

# Markov性をもつ多次元経数 Gaussian processesについて

信州大 理 井上和行

## § 1. 序

確率空間  $(\Omega, \Sigma, P)$  上の Gaussian process  $X_t, t \in T$ ,  $EX_t \equiv 0, EX_t X_s \equiv R(t, s)$ , が与えられた時 covariance  $R(t, s)$  を再生核としてもつ reproducing kernel Hilbert space (r. k. h. s.)  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(T)$  がきまる。逆に再生核  $R(t, s)$  をもつ r. k. h. s.  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(T)$  に対して上のような Gaussian process  $X_t, t \in T$  が分布の意味で一意的にきまる。ここでは  $T$  を  $d$  次元 Euclidean space  $R^d$  の中の滑らかな  $(d-1)$  次元超曲面で囲まれた有界領域とし, Gaussian process  $X_t, t \in T$  の Markov 性を R[4] と同じ意味で  $\mathcal{H}$  の閉部分空間のことばを用いて定義する。

まず  $\{X_t, t \in D\}$  ( $D$  は開集合,  $\subseteq T$ ) で張られる  $L^2(\Omega, P)$  の閉部分空間を  $H(D)$  とする時, 写像

$$\Phi: H(T) \ni X \longmapsto u(s) \equiv EXX_s \in \mathcal{H}(T) \equiv \mathcal{H}$$

は unitary 写像である。  $\mathcal{H}$  の閉部分空間  $\Phi[H(D)]$  を  $\mathcal{H}(D)$  と

書く。  $\{D_-, \Gamma, D_+\}$  は滑らかな  $(d-1)$  次元超曲面で囲まれた開集合  $D (\subseteq T)$ , その境界  $\Gamma$ , および  $D_+ \equiv T \setminus (D \cup \Gamma)$  の組を表わすものとする。この時次のような  $\mathcal{M}$  の閉部分空間を導入する。  $\mathcal{M}(D)$  (“過去”),  $\mathcal{M}(D)$  (“未来”) に対して  $\mathcal{M}(D_+)$  の  $\mathcal{M}(D)$  への正射影を  $\mathcal{M}^{\pm}(\Gamma)$  と書く。  $\mathcal{M}(\Gamma_{\pm}) \equiv \bigcap_{O \text{ は開集合, } O \supset \Gamma} \mathcal{M}(D_{\pm} \cap O)$  とし特に  $\mathcal{M}(\Gamma) = \mathcal{M}(\Gamma_{\pm})$  の時,  $\mathcal{M}(\Gamma) = \mathcal{M}(\Gamma)$  (“現在”) と書く。一般には,  $\mathcal{M}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(D) \cap \mathcal{M}(D_+) \subseteq \mathcal{M}^{\pm}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(D)$  となる。

### Definition.

- Gaussian process  $X_t, t \in T$  が “Markov 性” をもつ。  
 $\iff$  任意の組  $\{D, \Gamma, D_+\}$  に対して次の 2 条件がなりたつ。  
 (1)  $\mathcal{M}(\Gamma) = \mathcal{M}(\Gamma_+) = \mathcal{M}(\Gamma_-)$   
 (2)  $\mathcal{M}^{\pm}(\Gamma) = \mathcal{M}(\Gamma)$

以下 § 2. では 2p 階一様強楕円型偏微分作用素  $A$  に付随して定義される Gaussian process が Markov 性をもつことを述べる。Pitt [4] はこの process の “p 重 Markov 性” および予測問題への応用について述べている。 § 3. で我々は作用素  $A$  の Dirichlet 問題に関する議論をすることにより Pitt [4] とは別の方向から Markov 性を証明する。この方法は Molchan [3] が奇数次元径数 Brown 運動の Markov 性を示すのに用いたものである。 § 4. では Pitt [4] の結果に関連して若干の補足をする。

## § 2. 仮定と結果

各整数  $N \geq 0$  に対して  $C_0^\infty(T)$  ( $T$  に含まれる compact support をもつような無限回微分可能関数の全体) 上の内積  $(\cdot, \cdot)_N$  を次式で与える。

$$(u, v)_N = \sum_{|\alpha| \leq N} \int_T D^\alpha u(t) \overline{D^\alpha v(t)} dt, \quad \|u\|_N = (u, u)_N^{\frac{1}{2}}$$
  
ノルム  $\|\cdot\|_N$  に関する  $C_0^\infty(T)$  の  $L^2(T)$  の中での完備化を  $H^N(T)$  と書く。

### Assumptions.

1.  $A$  は次の条件をみたす  $2p$  階形式的自己共役一様強楕円型偏微分作用素,  $p \geq [\frac{d}{2}] + 1$ , とする。

$$(1) \quad Au = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(t) D^\beta u)$$

各  $\alpha, \beta$  ( $|\alpha|, |\beta| \leq p$ ) に対して  $a_{\alpha\beta}(t)$  は  $T$  上の無限回微分可能な有界関数。

$$(2) \quad \exists C > 0; \quad (u, Au)_0 \geq C \cdot \|u\|_p^2 \quad \text{for } \forall u \in C_0^\infty(T)$$

2.  $C_0^\infty(T)$  上のもう一つの内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を次式で与える。

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \int_T a_{\alpha\beta}(t) D^\alpha u(t) \overline{D^\beta v(t)} dt, \quad \|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

ノルム  $\|\cdot\|$  に関する  $C_0^\infty(T)$  の完備化を  $\mathcal{H}$  と書く。

この時 Sobolev の Lemma と Aronszajn [1] の理論を用いることにより容易に次のことが示される。:

(a) ノルム  $\|\cdot\|$  と ノルム  $\|\cdot\|_N$  は同値であり従って集合として  $\mathcal{H}$  と  $H^p(T)$  は同一視できる。

(b) Hilbert space  $\mathcal{H}$  は再生核  $R(t, s)$  をもつ r.k.h.s. である。

(c)  $\mathcal{H}$  の元は  $T$  上の  $\mu$ -Lipschitz 連続関数。 ( $0 < \mu \leq 1$ ,  $0 < \mu < p - \frac{d}{2}$ )

従って §1. のはじめに述べたように  $\mathcal{H}$  に対して Gaussian process  $X_t$ ,  $t \in T$  が一義的にきまるが特に covariance  $R(t, s)$  の Lipschitz 連続性により連続な sample paths をもつように modify できる。この報告では以下この process  $X_t$ ,  $t \in T$  のみを考える事にする。

### Theorem.

$X_t$ ,  $t \in T$  は Markov 性をもち、かつ  $\mathcal{H}^{+L}(\Gamma) \subsetneq \mathcal{H}(D_-)$      $\blacksquare$

### §3. Theorem の証明

まず Lemma をいくつか用意する。

#### Lemma. 1.

任意に組  $\{D_-, \Gamma, D_+\}$  をとる。この時、

$u \in H_0^p(T)$ , かつ  $u(t) = 0$ , for  $\forall t \in D_\pm$

$\implies$   $u$  の  $D_\mp$  への制限  $u_{D_\mp}$  に対して,  $u_{D_\mp} \in H_0^p(D_\mp)$      $\blacksquare$

<証明>

$\gamma_{\Gamma_\pm}$  を  $D_\pm$  に対応する境界  $\Gamma$  への trace 作用素とする。(定義は溝畑[2]による。) この時、任意の  $u \in H_0^p(T)$  に対して、

$$\gamma_{\Gamma_+}(D^\alpha u_{D_+}) = \gamma_{\Gamma_-}(D^\alpha u_{D_-}) \quad \text{for } \forall \alpha; |\alpha| \leq p-1$$

実際,  $\exists \{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset C_0^\infty(T)$  ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha u\| = 0 \quad \text{for } \forall \alpha; |\alpha| \leq p-1$$

従って trace 作用素の定義から, 各  $\alpha$  ( $|\alpha| \leq p-1$ ) に対して,

$$\begin{aligned} Y_{\Gamma}(D^{\alpha}u_{D_+}) &= Y_{\Gamma}((D^{\alpha}u)_{D_+}) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{\Gamma}((D^{\alpha}\varphi_n)_{D_+}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{\Gamma}((D^{\alpha}\varphi_n)_{D_-}) = Y_{\Gamma}((D^{\alpha}u)_{D_-}) \\ &= Y_{\Gamma}(D^{\alpha}u_{D_-}) \end{aligned}$$

今, 特に  $u$  が  $D_{\pm}$  上で恒等的に 0 に等しければ

$$Y_{\Gamma_{\pm}}(D^{\alpha}u_{D_{\pm}}) = 0 \quad \text{for } \forall \alpha; |\alpha| \leq p-1$$

$$\text{ゆえに, } Y_{\Gamma_{\mp}}(D^{\alpha}u_{D_{\mp}}) = 0 \quad \text{for } \forall \alpha; |\alpha| \leq p-1$$

$$\text{また, } Y_{\partial T}(D^{\alpha}u) = 0 \quad \text{for } \forall \alpha; |\alpha| \leq p-1$$

$$\text{結局, } u_{D_{\mp}} \in H_0^p(D_{\mp})$$

Lemma 2.

任意に組  $\{D_-, \Gamma, D_+\}$  をとる。この時,

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{H}(D_{\pm}) \\ \iff u &\in H_0^p(T), \text{ かつ,} \end{aligned}$$

$$Au(t) = 0, \quad \text{for } \forall t \in D_{\mp}$$

<証明>

まず,  $u \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}(D_{\pm}) \equiv \mathcal{H}^{\perp}(D_{\pm}) \Leftrightarrow u(t) = \langle u, R(\cdot, t) \rangle, \forall t \in \overline{D_{\pm}}$

即ち,  $\mathcal{H}^{\perp}(D_{\pm}) = \{u \in \mathcal{H}; u(t) = 0, \text{ for } \forall t \in \overline{D_{\pm}}\}$  に注意する。さて, 任意の  $u \in \mathcal{H}(D_{\pm})$  をとる。

$$\langle u, \varphi \rangle = 0, \quad \text{for } \forall \varphi \in C_0^{\infty}(D_{\mp}) \subseteq \mathcal{H}^{\perp}(D_{\pm})$$

部分積分により

$$\int_{D_{\mp}} u(t) \overline{A\varphi(t)} dt = 0, \quad \text{for } \forall \varphi \in C_0^{\infty}(D_{\mp})$$

一方  $A$  は形式的自己共役だから、 $D_{\mp}$  上で  $u$  は  $Au=0$  の weak solution である。従って強楕円型作用素の regularity theorem により、 $u \in C^{\infty}(D_{\mp})$  かつ  $D_{\mp}$  上で  $u$  は  $Au=0$  の classical solution である。

逆に  $u \in H_0^p(\Gamma)$  かつ、各  $t \in D_{\mp}$  に対して  $Au(t)=0$  とする。

この時、 $u \in \mathcal{H}$  だから次のように直和分解できる。:

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}, \quad (u^{(1)} \in \mathcal{H}(D_{\pm}), u^{(2)} \in \mathcal{H}^{\perp}(D_{\pm}))$$

任意の  $\varphi \in C_0^{\infty}(D_{\mp}) \subseteq \mathcal{H}^{\perp}(D_{\pm})$  に対して

$$\langle u^{(2)}, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle - \langle u^{(1)}, \varphi \rangle = 0$$

ゆえに前半と同様にして、 $u^{(2)}$  は  $D_{\mp}$  上で  $Au^{(2)}=0$  の classical solution である。一方 Lemma 1 により、 $u_{D_{\mp}}^{(2)} \in H_0^p(D_{\mp})$ 。

ゆえに  $A$  に対する  $D_{\mp}$  における Dirichlet 問題の解の一意性から、 $u_{D_{\mp}}^{(2)}(t) \equiv 0$ 。結局  $u^{(2)}(t) \equiv 0$ 、従って、

$$u \equiv u^{(1)} \in \mathcal{H}(D_{\pm})$$

### Lemma 3.

任意に組  $\{D_-, \Gamma, D_+\}$  をとる。この時

$$\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+) = \{u \in H_0^p(\Gamma); Au(t)=0 \text{ for } \forall t \in D_- \cup D_+\}$$

<証明>

$$\mathcal{H}(\Gamma_{\pm}) = \bigcap_{0 \leq \Gamma: 0 \text{ は開集合}} \mathcal{H}(D_{\pm} \cap 0) = \bigcap_{0 \leq \Gamma: 0 \text{ は滑らかな超曲面で囲まれた開集合}} \mathcal{H}(D_{\pm} \cap 0)$$

とできる。従って Lemma 2 により、

$$\mathcal{H}(\Gamma_{\pm}) \subseteq \{u \in H_0^p(\Gamma); Au(t)=0 \text{ for } \forall t \in D_- \cup D_+\} \equiv S$$

$$S \subseteq \mathcal{H}(D_+ \cap O) \cap \mathcal{H}(D_- \cap O), \quad \text{for } \forall O \text{ : 滑らかな超曲面で囲まれた開集合, } O \supset \Gamma$$

これらをあわせて

$$\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+) = S$$

さて Theorem の証明にとりかかろう。まず  $\mathcal{H}(\Gamma_-) = \mathcal{H}(\Gamma_+) = \mathcal{H}(\Gamma)$  は Lemma 3 で示された。次に,  $\mathcal{H}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}^{+-}(\Gamma)$  は明日だから  $\mathcal{H}^{+-}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}(\Gamma)$  を示せばよい。任意の  $u_+ \in \mathcal{H}(D_+)$  をとり次のように直和分解する。:

$$u_+ = u^{+-} + u_0, \quad (u^{+-} \in \mathcal{H}(D_-), u_0 \in \mathcal{H}^+(D_-))$$

Lemma 2. から

$$A u^{+-}(t) = 0, \quad \text{for } \forall t \in D_+$$

また,  $u^{+-}(t) = u_+(t), \quad \text{for } \forall t \in D_-$ , および Lemma 2 から

$$A u^{+-}(t) = 0, \quad \text{for } \forall t \in D_-$$

従って,  $A u^{+-}(t) = 0, \quad \text{for } \forall t \in D_- \cup D_+$

ゆえに Lemma 3 から,  $u^{+-} \in \mathcal{H}(\Gamma)$ , 結局  $\mathcal{H}^{+-}(\Gamma) \subseteq \mathcal{H}(\Gamma)$ .

最後に  $\mathcal{H}^{+-}(\Gamma) \subsetneq \mathcal{H}(D_-)$  を示そう。  $t_0 \in D_-$  を任意にとりて固定する時,  $R(\cdot, t_0) \in \mathcal{H}(D_-)$  であるが,  $R(\cdot, t_0) \notin \mathcal{H}^{+-}(\Gamma)$ . 実際, 任意の  $\varphi \in C_0^\infty(T)$  に対して

$$\langle \varphi, R(\cdot, t_0) \rangle = \varphi(t_0),$$

即ち,  $AR(\cdot, t_0) = \delta(t - t_0)$  となり  $R(\cdot, t_0) \notin \mathcal{H}(\Gamma) \equiv \mathcal{H}^{+-}(\Gamma)$ .

#### § 4. 補 足

(a)我々は Lemma 2 を用いて Markov 性を証明したが, Pitt [4] は Markov 性 ( $p$  重 Markov 性) の結果として Lemma 2 の内容を導いている。

(b)我々の考察した Gaussian process  $X_t, t \in T$  に対して Lemma 2 を用いて容易に,  $\mathcal{H}(D_{\pm}) = \bigcap_{0 \text{ は開集合 } \supset D_{\pm}} \mathcal{H}(0)$  を示すことができる。従ってこの式の右辺で “過去, および” 未来, を定義しても同じ結果を得る。

(c) Lemma 1 における超曲面  $\Gamma$  の滑らかさは  $C^2$ -クラスとすれば十分である。(溝畑 [2])

### 参考文献

- [1] N. Aronszajn, "Theory of reproducing kernels," Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950), 337 — 404
- [2] 溝畑 茂, 「偏微分方程式論」, 岩波書店
- [3] G.M. Malchan, "On some problems concerning Brownian motion in Lévy's sense," Theory of Prob. and its Appl. 12 (1967) 682 — 690
- [4] L.D. Pitt, "A Markov property for Gaussian processes with a multidimensional parameter," Arch. Rat. Mech. Analysis, 17 (1971), 367-391.