

2次元 Euler 方程式の外部問題

東大 教養 菊地慶祐

序

平面上、有限個の物体 $O_1, \dots, O_m$ を通る非圧縮理想流体の運動を考える。 O_j の境界 Γ_j ($j=1, \dots, m$) は互いに他と交わらない十分滑らかな単純閉曲線とする。流体は $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m$ の外部領域 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (O_1 \cup \dots \cup O_m)$ に存在し、その運動は $\Theta = \Omega \times [0, T]$ 上において Euler 方程式

$$(E.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = f \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

で記述されるものとする。また初期条件は

$$(E.2) \quad v(x, 0) = a(x) \quad x \in \Omega \quad \text{とし、}$$

無限遠方においては

$$(E.3) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x, t) = v_\infty \quad t \in [0, T]$$

境界条件は

$$(E.4) \quad v \cdot n|_\Gamma = 0 \quad t \in [0, T] \quad \text{とする。}$$

ここで $v = v(x, t)$ は速度ベクトル、 $p = p(x, t)$ は (スカラー値) 圧力、 $f = f(x, t)$ は外力ベクトル、 $a = a(x)$ は初期速度ベクトル、 $v_\infty = (v_\infty^1, v_\infty^2)$ は定数ベクトル、 $v \cdot n|_\Gamma$ は v の Γ 上

での外向き法線成分を表す。

この小論では、(E.1) ~ (E.4) を満たす解 (v, p) の存在と一意性について考える。

§1. Notation, 結果及び歴史

2次元の rotation は、スカラー値関数 φ に対しては、 $\text{rot } \varphi = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1})$ ，ベクトル値関数 $u = (u^1, u^2)$ に対しては $\text{rot } u = \frac{\partial u^2}{\partial x_1} - \frac{\partial u^1}{\partial x_2}$ で定義される。

$B(X)$; X 上有界連続な関数全体 $\text{norm } \|\cdot\|_{L^\infty(X)}$.

$w \in L^q_1(\Omega) \Leftrightarrow \|w\|_{L^q_1(\Omega)} \equiv \int_{\Omega} (1+|x|^q) |w(x)| dx < \infty$.

$w \in L^q_1(\partial_T X) \Leftrightarrow \|w\|_{L^q_1(\partial_T X)} \equiv \int_0^T \|w(\cdot, t)\|_{L^q_1(\Omega)} dt < \infty$.

$h \in C^\lambda(\bar{\Omega}) \Leftrightarrow h \in B(\bar{\Omega})$ かつ h は exponent λ の一様 Hölder 連続.

$h \in C^{\lambda,0}(\bar{\partial}_T X) \Leftrightarrow h \in B(\bar{\partial}_T X)$ かつ $h(x, t)$ は x について exponent λ の一様 Hölder 連続.

その他一般的に使用される notation を用いる。

また、スカラー値関数 φ に対しては、形式的な計算により

$$\text{div } \nabla \varphi = -\text{rot rot } \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \varphi, \quad \text{div rot } \varphi = 0,$$

$$\text{rot } \nabla \varphi = 0, \quad n \cdot \text{rot } \varphi|_{\Gamma} = \tau \cdot \nabla \varphi|_{\Gamma} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}|_{\Gamma}, \quad \tau \cdot \text{rot } \varphi|_{\Gamma}$$

$$= -n \cdot \nabla \varphi|_{\Gamma} \equiv -\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{\Gamma} \text{ が成立する。ただし } n = (n_1, n_2)$$

は Γ 上の外向き法線ベクトルであり、 $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ は Γ 上の接ベクトルで $(\tau_1, \tau_2) = (-n_2, n_1)$ を満たしているものとする。

定理

$0 < T < \infty$, $0 < \theta$, $0 < \lambda < 1$ とする。

a, f に対して次の仮定をおく。

$$(i) \quad a \in C^1(\Omega) \cap B(\bar{\Omega}), \operatorname{rot} a \in C^\lambda(\bar{\Omega}) \cap L^q(\Omega),$$

$$\operatorname{div} a = 0, \quad a \cdot n|_{\Gamma} = 0, \quad a|_{|x| \rightarrow \infty} = O_\infty.$$

$$(ii) \quad f \in C^{1,0}(\bar{Q}_T) \cap B(\bar{Q}_T),$$

$$\operatorname{rot} f \in C^{\lambda,0}(\bar{Q}_T) \cap L_\infty([0, T]; L_1(\Omega)) \cap L^q(\bar{Q}_T).$$

このとき (E.1) ~ (E.4) の解 $\{v, p\}$ が存在して

$$v, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x_j}, \nabla p \in B(\bar{Q}_T) \quad (j=1, 2) \text{ が成立する。}$$

さらに、もし a と f が次の条件

$$\nabla(\operatorname{rot} a) \in B(\bar{\Omega}) \cap L_1(\Omega), \nabla(\operatorname{rot} f) \in B(\bar{Q}_T) \cap L_1(Q_T) \text{ を}$$

満たすならば、上のような解 $\{v, p\}$ は一意である。

(ただし、 p については、そのみの関数を加える自由度はある。)

<歴史> Ω が 2 次元有界領域の場合、最初に Wolibner [1] によって解の存在が示された。(境界の内部の各成分上で循環量が 0 の場合)。一般の 2 次元有界領域に対しては Judovitch [2] が弱解の存在を、Kato [3] が古典解の存在を示した。これらはいずれも、渦の方程式及び境界のまわりでの循環を考慮して解を構成している。また、他の方法として Bardos [4] の結果も興味深い。 $\Omega = \mathbb{R}^2$ の場合は McGrath [5] の仕事がある。

§ 2. 解の構成.

基本的には[3]の議論に従って、渦の方程式及び境界のまわりでの循環を考慮することにより、(E.1) ~ (E.4)の解を構成していく。

2.1. Irrotational flow

境界が十分滑らかならば、single layer potential 及び double layer potential を用いて次の Lemma 1, 2 を満たす irrotational flow を構成できる。

Lemma 1

$\bar{\Omega}$ 上の flow $u_k = u_k(x)$ ($k=1, \dots, m$) が存在して 次の性質をもつ。

- (i) $\operatorname{div} u_k = 0$ (ii) $\operatorname{rot} u_k = 0$ (iii) $u_k \cdot n|_{\Gamma} = 0$
 (iv) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_k(x) = 0$ (v) $\int_{\Gamma_j} u_k \cdot \tau dx = \delta_{jk}$ ($j=1, \dots, m$)
 (vi) $\|u_k\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \right\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} < \infty$.

Lemma 2

$\bar{\Omega}$ 上の flow $u_0 = u_0(x)$ が存在して 次の性質をもつ。

- (i) $\operatorname{div} u_0 = 0$ (ii) $\operatorname{rot} u_0 = 0$ (iii) $u_0 \cdot n|_{\Gamma} = 0$
 (iv) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_0(x) = v_\infty$ (v) $\int_{\Gamma_j} u_0 \cdot \tau dx = 0$ ($j=1, \dots, m$)
 (vi) $\|u_0\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} u_0 \right\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} < \infty$.

2.2.

まず、ベクトル値関数 $v(x, t)$ が

$$(2.1) \quad \int_{\Gamma_j} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v - f \right\} \cdot \tau \, dx \, \Gamma = 0 \quad (j=1, \dots, m)$$

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v - f \right\} \cdot \text{rot} \, \Phi \, dx = 0 \quad \text{for } \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

かつ (E.1) の第2式 及び (E.2) ~ (E.4) を満たせば、(E.1) ~ (E.4) の解であることは次の Lemma よりわかる。

Lemma 3

$u \in B(\bar{\Omega}_T)$ は次の2つの条件を満たすベクトル値関数とする。

$$(i) \quad \int_{\Gamma_j} u \cdot \tau \, dx \, \Gamma = 0 \quad (j=1, \dots, m)$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} u \cdot \text{rot} \, \Phi \, dx = 0 \quad \text{for } \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

このとき、スカラー値関数 $P(x, t)$ が存在して $\nabla P = u$ 。

スカラー値関数 $w(x, t)$ に対して $\text{rot} \, G(w)$ を次のように定義する。

$$\text{rot} \, G(w)(x, t) = \int_{\Omega} \text{rot} \, x \, G(x, y) w(y, t) \, dy,$$

ただし $G(x, y)$ は $-\Delta$ の zero-Dirichlet 条件の “一般化された” Green 関数とする。

$F_1(w)$ を Lemma 1, 2 の u_j ($j=0, \dots, m$) を用いて

$$(2.3) \quad \begin{cases} F_1(w)(x, t) = \text{rot} \, G(w) + u_0 + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) u_j \\ \lambda_j(t) = \int_0^t \int_{\Gamma_j} f \cdot \tau \, dx \, \Gamma + \int_{\Gamma_j} a \cdot \tau \, dx \, \Gamma - \int_{\Gamma_j} \tau \cdot \text{rot} \, G(w) \, dx \, \Gamma \end{cases}$$

で定義すれば、 $F_1(w)$ は (微分可能性に目を瞑れば) $\lambda_j(t)$ の

定義及び Lemma 1, 2 より (2.1) かつ $\text{div} \, F_1(w) = 0$,

$\text{rot} \, F_1(w) = w$, (E.4) を満たしていることは、定理の前に

に挙げた事実を用いれば、容易にわかる。

よって $F_1(w)$ が (2.1), (E.2), (E.3) を満たすように w を与えれば, $F_1(w)$ は (E.1) ~ (E.4) の解となる。

議論をもっと正確にしよう。

$B(\bar{Q}_T)$ の部分集合 $S(M, L)$ を次のように定義する。

$$S(M, L) = \left\{ w \in B(\bar{Q}_T) \cap L_\infty(L^0_1(\Omega)); \|w\|_{L_\infty(L^0_1(\Omega))} \leq L, \right. \\ \left. \|w\|_{L_\infty(\bar{Q}_T)} + \|w\|_{L_\infty(L_1(\Omega))} \leq M \right\}.$$

ただし $L_\infty(L_1(\Omega)) \equiv L_\infty([0, T]; L_1(\Omega))$, $L_\infty(L^0_1(\Omega))$ も同様。

次に $S(M, L)$ を定義域とする operator F を $F_2 \circ F_1$ で定義する。

F_1 として (2.3) を用いる。(定義域 $D(F_1) = S(M, L)$)。

$\bar{Q}_T$ 上の stream line $(U_{s,t}(x), s) \in \bar{Q}_T$ を

$$(2.4) \begin{cases} \frac{d}{ds} U_{s,t}(x) = F_1(w)(U_{s,t}(x), s) \\ U_{t,t}(x) = x \end{cases} \quad \text{で定義する。}$$

各 $(x, t) \in \bar{Q}_T$ に対して stream line が一意に定まることは、後に示す Lemma 4 が保証する。

$F_1 S(M, L)$ を定義域とする operator F_2 は次のように定義される。

$$(2.5) \quad F_2(F_1 w)(x, t) = \zeta(x, t) = \operatorname{rot} a(U_{0,t}(x)) + \int_0^t \operatorname{rot} f(U_{s,t}(x), s) ds$$

ただし $U_{s,t}(x)$ は $F_1(w)$ に対応した stream line である。

このとき $\zeta = Fw$ は以下の一階偏微分方程式

$$(2.6) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \zeta + (F_1 w \cdot \nabla) \zeta = \beta \equiv \operatorname{rot} f \\ \zeta|_{t=0} = \alpha \equiv \operatorname{rot} a \end{cases}$$

の弱解であることは、容易にわかる。(2.4), (2.5))

特に、もし w が F の不動点ならば、 w は渦方程式

$$(2.7) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w + (v \cdot \nabla) w = \beta \\ w|_{t=0} = \alpha \end{cases} \quad \text{ただし } v = F_1(w) \quad (\operatorname{rot} v = w)$$

の弱解である。即ち $F_1(w)$ は (2.2) を満たす。

F が不動点を持つことを Schauder の不動点定理を用いて示そう。まず、 $S(M, L)$ は任意の $M, L > 0$ に対して $B(\bar{Q}_T)$ の閉凸部分集合になっていることに注意する。よって次の3つの性質を示せばよい。

i) $FS(M, L) \subset S(M, L)$, ii) $FS(M, L)$ は $B(\bar{Q}_T)$ の相対コンパクト部分集合, iii) F は $B(\bar{Q}_T)$ の位相で連続。

次の Lemma は、 F が上の i) ~ iii) の性質を持っていることを示す為の key lemma である。

Lemma 4

$w \in S(M, L)$ とする。このとき $F_1(w)$ は次の性質をもつ。

- (i) $\|F_1(w)\|_{L^\infty(\bar{Q}_T)} \leq K$, ここで K は $M, \|a\|_{L^\infty(\bar{\Omega})}, \|f\|_{L^\infty(\bar{Q}_T)}, T, \Gamma$ のみに依存する定数である。
- (ii) 任意の $x \in \bar{\Omega}$ に対して、 $F_1(w)(x, t)$ は $[0, T]$ 上 t の関数として連続である。
- (iii) 任意の $(x, t), (y, t) \in \bar{Q}_T$ に対して

$$|F_1(w)(x, t) - F_1(w)(y, t)| \leq H|x - y|X(|x - y|),$$

ここで H は x, y, t には独立な定数であり、又 $X(r)$ は

$(0, \infty)$ 上の連続関数で以下のように定義せよ;

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } r \geq 1 \\ 1 + \log \frac{1}{r} & \text{for } 0 < r < 1 \end{cases}$$

この lemma の証明は、 $G(x, y)$ の 1 階及び 2 階微分の評価を用いてなされるが、煩雑なので省略する。

Lemma 5

$$M = \|\alpha\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + T\|\beta\|_{L^\infty(\bar{\partial}_T)} + \|\alpha\|_{L^1(\Omega)} + \|\beta\|_{L^1(\partial_T)}$$

かつ $L = \|\alpha\|_{L^1_0(\Omega)} + \|\beta\|_{L^1_0(\partial_T)} + T^0 K^0 M$ とする。ただし K は Lemma 4 (i) で現われた定数である。

このとき $FS(M, L) \subset S(M, L)$ が成立する。

証明の概略を示しておく。

$w \in S(M, L)$, $\zeta = Fw$ とする。(2.5) より直ちに

$$\|\zeta\|_{L^\infty(\bar{\partial}_T)} \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} + T\|\beta\|_{L^\infty(\bar{\partial}_T)} \text{ を得る。}$$

次に $\operatorname{div} F_1(w) = 0$ (正確には $w \in S(M, L)$ では $F_1(w)$ の微分可能性は出てこない。よって Friedrichs mollifier により近似してやらなければならない。) を考慮すれば、 $F_1(w)$ に対応する stream line $U_{s,t}(x)$ は測度保存の性質をもつ。即ち、 $U_{s,t}(x)$ の Jacobian $= 1$ である。よって変数変換で

$$\int_{\Omega} |\alpha(U_{0,t}(x))| dx = \int_{\Omega} |\alpha(x)| dx \text{ が示せる。残りの}$$

ものについても、同様に扱える。($\|\zeta\|_{L^0(L^1_0(\Omega))}$ に対しては (2.4) と Lemma 4 (i) を考慮すればよい。)

以後 M, L を Lemma 5 のようにとり、 $S(M, L)$ を S で表わす。

Lemma 4 (iii) より Kato の方法が適用できて次の lemma を得る。(see [3] Lemma 2.6, 2.7)

Lemma 6

λ, H_1 をそれぞれ α, β の α -Hölder exponent 及び定数とする。 $\gamma = e^{-2HT}$ とする。ただし H は Lemma 4 (iii) で現われたものとする。もし $\zeta \in FS$ ならば、次の不等式が成立する。

$$(i) \quad |\zeta(x, t) - \zeta(y, t)| \leq H_1(1+\gamma) |x - y|^{\alpha}$$

for all $(x, t), (y, t) \in \overline{Q_T}$.

$$(ii) \quad |\zeta(x, t_1) - \zeta(x, t_2)| \leq H_2 |t_1 - t_2|^{\beta}$$

for all $(x, t_1), (x, t_2) \in \overline{Q_T}$

ただし H_2 は H_1 及び K のみに依存する定数。

上の Lemma 6 は FS の元が x, t に関して一様 Hölder 連続であることを示している。よって非有界領域に拡張された Ascoli の定理 (この定理を適用するには $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset FS$ に対して、 n, t について一様に " $\zeta_n(x, t) \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow \infty$ " を示す必要があるが、それとも言えるので) を用いて次の Lemma が証明される。

Lemma 7

FS は $B(\overline{Q_T})$ の相対コンパクト部分集合である。

Lemma 8

F は $B(\bar{Q}_T)$ の位相で S 上連続である。

F の定義より、ほとんど明らかであろうが、一言付け加えておくと、この証明のために " $\|\varphi\|_{L_\infty(L^p(\Omega))} \leq L$ for $\varphi \in S$ " が必要となる。すなわち 次の不等式

$$\int_{\Omega} |\varphi(x, t)| dx \leq C \|\varphi\|_{L_\infty(\bar{Q}_T)}^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|\varphi\|_{L_\infty(L^p(\Omega))}^{\frac{1}{p}}$$

ここで $C = \left(\int_{\Omega} (1 + |x|^\theta)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$, $1 < p < \frac{\theta+2}{2}$, を必要とする。

Lemma 5, 7, 8 より F に Schauder の不動点定理が適用できることがわかった。また F の不動点 $\tilde{w}$ に対しては、

Lemma 6 (i) より $\tilde{w}$ の x についての一様 Hölder 連続が言えるので、楕円型方程式のよく知られた議論を援用すれば $v = F_1(\tilde{w})$ の x と t についての regularity 即ち $\frac{\partial}{\partial t} v, \frac{\partial}{\partial x_j} v \in B(\bar{Q})$ が示される。また $\tilde{w}$ に対しては $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \text{rot } G(\tilde{w})(x, t) = 0$ が容易に示されるので Lemma 1, 2 を用いて $\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x, t) = v_\infty$ を得る。よって残りは (E. 2) を満たすことのみである。これは次の Lemma を用いて実行される。

Lemma 9

ベクトル値関数 $V \in C^1(\Omega) \cap B(\bar{\Omega})$ が次の条件を満たすとする。

- (i) $\text{div } V = 0$ (ii) $\text{rot } V = 0$ (iii) $V|_{|x| \rightarrow \infty} = 0$
 (iv) $V \cdot n|_{\Gamma} = 0$ (v) $\int_{\Gamma_j} V \cdot \tau dx = 0$ ($j=1, \dots, m$).

このとき $\bar{\Omega}$ 上で $V = 0$.

証明は外部 Neumann 問題の一意性を用いる。

§3. 一意性について (証明の概略)

まず、解の一意性が成立する仮定の下では、渦方程式 (2.7) が、古典解を持つことに注意する。§2 で構成した解を $\{v_1, p_1\}$ 、他の解を $\{v_2, p_2\}$ とする。 $\bar{v} = v_1 - v_2$, $w_1 = \text{rot } v_1$, $w_2 = \text{rot } v_2$, $\bar{w} = w_1 - w_2$ とおけば、境界のまわりの循環及び Lemma 9 を考慮することにより、 $\bar{v}$ は

$$\bar{v} = \text{rot } G(\bar{w}) + \sum_{j=1}^m \mu_j(t) u_j \quad \text{と表わされる,}$$

ただし u_j は Lemma 1 の flow であり $\mu_j(t)$ は

$$\mu_j(t) = - \int_{\Gamma_j} \text{rot } G(\bar{w}) \cdot \tau \, dx \quad (j=1, \dots, m) \quad \text{である.}$$

よって $\bar{w} = 0$ を示せば $\bar{v} = 0$ が示せることになる。

$$T_1 = \inf_{[0, T]} \{t; \bar{w} \neq 0 \text{ for some } x \text{ in } \bar{\Omega}\} \quad \text{とおくと,}$$

$\{v_1, w_1\}$ 及び $\{v_2, w_2\}$ は (2.7) の解であることから

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + (v_2 \cdot \nabla) \bar{w} = -(\bar{v} \cdot \nabla) w_1 \\ \bar{w}|_{t=T_1} = 0 \end{cases} \quad \text{が成立する.}$$

上式を評価することで、任意の $T_2 \in (T_1, T]$ に対して

$$\|\bar{w}\|_{L^\infty([T_1, T_2]; L_1(\Omega))} \leq (T_2 - T_1) E \|\bar{w}\|_{L^\infty([T_1, T_2]; L_1(\Omega))}$$

ただし E は T_2 に独立な定数” が成立するので $\bar{w} = 0$ を得る。このとき $\nabla(p_1 - p_2)$ についてはほとんど明らかであろう。

References

- [1] W. Wolibner ; Un theoreme sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long.
Math Z 37 (1933) p.p. 698 - 726 .
- [2] V.I. Judovič ; A two dimensional problem of unsteady flow of an ideal incompressible fluid across a given domain .
A.M.S. Translation . ser. 2 . 57 (1966) p.p. 277 - 304 .
- [3] T. Kato ; On classical solution of the two - dimensional non - stationary Euler equation .
Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967) p.p. 188 - 200 .
- [4] C. Bardos ; Existence et unicité de la solution de l'équation d'Euler en dimension deux .
J. Math. Anal. Appl. 40 (1972) p.p. 769 - 790
- [5] F.J. McGrath ; Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids .
Arch. Rat. Mech. Anal. 27 (1968) p.p. 329 - 348 .