha \notin \Omega_2 \Rightarrow \alpha^x \notin \Omega_2,$$

$$\alpha \in \Omega_2 \Rightarrow \Gamma_i(\alpha)^x = \Gamma_i(\alpha^x) \quad i=1,2$$

が成り立つ。

次に、 α, β, γ を $GF(8)$ の異なる3点とすると、

$\{\infty, \alpha, \beta, \gamma\}$ を含む block が5個存在するはずであるが、それを計算する。

$$\{\infty, \alpha, \beta, \gamma, \delta\} \in \mathcal{D} \iff \delta \in \Gamma(\alpha, \beta, \gamma)$$

となる。ただし

$$\Gamma(\alpha, \beta, \gamma) = \left\{ \alpha + \beta + \gamma, \frac{\alpha\beta + \gamma^2}{\alpha + \beta}, \frac{\beta\gamma + \alpha^2}{\beta + \gamma}, \frac{\gamma\alpha + \beta^2}{\gamma + \alpha} \right\}$$

$$\sqrt{\alpha\beta + \beta r + r\alpha}\}$$

とある。

補題 2 と同じように、 $\delta, \varepsilon \in \Gamma(\alpha, \beta, r)$ に対し、

$$|\Gamma(\alpha, \beta, \delta) \cap \Gamma(\alpha, \beta, \varepsilon)|$$

を計算することにより、次の補題が得られる。

補題 3. $\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta} \in \Omega_2$ ならば

$$(\alpha+\beta+r)^x = \alpha^x + \beta^x + r^x,$$

$$\sqrt{\alpha\beta + \beta r + r\alpha}^x = \sqrt{\alpha^x\beta^x + \beta^xr^x + r^x\alpha^x}$$

が成り立つ。

変数に特殊な値を代入することにより、以下の補題が次々に得られる。

補題 4 $\frac{\beta}{\alpha} \in \Omega_2$ ならば

$$(\alpha+\beta)^x = \alpha^x + \beta^x$$

$$\sqrt{\alpha\beta}^x = \sqrt{\alpha^x\beta^x}$$

が成り立つ。

補題 5 $\alpha \in \Omega_2$ ならば

$$\sqrt{\alpha}^x = \sqrt{\alpha^x}$$

$$(\alpha^{-1})^x = (\alpha^x)^{-1}$$

が成り立つ。

補題 6 任意の $\alpha, \beta \in GF(q)$ に対し.

$$(\alpha + \beta)^x = \alpha^x + \beta^x$$

が成り立つ。

証明 $\frac{\beta+r}{\alpha+r}, \frac{r}{\alpha}, \frac{r}{\beta} \in \Omega_2$ ならば.

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^x &= ((\alpha + r) + (r + \beta))^x \\ &= (\alpha + r)^x + (r + \beta)^x \\ &= (\alpha^x + r^x) + (r^x + \beta^x) \\ &= \alpha^x + \beta^x \end{aligned}$$

となる。と Ω_2 が、 $\frac{\beta+r}{\alpha+r}, \frac{r}{\alpha}, \frac{r}{\beta}$ のうち少なくとも一つが Ω_2 に入らないような r は高々 $8 \times 3 = 24$ 個しか存在しないので、上の条件を満たすような r が存在する。

上と同様にして以下の補題が次々証明される。

補題 7 $\frac{\beta}{\alpha} \in \Omega_2$ ならば

$$(\alpha\beta)^x = \alpha^x \beta^x$$

が成り立つ。

補題 8 任意の $\alpha, \beta \in GF(q)$ に対し

$$\sqrt{\alpha\beta}^x = \sqrt{\alpha^x\beta^x}$$

が成り立つ。

補題 9 任意の $\alpha \in GF(q)$ に対し

$$\sqrt{\alpha}^x = \sqrt{\alpha^x}$$

が成り立つ。

補題 10 任意の $\alpha, \beta \in GF(q)$ に対し

$$(\alpha\beta)^x = \alpha^x\beta^x$$

が成り立つ。

補題 6 と 補題 10 より x は $GF(q)$ 上に体の自己同型として作用していることがわかり、定理の証明が終った。