

KPZ, δ -Bose gas and random matrices

今村 卓史*

December 18, 2010

Abstract

界面成長を記述する 1 次元 Kardar-Parisi-Zhang(KPZ) 方程式について考察する. KPZ 方程式の高さの N 次指数モーメントが, N 粒子 δ 関数 Bose 気体の虚時間ダイナミクスで記述される. δ 関数 Bose 気体に関する Bethe 仮説の結果を用いて, 高さの指数モーメント母関数が Fredholm 行列式で表わされる. この母関数は長時間極限において高さの分布関数を表すが, それは GUE Tracy-Widom 分布に収束する.

1 はじめに

界面成長は, 山火事の伝搬, 紙の燃焼, バクテリアコロニーの成長等, 分野・スケールを超えていたところで現れる現象である. 1986 年に Kardar, Parisi, Zhang は界面成長を記述する方程式を提唱した [1, 2]. 空間が 1 次元の場合

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \nu \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} + \eta(x, t) \quad (1.1)$$

と表わされる. ただし $h(x, t)$ は空間 x , 時刻 t における界面の高さを表す. 右辺第 1 項は非線形項であり, 第 2 項は拡散項を表す. $\eta(x, t)$ はランダムネスの効果を表し, 白色ノイズとする.

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = D \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (1.2)$$

この方程式は, Kardar-Parisi-Zhang(KPZ) 方程式と呼ばれている.

界面成長において, とりわけ重要なのはその揺らぎの普遍的な性質である. それを調べるために,

$$w(L, t) := \sqrt{\langle h(x, t)^2 \rangle - \langle h(x, t) \rangle^2} \quad (1.3)$$

という量を定義する. ただし L は考えている系のサイズを表す. この時

$$w(L, t) \sim \begin{cases} t^\beta, & t < t_c, \\ L^\alpha, & t_c < t, \end{cases} \quad t_c \sim L^z \quad (1.4)$$

*東京大学先端科学技術研究センター, E-mail:imamura@gamology.rcast.u-tokyo.ac.jp

というスケーリングが成り立つことが、多くの数値計算、実験で成立することが確認されている。すなわち高さ揺らぎは、まず時間 t について t^β で成長するが、 t_c まで時間が経つと飽和し一定値になる。その大きさが L^α 程度というわけである。1次元 KPZ 方程式の場合、

$$\alpha = 1/2, \beta = 1/3, z = 3/2 \quad (1.5)$$

となることが動的繰り込み群によって解析的に導出されている [1]。さらに Eden モデル、Ballistic deposition モデル等の界面成長の数値モデルにおいても (1.5) 式の指数が現れることが、数値的に確かめられている。このように (1.5) 式は、様々モデルで成立する普遍的な指数なのである。これらの指数によって特徴づけられる普遍クラスのことを KPZ 普遍クラスと呼ぶ。

KPZ 普遍クラスに属するモデルの中には、性質のよい数値構造をもった、「可解モデル」が存在する。その中の典型的なものとして、非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process, ASEP) や多核成長モデル (Polynuclear growth (PNG) model) があげられる。2000 年に Johansson[3], Prähofer-Spohn[4] は、これらのモデルにおいて、高さ揺らぎの指数 $\beta (= 1/3)$ だけでなく、分布関数そのものを厳密に導出した。(この結果の日本語の解説として、[5] がある。) 彼らは、無限に伸びた (サイズ L が無限大) 一次元空間上で droplet 成長と呼ばれる界面が丸い形に成長する場合について考察した。 h を原点における高さとする。これは平均的に t に比例した高さで成長し、そこからの揺らぎは $t^{1/3}$ (指数 $1/3$ は (1.5) 式の β に対応) となることを考慮し

$$H_t := \frac{h - At}{Ct^{1/3}} \quad (1.6)$$

としてスケールされた高さを定義する。(ただし、 A, C はモデルのパラメータに依存する適当な定数) この時

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob}(H_t \leq s) = F_2(s) \quad (1.7)$$

となることを示した。(1.7) 式の右辺の $F_2(s)$ は GUE Tracy-Widom 分布 [6] であり、

$$F_2(s) = \det(1 - K_2) \quad (1.8)$$

と書ける。ただし右辺は Fredholm 行列式

$$\det(1 - K_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_s^{\infty} d\xi_1 \cdots d\xi_k \det(K_2(\xi_m, \xi_n))_{m,n=1}^k \quad (1.9)$$

で表わされ、その積分核は

$$K_2(\xi_1, \xi_2) = \int_0^{\infty} d\lambda \text{Ai}(\xi_1 + \lambda) \text{Ai}(\xi_2 + \lambda) \quad (1.10)$$

と定義される。 $\text{Ai}(x)$ はエアリー関数である。GUE Tracy-Widom 分布は Gaussian Unitary Ensemble (GUE) と呼ばれる、エルミート行列のランダム行列の最大固有値分布として最初に導出された [7]。このように PNG モデルの高さ揺らぎの分布関数が、ランダム行列の最大固有値という一見すると何の関係もなさそうなものに一致するというのは非常に興

味深いことである。さらに, droplet 成長ではなく flat(平坦)に成長する場合, 揺らぎの指数は $1/3$ で変わらないにもかかわらず, 分布関数は GUE(Gaussian Orthogonal Ensemble) Tracy-Widom 分布と呼ばれる, GUE とは異なるクラスのランダム行列の最大固有値分布で表わされることも示された [4]. つまり揺らぎの分布関数は, 指数だけではとらえられない初期条件の違いをとらえるという意味で, 詳細な視点を提供しているのである. この研究以後, ASEP や PNG モデルについて高さ揺らぎの多点および多時刻相関についての研究が精力的に行われ, モデルの数理構造および物理的性質の理解が大きく進展している [8, 9].

2010 年に入り, この方面の研究は新たな段階に入っている [10]. まず, 竹内・佐野による界面成長の実験が現れた [11]. 彼らは液晶乱流系における 2 つの相 (DSMI と DSMII) の間の界面成長の実験が行い, (1.4) 式の高さ揺らぎ指数が KPZ 普遍クラスの指数 ((1.5)) 式に精度よく一致することを示した. これまで KPZ 普遍クラスの指数を明確に出す実験はほとんど知られていなかったのでこの段階で驚くべきことだが, この実験の真のインパクトは, 高さ揺らぎの分布関数そのものが解析出来たことにある. droplet 成長の場合, 高さ揺らぎの分布関数が GUE Tracy-Widom 分布に一致することを初めて実験的に示したのだ.

理論的な側面としては, 笹本-Spohn[12, 13, 14], Amir-Corwin-Quastel[15] らの研究を契機に大きく進展している. 高さ揺らぎの厳密解についてはこれまでは ASEP や PNG モデルという可解モデルでのみ得られていたが, 後述する narrow wedge 初期条件という droplet 成長に関連する初期条件について, KPZ 方程式 (1.1) そのものの高さ揺らぎ分布関数の厳密解が得られたのである. それによると, 長時間極限において (1.7) 式のように GUE Tracy-Widom 分布に収束することが示される. 「KPZ 方程式は KPZ 普遍クラスに属する」[12] のだ. また [12] では, 長時間極限をとる前の, 時間が有限の時に現れる分布関数の普遍性についても議論されている. たとえばこの厳密解は, 高さ揺らぎが GUE Tracy-Widom 分布にどのように減衰するかを教えるが, その様子は [11] の実験結果と整合し, 駆動の弱い界面成長に普遍的であることを示唆している.

本稿では, この 2010 年以降活発に研究されている KPZ 方程式の理論的な研究を解説する. 特に Dotsenko[16], Calabrese-Le Doussal-Rosso[17] による, KPZ 方程式の δ -Bose 気体へのマッピングを用いた, 分布関数の厳密解に関する研究を紹介したい. [12, 13, 14, 15] で議論された narrow wedge 初期条件において, KPZ の高さ揺らぎが, 長時間極限において GUE Tracy-Widom 分布で表わされる. これを理解することを目標とする. 本稿の構成は以下のとおりである. 2 章で, KPZ 方程式と δ -Bose 気体へのマッピングを議論する. 3 章では, δ -Bose 気体の Bethe 仮説の結果を用いて, 高さの指数モーメントの母関数が Fredholm 行列式で記述されることを議論する. さらに長時間極限において, この Fredholm 行列式が (1.9) で表わされる, すなわち GUE Tracy-Widom 分布になることを示す.

2 KPZ 方程式と δ -Bose 気体

以下では簡単のため, (1.1) 式で $\nu = 1/2, \lambda = 1, D = 1$ とする. KPZ 方程式は, Cole-Hopf 変換

$$Z(x, t) = \exp(h(x, t)) \quad (2.1)$$

によって,

$$\frac{\partial Z(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} + \eta(x, t) Z(x, t) \quad (2.2)$$

という線形方程式に変換される。したがって $Z(x, t)$ は次のような経路積分表示を持つ。

$$Z(x, t) = \int Dx \exp(-S[x]) \quad (2.3)$$

ただし作用 $S[x]$ は

$$S[x] = \int_0^t dt' \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt'} \right)^2 - \eta(x, t') \right) \quad (2.4)$$

である。(2.3) 式の積分は経路積分であり、あらゆる経路 $x(s)$, $0 \leq s \leq t$ に関して $\exp(-S)$ の重みで足し上げることの意味する。(2.3), (2.4) 式は、2次元ランダム媒質中のポリマーの統計力学の分配関数と解釈できる。経路 $x(s)$, $0 \leq s \leq t$ は (x, t) 2次元空間上でのポリマーの配置を意味する。ただし $x(s)$ は s の一価関数という制約があり、これは「方向性のあるポリマー (directed polymer)」である。(2.4) 式の第一項はポリマーの弾性エネルギー、第2項はランダムなポテンシャルエネルギーを表す。また (2.1) 式より、KPZ 方程式の高さは、ランダムポリマーの問題における自由エネルギー (の符号を逆にしたもの) に対応することが分かる。

経路 $x(s)$, $0 \leq s \leq t$ の終点 $x(t)$ は x に固定する。一方始点は、(1.1) 式の初期条件に依存する。典型的な初期条件として

(i) narrow wedge

$$\begin{aligned} h(x, t=0) &= -\delta|x| - \log_2 \delta, \quad \delta \rightarrow 0, \\ Z(x, t=0) &= \exp(h(x, t)) = \delta(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

(ii) flat

$$h(x, 0) = 0, \quad Z(x, 0) = 1 \quad (2.6)$$

が挙げられる。(図1) (i) の場合 (2.3) 式の経路積分の始点は $x(0) = 0$ に固定される。(ii) の場合は始点は固定されず、 $-\infty < x(0) < \infty$ のすべてを考える。

さて、このような定式化の下、 $\langle Z^N(x, t) \rangle$, $N = 0, 1, 2, \dots$ という量を考えてみよう。ただし $\langle \cdot \rangle$ は (1.1) 式の $\eta(x, t)$ によるランダムネスに関する平均を表す。これは上述のランダムポリマーの問題では、 N レプリカ分配関数を意味する。(1.2) 式を用いると

$$\begin{aligned} \langle Z^N(x, t) \rangle &= \left\langle \int \prod_{i=1}^N Dx_i \exp \left[- \int_0^t dt' \left(\sum_{j=1}^N \frac{(\dot{x}_j)^2}{2} - \eta(x_j, t') \right) \right] \right\rangle \\ &= \int \prod_{i=1}^N Dx_i \exp \left[- \int_0^t dt' \left(\sum_{j=1}^N \frac{(\dot{x}_j)^2}{2} - \sum_{j,k=1}^N \delta(x_j(t') - x_k(t')) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

となることが分かる。この式のデルタ関数の項は $j = k$ を含む。したがってこの式は発散の項を含んでいることに気がつく。これは KPZ 方程式のそもそもホワイトノイズ $\eta(x, t)$ が微分不可能であることから生じる発散である。この発散の困難は

$$\sum_{j,k=1}^N \rightarrow \sum_{j,k \neq 1}^N \quad (2.8)$$

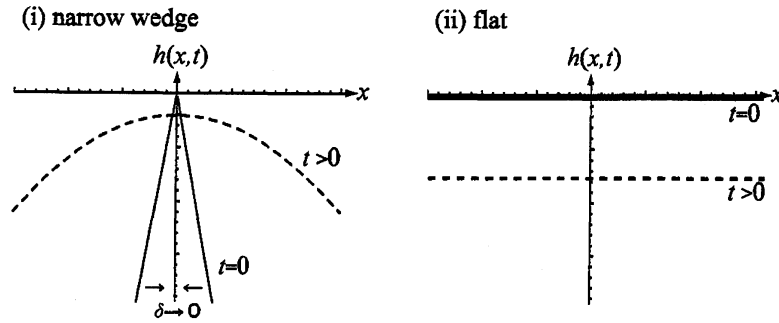


Figure 1: (i)narrow wedge 初期条件と (ii)flat 初期条件. 破線は $t > 0$ の高さの平均を表す. (1.1) 式にはノイズ項 $\eta(x, t)$ があり, $h(x, t)$ はこれらの点線の周りで $t^{1/3}$ のオーダーで揺らいでいる.

とすることによって取り除かれる. (より詳しい議論については [13] をご参照ください.) 我々は以後このような正則化の下で KPZ 方程式を考察する. すなわち

$$\langle Z^N(x, t) \rangle = \int \prod_{i=1}^N Dx_i \exp \left[- \int_0^t dt' \left(\sum_{j=1}^N \frac{(\dot{x}_j)^2}{2} - \sum_{j,k \neq 1}^N \delta(x_j(t') - x_k(t')) \right) \right] \quad (2.9)$$

を考える.

ここで, KPZ 方程式と量子多体系のダイナミクスとのつながりが明らかになる. (2.9) 式の右辺は, δ 関数で相互作用する N 粒子 Bose 気体の虚時間ダイナミクスを表していることに気がつく. すなわち, (2.9) 式は

$$H_N = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^N \delta(x_j - x_k) \quad (2.10)$$

をハミルトニアンとして,

$$\langle Z^N(x, t) \rangle = \langle x | e^{-H_N t} | \Phi \rangle \quad (2.11)$$

ということを表している. ただし $|x\rangle$ は N 個の粒子がすべて位置 x にいる状態を表す, $|\Phi\rangle$ は初期状態であるが, KPZ 方程式の初期条件に依存する. (i) narrow wedge((2.5) 式), (ii) flat((2.6) 式) 初期条件の場合, それぞれ

(i) narrow wedge

$$|\Phi\rangle = |x = 0\rangle \quad (2.12)$$

(ii) flat

$$|\Phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \cdots dy_N |y_1, y_2, \cdots, y_N\rangle \quad (2.13)$$

となる.

3 Bethe 仮説, Fredholm 行列式

以下では, narrow wedge 初期条件における原点 $x = 0$ での高さに着目する. この時, 高さ $h(x = 0, t)$ は

$$h(0, t) = -\frac{1}{24}t - \left(\frac{t}{2}\right)^{1/3} f \quad (3.1)$$

とスケールされる. 我々は長時間極限で f がどのような確率分布に従うかを議論したい. そのためにこの章ではモーメント母関数

$$W_r(s) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-e^{rs})^N}{N!} \langle \tilde{Z}^N(0, t) \rangle \quad (3.2)$$

を考察する. ただし $r = (t/2)^{1/3}$ であり,

$$\langle \tilde{Z}^N(0, t) \rangle := \langle Z^N(0, t) \rangle e^{\frac{Nt}{24}} = \langle e^{-Nfr} \rangle \quad (3.3)$$

はスケールされた高さ f の指数モーメントを表す. この母関数 $W_r(s)$ は長時間極限において f の分布関数を与える. 実際

$$W_r(s) = \left\langle \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-e^{r(s-f)})^N}{N!} \right\rangle = \langle e^{-e^{r(s-f)}} \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \langle \Theta(f - s) \rangle = \text{Prob}(f > s) \quad (3.4)$$

となっている. ただし $\Theta(x)$ は階段関数を表す.

我々はまず, 高さの指数モーメント $\langle Z^N(0, t) \rangle$ について考える.

$$H_N |\Psi_z\rangle = E_z |\Psi_z\rangle \quad (3.5)$$

で定義される δ -関数 Bose 気体 ((2.10) 式) の固有エネルギー E_z , 固有状態 $|\Psi_z\rangle$ を用いると, (2.9) 式は

$$\langle Z^N(x = 0, t) \rangle = \langle 0 | e^{-H_N t} | 0 \rangle = \sum_z |\langle 0 | \Psi_z \rangle|^2 e^{-E_z t} \quad (3.6)$$

と展開できる. z は固有状態のラベルを表しているが以下で詳しく説明する.

1次元 δ -関数 Bose 気体は Bethe 仮説によって, 固有値, 固有関数の厳密解が得られている [18, 19]. それらは次のように与えられる.

$$\langle x_1, \dots, x_N | \Psi_z \rangle = C_z \sum_{P \in S_N} (-1)^{\text{sgn} P} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j + i \text{sgn}(x_j - x_k)) \exp \left(i \sum_{j=1}^N z_{P(j)} x_j \right) \quad (3.7)$$

ただし S_N は N 個の置換全体の集合を表し, P はその1つの要素とする. z_j , $1 \leq j \leq N$ は擬運動量とよばれ, 固有値, 固有関数を特徴づける量である. (2.10) 式の δ 関数の係数は負

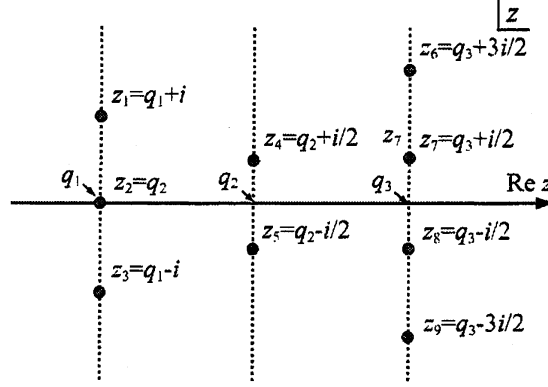


Figure 2: 擬運動量 z_j , $1 \leq j \leq N$ の分布. ここでは $N = 9$, $M = 3$, $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$ の場合を書いた.

であるので引力相互作用である. この時は z_j は一般に虚数であり, 図 2 のように分布している. その実部を q_k , $1 \leq k \leq M$ として, 虚軸方向に長さ 1 で等間隔に分布している. M は q_k の個数である. また実部が q_k である粒子の個数を n_k とする. $\sum_{k=1}^M n_k = N$ を満たすことに注意する. この状況を式で表わすと

$$\begin{aligned} z_j &= q_{\alpha(j)} - \frac{i}{2} (n_{\alpha(j)} + 1 - 2r(j)), \\ \alpha(j) &= k, \text{ for } \sum_{a=1}^{k-1} n_a < j \leq \sum_{a=1}^k n_a, \\ r(j) &= j - \sum_{a=1}^{\alpha(j)-1} n_a \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる. 上のような z_j , $1 \leq j \leq N$ の場合, 規格化定数は

$$|C_z|^2 = \frac{1}{N!} \prod_{\alpha=1}^M \frac{1}{n_{\alpha}} \prod_{j=1}^{n_{\alpha}-1} \frac{1}{(j!)^2} \prod_{\alpha < \beta} \prod_{r=1}^{n_{\alpha}} \prod_{r'=1}^{n_{\beta}} \frac{1}{|(q_{\alpha} - \frac{i}{2}n_{\alpha}) - (q_{\beta} - \frac{i}{2}n_{\beta}) + i(r - r' - 1)|^2} \quad (3.9)$$

であり, 固有エネルギーは

$$E_z = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N z_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M n_j q_j^2 - \frac{1}{24} \sum_{j=1}^M (n_j^3 - n_j) \quad (3.10)$$

で与えられることが知られている.

これらの Bethe 仮説の結果を用いると, 計算をさらに進めることが出来る. まず, (3.7)

式より,

$$\begin{aligned}\langle 0|\Psi_z\rangle &= C_z \sum_{P \in S_N} (-1)^{\text{sgn} P} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j + i f(i, j)) \\ &= C_z N! \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j)\end{aligned}\quad (3.11)$$

となる. ただし右辺第1項目の $f(i, j)$ は (3.7) 式の $\text{sgn}(x_i - x_j)$ の項から来るもので, x_i と x_j の大小関係に応じて+1または-1をとる. 右辺第2項目は z_j が任意の複素数, $f(i, j)$ が任意の複素数で成り立つ恒等式である. (証明は [22] Lemma 1 をご参照ください.)

(3.11), (3.8), (3.9) 式を用いると, (3.6) 式のノルム $|\langle 0|\Psi_z\rangle|^2$ の部分が

$$|\langle 0|\Psi_z\rangle|^2 = \frac{N!}{\prod_{\alpha=1}^M n_\alpha} \prod_{\alpha < \beta}^M \frac{|q_\alpha - q_\beta - \frac{i}{2}(n_\alpha - n_\beta)|^2}{|q_\alpha - q_\beta - \frac{i}{2}(n_\alpha + n_\beta)|^2} \quad (3.12)$$

という形でまとめられる. 公式

$$\frac{\prod_{\alpha < \beta}^M (a_\alpha - a_\beta)(b_\alpha - b_\beta)}{\prod_{\alpha, \beta=1}^M (a_\alpha - b_\beta)} = (-1)^{M(M-1)/2} \det \left(\frac{1}{a_\alpha - b_\beta} \right) \quad (3.13)$$

および, 行列式の性質を用いると,

$$\begin{aligned}|\langle 0|\Psi_z\rangle|^2 &= 2^M N! \det \left(\frac{1}{n_j + n_k + 2i(q_j - q_k)} \right)_{j,k=1}^M \\ &= 2^M N! \int_0^\infty d\omega_1 \cdots d\omega_M \det \left(e^{-\omega_j(n_j + n_k + 2i(q_j - q_k))} \right)_{j,k=1}^M \\ &= 2^M N! \int_0^\infty d\omega_1 \cdots d\omega_M \det \left(e^{-n_j(\omega_j + \omega_k) - 2iq_j(\omega_j - \omega_k)} \right)_{j,k=1}^M\end{aligned}\quad (3.14)$$

と変形できる. さらに

$$\sum_z = \sum_{M=1}^N \frac{1}{M!} \prod_{j=1}^M \sum_{n_j=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dq_j}{2\pi} \delta_{\sum_{j=1}^M n_j, N} \quad (3.15)$$

に注意すると, (3.3) 式は

$$\begin{aligned}\langle \tilde{Z}^N(x, t) \rangle &:= \langle Z^N(x, t) \rangle e^{\frac{Nt}{24}} \\ &= \sum_{M=1}^N \frac{2^M N!}{M!} \prod_{j=1}^M \sum_{n_j=1}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dq_j}{2\pi} e^{-\frac{t}{2}n_j q_j^2 + \frac{t}{24}n_j^3} \int_0^\infty d\omega_j \delta_{\sum_{j=1}^M n_j, N} \det \left(e^{-n_j(\omega_j + \omega_k) - 2iq_j(\omega_j - \omega_k)} \right) \\ &= \sum_{M=1}^N \frac{N!}{M!} \prod_{j=1}^M \int_0^\infty d\omega_j \sum_{n_j=1}^\infty \delta_{\sum_{j=1}^M n_j, N} \det \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{dq}{\pi} e^{-n_j(\omega_j + \omega_k) - 2iq(\omega_j - \omega_k) - \frac{t}{2}n_j q^2 + \frac{t}{24}n_j^3} \right)\end{aligned}\quad (3.16)$$

したがって (3.2) 式で与えられるモーメント母関数は

$$\begin{aligned}
 W_r(s) &:= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-e^{rs})^N}{N!} \langle \tilde{Z}^N(0, t) \rangle \\
 &= 1 + \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^N \frac{(-e^{rs})^N}{M!} \prod_{j=1}^M \int_0^{\infty} d\omega_j \sum_{n_j=1}^{\infty} \delta_{\sum_{j=1}^M n_j, N} \\
 &\quad \times \det \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\pi} e^{-n_j(\omega_j + \omega_k) - 2iq(\omega_j - \omega_k) - \frac{t}{2}n_j q^2 + \frac{t}{24}n_j^3} \right) \\
 &= \sum_{M=0}^{\infty} \frac{(-1)^M}{M!} \int_0^{\infty} d\omega_1 \cdots d\omega_M \det (K_d(\omega_j, \omega_k)_{j,k=1}^M)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

上の式は (1.9) 式のような Fredholm 行列式となっている. そのカーネルは

$$K_d(\omega_j, \omega_k) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\pi} e^{-n(\omega_j + \omega_k) - 2iq(\omega_j - \omega_k) - \frac{t}{2}nq^2 + \frac{t}{24}n^3 + rns} \tag{3.18}$$

で与えられ, $r = (t/2)^{1/3}$ となる.

$W_r(t)$ の長時間極限を考えてみよう. 関係式

$$e^{\frac{1}{3}\lambda^3 n^3} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{Ai}(x) e^{\lambda nx} = 2^{-2/3} \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Ai}(2^{2/3}y) e^{2^{2/3}\lambda nx} \tag{3.19}$$

および変数変換

$$p := 2rq, \quad \xi_j = \frac{2\omega_j}{r} \tag{3.20}$$

を用いるとカーネルは

$$\begin{aligned}
 K_d(\xi_j, \xi_k) &= \frac{2^{2/3}}{r} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\xi_k - \xi_j)/2} \text{Ai}(2^{2/3}y) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-rn((p/2)^2 + (\xi_j + \xi_k)/2 - y - s)} \\
 &= \frac{2^{2/3}}{r} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\xi_k - \xi_j)/2} \text{Ai}(2^{2/3}y) \frac{e^{-r((p/2)^2 + (\xi_j + \xi_k)/2 - y - s)}}{1 + e^{-r((p/2)^2 + (\xi_j + \xi_k)/2 - y - s)}}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

ここで長時間極限 ($r \rightarrow \infty$) をとると

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{2} K_d(\xi_j, \xi_k) &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 2^{-1/3} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\xi_k - \xi_j)/2} \text{Ai}(2^{2/3}y) \Theta(-((p/2)^2 + (\xi_j + \xi_k)/2 - y - s)) \\
 &= 2^{-1/3} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\xi_k - \xi_j)/2} \text{Ai}(2^{2/3}((p/2)^2 + (\xi_j + \xi_k)/2 + y - s)) \\
 &= \int_0^{\infty} \text{Ai}(\xi_j - s + y) \text{Ai}(\xi_k - s + y)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

となる. ここで $\Theta(x)$ は階段関数である. また最後の等式において, 我々は関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ipy} \text{Ai}(p^2 + x) = 2^{-1/3} \text{Ai}(2^{-2/3}(x + y)) \text{Ai}(2^{-2/3}(x - y)) \quad (3.23)$$

を用いた. (3.22) 式は GUE Tracy-Widom 分布のカーネルに他ならない. したがって (3.4), (3.17), および (3.22) 式より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Prob}(f > s) = \lim_{t \rightarrow \infty} W_r(s) = F_2(s) \quad (3.24)$$

となることがわかる.

4 おわりに

本稿では, 1次元 KPZ 方程式の厳密解の研究について紹介した. δ 関数 Bose 気体へのマッピングが存在し, Bethe 仮説による厳密解を用いることが出来るのが重要である. そしてこの研究で驚くべきなのは, (3.6) 式という, 固有値, 固有関数による (単なる) 展開の式から出発して, (3.17) 式の Fredholm 行列式という意味のある数理構造を見出したことにある. (Fredholm) 行列式はイジングモデル, XY モデル等, 自由フェルミオンが関わるモデルの物理量において登場することが知られている. それがどうして δ 関数 Bose 気体という相互作用のある粒子系の中に現れたのだろうか? それを解明することは今後の大きな課題である.

KPZ 方程式の厳密解の研究は最近ますます進展している. (2.9) 式を見てみると, 興味深い関係に気がつく. 左辺は無限自由度に関する物理量であるが, それが右辺, すなわち有限個 (N 粒子) の δ -Bose 気体のダイナミクスの問題と等価であること表わしている. これは我々に双対性を連想させる. では ASEP についてこのような関係は成り立っているのだろうか? [20] で我々は, ASEP における (2.9) 式に相当する関係を見出した. その際に ASEP に潜む $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 対称性に起因する双対性 [21] が本質的な役割を果たす. また本稿では, 1つの $Z(x, t)$ についてそのモーメント母関数について議論したが, [22] では, 2つの $Z(x_1, t)$, $Z(x_2, t)$ に関する母関数を解析し, 長時間極限で 2 型エアリー過程の 2 点相関と一致することを示した. 2 型エアリー過程とは GUE Tracy-Widom 分布の動的な拡張を意味する. さらに [23] では, 離散空間上のランダムポリマーの問題を考察し, 量子戸田格子とのつながりを明らかにしている.

このように KPZ 方程式に関する研究は, 特に 2010 年に入り著しく進展している. 今後非平衡統計物理学の実験と理論および可積分系の 3 つの分野が触発しあい, モデルの数理構造の理解や, KPZ 系あるいは広く非平衡系における「普遍性」の理解が深まっていくと信じている.

References

- [1] M. Kardar, G. Parisi, and Y. C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, *Phys. Rev. Lett.*, 56: 889–892, 1986.
- [2] 本田勝也, フラクタル, 朝倉書店, 2002.

- [3] K. Johansson, Shape fluctuations and random matrices, *Commun. Math. Phys.*, 209: 437–476, 2000.
- [4] M. Prähofer and H. Spohn, Universal distributions for growth processes in 1+1 dimensions and random matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4882–4885, 2000.
- [5] 笹本智弘, 1次元非対称単純排他過程の厳密解, 物性研究, 79, 881–925, 2003.
- [6] C. A. Tracy and H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, *Commun. Math. Phys.*, 159: 151–174, 1994.
- [7] 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東大出版会, 2005.
- [8] T. Sasamoto, Fluctuations of the one-dimensional asymmetric exclusion process using random matrix techniques, *J. Stat. Mech.*, P07007, 2007.
- [9] 今村 卓史, 笹本 智弘, 非平衡系における時間相関の厳密解 日本物理学会誌, 64, No.6, 436–440, 2009.
- [10] 田崎 晴明, 「ゆらぐ界面」をめぐる実験と理論, 日本物理学会誌, 65, No.10. 760, 2010.
- [11] K. Takeuchi, M. Sano, Universal Fluctuations of Growing Interfaces: Evidence in Turbulent Liquid Crystals, *Phys. Rev. Lett.* 104, 230601, 2010.
- [12] T. Sasamoto, H. Spohn, One-Dimensional Kardar-Parisi-Zhang Equation: An Exact Solution and its Universality, *Phys. Rev. Lett.*, 104, 230602, 2010.
- [13] T. Sasamoto, H. Spohn, Exact height distributions for the KPZ equation with narrow wedge initial condition, *Nuc. Phys. B*, 834, 523–542, 2010.
- [14] T. Sasamoto, H. Spohn, The Crossover Regime for the Weakly Asymmetric Simple Exclusion Process, *J. Stat. Phys.*, 140, 209–231, 2010.
- [15] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel, Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in 1 + 1 dimensions, *Com. Pure. Appl. Math.*, DOI: 10.1002/cpa.20347
- [16] V. Dotsenko, Replica Bethe ansatz derivation of the Tracy-Widom distribution of the free energy fluctuations in one-dimensional directed polymers, *J. Stat. Mech.*, P07010, 2010.
- [17] P. Calabrese, P. Le Doussal, A. Rosso, Free-energy distribution of the directed polymer at high temperature, *Eur. Phys. Lett.*, 90, 20002, 2010.
- [18] E. Lieb, W. Liniger, Exact analysis of an interacting Bose gas. I. The general solution and the ground state, *Phys. Rev.*, 130, 1605–1616, 1963.

- [19] M. Takahashi *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*, *Cambridge University Press*, 1999.
- [20] T. Imamura, T. Sasamoto, Current moments of 1D ASEP by duality, arXiv:1011.4588
- [21] G. Schütz, Duality relations for asymmetric exclusion processes, *J. Stat. Phys.*, 86,1265–1287, 1997.
- [22] S. Prolhac, H. Spohn, Two-point generating function of the free energy for a directed polymer in a random medium, arXiv:1011.4014.
- [23] N. O’Connell, Directed polymers and the quantum Toda lattice, arXiv:0910.0069 v4.