

w -distance を用いた共通不動点定理とその応用

島根大学大学院 総合理工学研究科 小濱 倫明 (Tomoaki Obama)

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane
University

島根大学大学院 総合理工学研究科 白石 侑也 (Yuya Shiraishi)

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane
University

島根大学 総合理工学部 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

概要

Caristi[5] が 1976 年に発表した不動点定理を基盤として, Bhakta-Basu[2] が共通不動点定理を発表した. また, 1996 年に加田-鈴木-高橋が w -distance という尺度の新しい概念を導入した [7]. 本論文では, [2] の結果を w -distance を用いた考察, 及び応用について述べる.

1 準備

X をある集合, T を X から X への写像とすると, $Tx_0 = x_0$ となる点 x_0 を T の不動点という. 不動点の存在は, 写像 T の持つ性質と作用する空間 X の性質によって決まり, 距離空間においてはこれまでに Caristi, 縮小写像, 非拡大写像の不動点定理などが示されてきた. 本論文では, 1976 年に Caristi[5] が発表した次の不動点定理について考察を行っていく.

定理 1.1. (X, d) を完備距離空間, S を X から X への写像とし, $\exists \varphi : X \rightarrow [0, \infty)$, 下半連続 s.t. $\forall x \in X, d(x, Sx) \leq \varphi(x) - \varphi(Sx)$ とするとき,

$$\exists \bar{x} \in X \text{ s.t. } \bar{x} = S\bar{x}.$$

次は, Caristi の不動点定理を基にして, 1980 年に Bhakta-Basu[2] が証明した定理である.

定理 1.2. (X, d) を完備距離空間, S を X から X への orbitally continuous 写像とし, $\exists \varphi : X \rightarrow [0, \infty)$ s.t. $\forall x \in X, d(x, Sx) \leq \varphi(x) - \varphi(Sx)$ とするとき,

$$\exists \bar{x} \in X \text{ s.t. } \bar{x} = S\bar{x}.$$

ただし, S が orbitally continuous 写像とは, $x \in X, x_0 \in X, x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n x$ ならば, $Sx_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{n+1} x$ が成り立つときをいう.

定理 1.1 と定理 1.2 はトレードオフの関係になっていて, 定理 1.1 は写像 S が無条件で写像 φ が下半連続であり, 定理 1.2 は写像 S が連続で写像 φ が無条件である.

さらに Bhakta-Basu[2] は, 次の共通不動点定理を示した.

定理 1.3. (X, d) を完備距離空間, S, T を X から X への orbitally continuous とし, $\exists \varphi, \psi : X \rightarrow [0, \infty)$ s.t. $\forall x, y \in X, d(Sx, Ty) \leq \varphi(x) - \varphi(Sx) + \psi(y) - \psi(Ty)$ とするとき,

$$\exists \bar{x} \in X \text{ s.t. } \bar{x} = S\bar{x} = T\bar{x}.$$

系 1.1. (X, d) を完備距離空間, $\mathcal{S}$ を $\{S \mid S \text{ を } X \text{ から } X \text{ への orbitally continuous}\}$ の部分集合とし, $\exists \{\varphi_S : X \rightarrow [0, \infty) \mid S \in \mathcal{S}\}$ s.t. $\forall S, T \in \mathcal{S}, \forall x, y \in X, d(Sx, Ty) \leq \varphi_S(x) - \varphi_S(Sx) + \varphi_T(y) - \varphi_T(Ty)$ とするとき,

$$\exists \bar{x} \in X \text{ s.t. } \forall S \in \mathcal{S}, \bar{x} = S\bar{x}.$$

本論文では, これらの結果を w -distance を用いて拡張し, また応用について述べる. 第2章では1996年に加田-鈴木-高橋によって導入された w -distance およびその性質について述べ, 第3章では主結果を述べる. 第4章では第3章で示した定理を応用し, 共通均衡点定理について考察する.

2 w -distance

ここでは, 1996年に加田-鈴木-高橋 [7] によって導入された距離空間上の新しい尺度の概念 “ w -distance” について紹介する.

定義 2.1. (X, d) を距離空間, ρ を $X \times X$ から $[0, \infty)$ への写像とする. 次の3条件 (1), (2), (3) が成り立つとき, ρ は X 上の w -distance であるという.

- (1) $\forall x, y, z \in X, \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y),$
- (2) $\forall x \in X, \rho(x, \cdot) : \text{下半連続},$
- (3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x, y, z \in X, \rho(z, x) \leq \delta, \rho(z, y) \leq \delta \Rightarrow d(x, y) \leq \varepsilon.$

w -distance にはいくつかの特性があり, 次の補題は w -distance に関する定理において, 最も重要であり, 役立つものである.

補題 2.1. (X, d) を距離空間, ρ を X 上の w -distance, $x, y, z \in X, \{x_n\}, \{y_n\}$ を X の部分集合, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ を $[0, \infty)$ の部分集合, $\alpha_n \rightarrow 0, \beta_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ とするとき, 次が成り立つ.

- (1) $\forall n \in \mathbb{N}, \rho(x_n, y) \leq \alpha_n, \rho(x_n, z) \leq \beta_n \Rightarrow y = z,$
特に, $\rho(x, y) = 0, \rho(x, z) = 0 \Rightarrow y = z,$
- (2) $\forall n \in \mathbb{N}, \rho(x_n, y_n) \leq \alpha_n, \rho(x_n, z) \leq \beta_n \Rightarrow y_n \rightarrow z,$
- (3) $\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ with } n < m, \rho(x_n, x_m) \leq \alpha_n \Rightarrow \{x_n\} : \text{Cauchy 列},$
- (4) $\forall n \in \mathbb{N}, \rho(y, x_n) \leq \alpha_n \Rightarrow \{x_n\} : \text{Cauchy 列}.$

3 主結果

この章では先ほど紹介した w -distance を用いた共通不動点定理についての結果を紹介する. まず, 次の定理は定理 1.2 を w -distance を用いて拡張したものである.

定理 3.1. (X, d) を完備距離空間, ρ を X 上の w -distance, S を X から X への連続写像とし, $\exists \varphi : X \rightarrow [0, \infty)$ s.t. $\forall x \in X, \rho(x, Sx) \leq \varphi(x) - \varphi(Sx)$ とするとき,

$$\exists \bar{x} \in X \text{ s.t. } \bar{x} = S\bar{x}.$$

次の定理は定理 1.3 を w -distance を用いて拡張したものである.

定理 3.2. (X, d) を完備距離空間, ρ を X 上の w -distance, S, T を X から X への連続写像とし, $\exists \varphi, \psi : X \rightarrow [0, \infty)$ s.t. $\forall x, y \in X, \max\{\rho(Sx, Ty), \rho(Ty, Sx)\} \leq \varphi(x) - \varphi(Sx) + \psi(y) - \psi(Ty)$ とするとき,

$$\exists_1 \bar{x} \in X \text{ s.t. } \bar{x} = S\bar{x} = T\bar{x}.$$

系 1.1 を w -distance を用いて拡張すると, 次の系が得られた.

系 3.1. (X, d) を完備距離空間, ρ を X 上の w -distance, $\mathcal{S}$ を $\{S \mid S \text{ を } X \text{ から } X \text{ への連続写像}\}$ の部分集合とし, $\exists \{\varphi_S : X \rightarrow [0, \infty) \mid S \in \mathcal{S}\}$ s.t. $\forall S, T \in \mathcal{S}, \forall x, y \in X, \max\{\rho(Sx, Ty), \rho(Ty, Sx)\} \leq \varphi_S(x) - \varphi_S(Sx) + \varphi_T(y) - \varphi_T(Ty)$ とするとき,

$$\exists_1 \bar{x} \in X \text{ s.t. } \forall S \in \mathcal{S}, \bar{x} = S\bar{x}.$$

次の定理は定理 3.1 を集合値写像に拡張したものである.

定理 3.3. (X, d) を完備距離空間, ρ を X 上の w -distance, S, T を X から X への集合値上半連続写像, $\forall x \in X, Sx, Tx$ を空でない閉集合とし, $\exists \varphi, \psi : X \rightarrow [0, \infty)$ s.t. $\forall x, y \in X, \forall u \in Sx, \forall v \in Ty, \max\{\rho(u, v), \rho(v, u)\} \leq \varphi(x) - \varphi(u) + \psi(y) - \psi(v)$ とするとき,

$$\exists_1 \bar{x} \in X \text{ s.t. } \bar{x} \in S\bar{x} \cap T\bar{x}.$$

4 共通均衡問題への応用

この章では, 前章で述べた共通不動点定理を用いて共通均衡問題を考える. まずは均衡問題について見ていく.

H を Hilbert 空間, X を H の空でない閉凸部分集合, f を $X \times X$ から $\mathbb{R}$ への関数とする. このとき

$$f(\bar{x}, y) \geq 0 \quad (\forall y \in X)$$

をみたす $\bar{x} \in X$ を求める問題を均衡問題という. また $\bar{x}$ を均衡問題の解という. 均衡問題は, 変分不等式を抽象化した問題であり, 最適化問題, Nash 均衡問題, 鞍点問題, 不動点問題などと深い関係がある. このことについて, いくつか例をあげる (詳しくは [4, 6]).

例 4.1. (鞍点問題) g を $X_1 \times X_2$ から $\mathbb{R}$ への関数とする. このとき, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X_1 \times X_2$ が g の鞍点であるとは,

$$g(y_1, \bar{x}_2) \leq g(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq g(\bar{x}_1, y_2), \forall (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$$

が成り立つときをいう. ここで, $X = X_1 \times X_2$ とし, $(a, b), (x, y) \in X \times X$ に対して,

$$f((a, b), (x, y)) = g(a, y) - g(x, b)$$

と f を定義すると, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ が g の鞍点 $\iff (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ が f の均衡点である.

例 4.2. (不動点問題) S を X から X への写像とする. このとき, $(x, y) \in X \times X$ に対して,

$$f(x, y) = \langle x - Sx, y - x \rangle$$

と f を定義すると, $\bar{x}$ が S の不動点 $\iff \bar{x}$ が f の均衡点である.

さて, 本題の共通均衡点問題について見ていこう. H を Hilbert 空間, X を H の空でない閉凸部分集合, f, g を $X \times X$ から $\mathbb{R}$ への関数とすると,

$$f(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ かつ } g(\bar{x}, y) \geq 0 \quad (\forall y \in X)$$

をみたす $\bar{x} \in X$ を求める問題を共通均衡問題という. またこの $\bar{x}$ を共通均衡問題の解という.

この共通均衡問題を解く際に, 本論文では次の対応

$$Sx = \{y \in X \mid \forall z \in X, f(y, z) + \langle x - y, y - z \rangle \geq 0\}$$

を用いることで, 前章で示した共通不動点定理を使うことが可能となる. 実際, この対応においては, $\bar{x}$ が S の不動点であることと, $\bar{x}$ が f の均衡点であることが同値となる.

前章の共通不動点定理を用いるには, まず上の対応となる 2 つの集合値写像 S, T が上半連続であること, そして $\forall x, y \in X, \forall u \in Sx, \forall v \in Ty, \max\{\rho(u, v), \rho(v, u)\} \leq \varphi(x) - \varphi(u) + \psi(y) - \psi(v)$ が成り立つような X から $[0, \infty)$ への関数 φ, ψ の存在性が必要となる. しかしながら, S, T が下半連続の場合でも以下の定理 4.1 を用いることで, 前章の不動点定理を用いることが可能となる.

定理 4.1. (cf. [9]) (X, d) を距離空間, Y を Banach 空間, X から Y への集合値写像 S を下半連続とし, $\forall x \in X, Sx$ を空でない閉集合とする. このとき,

$$\exists h : X \rightarrow Y, \text{ 連続 s.t. } \forall x \in X, h(x) \in Sx.$$

この定理 4.1 と定理 3.3 を用いて、次の結果を得る.

定理 4.2. H を Hilbert 空間, X を H の空でない閉部分集合, ρ を X 上の w -distance, f, g を $X \times X$ から $\mathbb{R}$ への関数とし, X から X への集合値写像 S, T を, $x \in X$ に対して,

$$Sx = \{y \in X \mid \forall z \in X, f(y, z) + \langle x - y, y - z \rangle \geq 0\},$$

$$Tx = \{y \in X \mid \forall z \in X, g(y, z) + \langle x - y, y - z \rangle \geq 0\},$$

で定義し, さらに $\forall x \in X, Sx, Tx$ を空でない閉集合 とし, $\exists \varphi, \psi : X \rightarrow [0, \infty)$ s.t. $\forall x, y \in X, \forall u \in Sx, \forall v \in Ty,$

$$\max\{\rho(u, v), \rho(v, u)\} \leq \varphi(x) - \varphi(u) + \psi(y) - \psi(v)$$

が成り立つとする. このとき, 「 S が上半連続または下半連続」 かつ 「 T が上半連続または下半連続」 ならば,

$$\exists \bar{x} \in X \text{ s.t. } \forall z \in X, f(\bar{x}, z) \geq 0 \text{ かつ } g(\bar{x}, z) \geq 0.$$

次に, f にどのような仮定があれば S が上半連続になるかについて考察する. まずは次の結果を紹介する.

補題 4.1. ([6]) H を Hilbert 空間, X を H の空でない閉凸部分集合, f を $X \times X$ から $\mathbb{R}$ への関数とし, 以下の条件をみたすとする:

- (1) $\forall x \in X, f(x, x) = 0,$
- (2) $\forall x, y \in X, f(x, y) + f(y, x) \leq 0,$
- (3) $\forall x, y, z \in X, \lim_{t \downarrow 0} f(tz + (1-t)x, y) \leq f(x, y),$
- (4) $\forall x \in X, f(x, \cdot) : \text{凸, 下半連続.}$

また, X から X への集合値写像 S を, $x \in X$ に対して,

$Sx = \{y \in X \mid \forall z \in X, f(y, z) + \langle x - y, y - z \rangle \geq 0\}$ で定義する. このとき,

S : single-valued かつ firmly nonexpansive.

補題 4.1 から S は firmly nonexpansive となるので, S は連続となる. このことから次の結果を得る.

定理 4.3. H を Hilbert 空間, X を H の空でない閉凸部分集合, ρ を X 上の w -distance, f, g を $X \times X$ から $\mathbb{R}$ への関数とし, 補題 4.1 の (1) ~ (4) の条件をみたすとする. また, X から X への集合値写像 S, T を, $x \in X$ に対して,

$$Sx = \{y \in X \mid \forall z \in X, f(y, z) + \langle x - y, y - z \rangle \geq 0\},$$

$$Tx = \{y \in X \mid \forall z \in X, g(y, z) + \langle x - y, y - z \rangle \geq 0\},$$

で定義し, $\exists \varphi, \psi : X \rightarrow [0, \infty)$ s.t. $\forall x, y \in X,$

$$\max\{\rho(Sx, Ty), \rho(Ty, Sx)\} \leq \varphi(x) - \varphi(Sx) + \psi(y) - \psi(Ty)$$

が成り立つとする。このとき、

$$\exists \bar{x} \in X \text{ s.t. } \forall z \in X, f(\bar{x}, z) \geq 0 \text{ かつ } g(\bar{x}, z) \geq 0.$$

参考文献

- [1] Q. H. ANSARI, *Vectorial form of Ekeland-type variational principle with applications to vector equilibrium problems and fixed point theory*, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007), pp. 561–575.
- [2] P. C. BHAKTA, T. BASU, *Some fixed point theorems on metric spaces*, J. Indian Math. Soc. 45 (1981), pp. 399–404.
- [3] M. BIANCHI, G. KASSAY, R. PINI, *Existence of equilibria via Ekeland's principle*, J. Math. Anal. Appl. 305 (2005), pp. 502–512.
- [4] E. BLUM, W. OETTLI, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student. 63 (1994), pp. 123–145.
- [5] J. CARISTI, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), pp. 241–251.
- [6] P. L. COMBETTES, S. A. HIRSTOAGA, *Equilibrium Programming in Hilbert Spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. 6 (2005), pp. 117–136.
- [7] O. KADA, T. SUZUKI, AND W. TAKAHASHI, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon. 44 (1996), pp. 381–391.
- [8] A. LECHICKI, *On bounded and subcontinuous multifunctions*, Pacific. J. Math. 44 (1977), pp. 191–197.
- [9] E. MLCHAEL, *Continuous selections I*, Ann. of Math. 63 (1956), pp. 361–382.
- [10] R. E. SMITHSON, *Subcontinuity for multifunctions*, Pacific. J. Math. 61 (1975), pp. 283–288.