

コーシー・リーマン (C. r.) 多様体上のポアンカレ補題 と、スタイン多様体の境界におけるド・ラーム コホモ ロロジー論

早大・理工 郡 敏昭

強疑凸領域の境界となる多様体, さらに $\mathbb{C}^n$ 内の実超平面
となる多様体の性質を抽象した *s.p.c (strongly pseudo
convex) manifold* や *c.r. (Cauchy-rieman) manifold*
の研究は Kohn の $\bar{\partial}$ -Neumann 問題の解法, その
境界への *reduction* により始められ 多くの研究者により
為されてきた。

一方 ド・ラーム コホモロロジー論として呼ばれる 閉
解析部分集合の 補空間となる解析空間のコホモロジーを
この閉解析部分集合上に特異性を持つ正則微分形式のつくる
複体のコホモロジーで表わそうという定理も Atiyah -
Hodge, Grothendieck 等 多くの人々に研究されてきてい
る。

そこで Stein 多様体の自然な境界に特異性を持つ (持た
ないときは 別の制限を持つ) 正則微分形式の複体コホモロ

ジーにより Stein 多様体のコホモロジーを表わそうという
C.R.型 (実・複素型) ド・ラーム コホモロジー論を試み
てみたい。

境界における正則形式の特異性を調べる以上 $\hat{\mathcal{O}}_X/\hat{\mathcal{O}}_X^*(\mathcal{O}_X)$
なる層を調べることも必要になる。ただし j_* は
領域 D の全空間 X への inclusion である。 Local cohom
ology 論を境界に適用した formal theory により この特
異性の層を表現する (§1)

次に 境界に沿った正則形式 (c.r. holomorphic form)
と、その近傍の正則形式との比較が問題になるであろう。
§2では C.R. 多様体上の正則形式の複体についてホアシカ
レ補題を示す。 この応用として s.p.c. manifold に対
し Hodge 分解 $H^*(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{H}^{p,q}$, $\mathcal{H}^{p,q}$ は
(c.r.) Laplacian の調和空間, かつ Kohn-Tanaka の結果
と合わせて導かれる。

§3で 最初に述べた試みを行なう。 凝凸領域の $\mathbb{C}$ -係数
コホモロジーは、境界に近づくとき法線方向にのみ正則性を
欠く正則微分形式の Hypercohomology により表現される。と
くに Stein なら そのような形式の複体コホモロジー と
して表現されるであろう。(最後の点は未完である)

§ 1. Local cohomology論と Andreotti - Grauert の結果による General nonsense

1.1. X を位相空間, D を X の部分領域で 相対コンパクト, B を D の境界とする.

$\bar{j}_+ : (\bar{D})^c \hookrightarrow X$, $\bar{j}_- : D \hookrightarrow X$, $j : DU(\bar{D})^c \hookrightarrow X$ を injections とする.

X の開集合 U に対し, $U_+ = U \cap (D)^c$, $U_- = U \cap \bar{D}$,

$\dot{U}_+ = U \cap (\bar{D})^c$, $\dot{U}_- = U \cap D$ とおく.

$\mathcal{F}$ を X 上の sheaf of abelian group とする.

$\Gamma_b(\mathcal{F}) : U \mapsto \Gamma_{U \cap B}(U, \mathcal{F})$ なる準層の決める層,

$\Gamma_{ex}(\mathcal{F}) : U \mapsto \Gamma_{U_+}(U, \mathcal{F})$ なる準層の決める層,

$H_b^q(\mathcal{F})$ (resp. $H_{ex}^q(\mathcal{F})$) : $\Gamma_b(\mathcal{F})$ (resp. $\Gamma_{ex}(\mathcal{F})$) の q 次導来函手,

としよう. $H_b^q(\mathcal{F})$, $H_{ex}^q(\mathcal{F})$ の台は B に含まれる.

(提案: $H_b^q(\mathcal{F})$ を q 次境界コホモロジー, $H_{ex}^q(\mathcal{F})$ を q 次彼岸コホモロジーと呼んではどうか)

1.2. Local cohomology の一般論より

$$(1.2.1) \quad 0 \rightarrow \Gamma_b(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \bar{j}_*(\mathcal{F}|_{X \setminus B}) \rightarrow H_b^1(\mathcal{F}) \rightarrow 0 \text{ exact,}$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad (\bar{j}_-)_*(\mathcal{F}|_D) \oplus (\bar{j}_+)_*(\mathcal{F}|_{(\bar{D})^c})$$

$$(1.2.2) \quad 0 \rightarrow \Gamma_{ex}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow (\bar{j}_-)_*(\mathcal{F}|_D) \rightarrow H_{ex}^1(\mathcal{F}) \rightarrow 0 \text{ exact,}$$

および, $p \geq 1$ に対し,

$$(1.2.3) \quad \begin{aligned} H_{\bar{\partial}}^{p+1}(\mathcal{F}) &\cong R^p(j_+)_*(\mathcal{F}|(\bar{D})^c) \oplus R^p(j_-)_*(\mathcal{F}|D), \\ H_{\text{ex}}^{p+1}(\mathcal{F}) &\cong R^p(j_-)_*(\mathcal{F}|D), \end{aligned}$$

を得る。

1.3. X を (reduced) analytic space, D を X の相対コンパクトな 強擬凸領域 とし, $\mathcal{F}$ を X 上の coherent sheaf of $\mathcal{O}_X$ -module とする。

Andreotti - Grauert : Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes : Bull. Soc. Math. France 90 (1962)

の p. 225 (Théorème 5) より $(r \geq 1)$

$\forall x \in B$ は $H^r(\bar{U}_-, \mathcal{F}) = 0$ なる性質を持つ 開集合 U よりなる 基本近傍系を持つ。したがって

$$(1.3.1) \quad R^p(j_-)_*(\mathcal{F}|D) = 0, \quad p \geq 1.$$

同上 p. 232 (Théorème 9) より

$\forall x \in B$ は $H^r(\bar{U}_+, \mathcal{F}) = 0, \quad 1 \leq r \leq \dim \mathcal{F} - 2,$

$$\Gamma(\bar{U}_+, \mathcal{F}) \cong \Gamma(U, \mathcal{F})$$

なる性質をもつ 開集合 U よりなる 基本近傍系を持つ。したがって

$$(1.3.2) \quad \begin{aligned} R^p(j_+)_*(\mathcal{F}|(\bar{D})^c) &= 0, \quad 1 \leq p \leq \dim \mathcal{F} - 2, \\ (j_+)_*(\mathcal{F}|(\bar{D})^c) &\cong \mathcal{F} \quad (\text{on } B). \end{aligned}$$

$$1.4. \quad \Gamma_b(\mathcal{F}) = 0$$

$$H_b^1(\mathcal{F}) \cong (j_-)_*(\mathcal{F}|D)$$

$$H_b^p(\mathcal{F}) = 0 \quad 2 \leq p \leq \dim \mathcal{F} - 1$$

が B 上で成り立つ。(2行目以外は X 全体で成立)

証明。最後の式は (1,2,3), (1,3,2), (1,3,1) よりわかる。

さて $\mathcal{U} \mapsto \Gamma_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ なる準層を決める層を $\Gamma_{in}(\mathcal{F})$,

その導来函数を $H_{in}^p(\mathcal{F})$ (此岸コホモロジー!) としよう。

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}_+, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\mathcal{U}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

なる exact 列より

$$0 \rightarrow \Gamma_{in}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow (j_+)_*(\mathcal{F}|(\bar{D})^c) \rightarrow H_{in}^1(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

なる exact 列を得るが, (1,3,2) より $\mathcal{F} \cong (j_+)_*(\mathcal{F}|(\bar{D})^c)$
(B 上で)

だったから

$$\Gamma_{in}(\mathcal{F}) = H_{in}^1(\mathcal{F}) = 0 \text{ on } B.$$

一方

$$0 \rightarrow \Gamma_{B \cap \mathcal{U}}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{U}_+, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\mathcal{U} \cap B}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

なる exact 列より

$$0 \rightarrow \Gamma_b(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_{in}(\mathcal{F}) \rightarrow (j_-)_*(\mathcal{F}|D) \rightarrow H_b^1(\mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

なる exact 列を得る。これより, B 上で,

$$\Gamma_b(\mathcal{F}) = 0, \quad H_b^1(\mathcal{F}) \cong (\mathcal{F})_*(\mathcal{F}|D).$$

1.5. $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ を X 上の連接層の完全列とし, $\Gamma_{ex}(\mathcal{F}'')_x = 0$ としよう. ($\mathcal{F}''$ が locally free sheaf of $\mathcal{O}_X$ -module の subsheaf なら この条件は満たされる.) このとき 列

$$0 \rightarrow H_{ex}^1(\mathcal{F}')_x \rightarrow H_{ex}^1(\mathcal{F})_x \rightarrow H_{ex}^1(\mathcal{F}'')_x \rightarrow 0$$

は 完全になる.

1.6. X を n 次元複素解析多様体とする. $\Omega_X^\bullet$ を正則微分形式のつくる複体とする. 正則ポアンカレ補題より

$$0 \rightarrow Z(\Omega^p) \rightarrow \Omega^p \xrightarrow{d} Z(\Omega^{p+1}) \rightarrow 0, \quad p \geq 1$$

は完全になる. ことに $Z(\Omega^p) = \{ \varphi \in \Omega^p; d\varphi = 0 \}$.

1.5 より, $p \geq 1$ に対し, (B 上で, したがって X 上で),

$$0 \rightarrow H_{ex}^1(Z(\Omega^p)) \rightarrow H_{ex}^1(\Omega^p) \xrightarrow{H_{ex}^1(d)} H_{ex}^1(Z(\Omega^{p+1})) \rightarrow 0$$

は exact 列. ゆえに

$$H_{ex}^1(\Omega^1) \xrightarrow{H_{ex}^1(d)} H_{ex}^1(\Omega^2) \rightarrow \cdots \xrightarrow{H_{ex}^1(d)} H_{ex}^1(\Omega^n) \rightarrow 0$$

は exact となる.

さて $0 \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \Omega_X^0 = \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} Z(\Omega_X^1) \rightarrow 0$, exact, したがって, B 上で,

$$0 = \Gamma_{ex}(Z(\Omega^1)) \rightarrow H_{ex}^1(\mathcal{C}) \rightarrow H_{ex}^1(\Omega^0) \xrightarrow{H_{ex}^1(d)} H_{ex}^1(Z(\Omega^1)) \rightarrow$$

$$\rightarrow H_{ex}^2(C) \rightarrow H_{ex}^2(\Omega^0) = 0$$

なる完全列を得る。これより B 上で

$$\mathcal{H}^1(H_{ex}^1(\Omega_X^\bullet)) \cong \frac{H_{ex}^1(Z(\Omega_X^\bullet))}{H_{ex}^1(\Omega^0)} \cong H_{ex}^2(C)$$

これは (1.2.3) より $\cong R^1(j_-)_*(C|D)$ 。 とするが

$$H^1(\tilde{U}_-, \mathbb{C}) = 0$$

だから, $R^1(j_-)_*(C|D) = 0$ 。 $\mathcal{H}^1(H_{ex}^1(\Omega_X^\bullet)) = 0$ 。

同じく上記の長い完全列より

$$\mathcal{H}^0(H_{ex}^1(\Omega_X^\bullet)) \cong H_{ex}^1(\mathbb{C}),$$

これは (1.2.2) より $\cong (j_-)_* \mathbb{C}/\mathbb{C} \cong 0$ 。

以上より, B 上で, したがって X 上で,

$$0 \rightarrow H_{ex}^1(\Omega_X^0) \rightarrow H_{ex}^1(\Omega_X^1) \rightarrow \cdots \rightarrow H_{ex}^1(\Omega_X^n) \rightarrow 0$$

が exact 列となることかわかった。

命題として書いておく。

命題. X を複素解析多様体, D を相対コンパクトな擬凸領域としよう。このとき,

$$0 \rightarrow H_{ex}^1(\Omega_X^0) \xrightarrow{H_{ex}^1(d)} H_{ex}^1(\Omega_X^1) \xrightarrow{H_{ex}^1(d)} \cdots \xrightarrow{H_{ex}^1(d)} H_{ex}^1(\Omega_X^n) \rightarrow 0$$

は完全列となる。言い換えれば complex $(H_{ex}^1(\Omega_X^\bullet), H_{ex}^1(d))$ は 0-complex と quasi-isomorphic。

1.7, 1.6と同様にして $H_b^1(\mathcal{O}_X^*)$ は $\mathbb{C}_B$ に quasi isomorph, $\exists$
 $\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}_B \rightarrow H_b^1(\mathcal{O}_X^*) \rightarrow H_b^1(\mathcal{O}_X^*) \rightarrow \dots$
 $\dots \rightarrow H_b^1(\mathcal{O}_X^*) \rightarrow \mathcal{O}$ exact

がわかる。ただし $\mathbb{C}_B$ は B 上で $\mathcal{O}$ 他で 0 なる
 層を表わす。この証明より

$$H_b^1(\mathcal{O}) \cong \mathbb{C}_B, \quad H_b^g(\mathcal{O}) = 0 \quad g \geq 2$$

がわかる。 $I_b(\mathcal{O}) = 0$ もすぐわかる。

1.8 1.4 および spectral sequence argument により
 X 上の coherent sheaf $\mathcal{F}$ に対し

$$H_B^{p+1}(X, \mathcal{F}) \cong H^p(B, H_b^1(\mathcal{F}))$$

がしたがる。

さらに 1.7 より

$$\begin{aligned} H_B^{p+1}(X, \mathcal{O}) &\cong H^p(B, H_b^1(\mathcal{O})) \\ &\cong H^p(B, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

がしたがる。これは Thom-Gysin isomorphism である。

§ 2. C.R. 多様体上の ポアソナレ補題

2.1. M を C^∞ -多様体, $T(M)$ を接ベクトル束, $T^C(M)$ をその複素化とする。

$T^C(M)$ の部分ベクトル束 S で 条件

$$(2.1.1) \quad S \cap \overline{S} = 0$$

$$(2.1.2) \quad [\xi, \eta] \in T(S) \quad , \quad \forall \xi, \eta \in T(S) \text{ に対し,}$$

を満たすものが与えられたとき, 組 (M, S) を C.R. 多様体と呼ぶ。

$f: M \rightarrow M'$ による C.R. 多様体 $(M, S), (M', S')$ の間の C^∞ -写像とすると,

$$df \otimes 1_C: T^C(M) \longrightarrow T^C(M')$$

が S を S' に写す; $df \otimes 1_C(S) \subset S'$, とき f を C.R. 写像と呼ぶ。

これにより C.R. 多様体と C.R. 写像をつくるカテゴリーが定まる。このカテゴリーは直積, 逆像等を持っている。

2.2. (M, S) を C.R. 多様体とする。exact 列

$$0 \rightarrow \overline{S} \xrightarrow{j} T^C(M) \rightarrow \pi(M) \rightarrow 0$$

により 正則接ベクトル束 $\pi(M)$ を定義する。なぜ正則ベクトル束と呼ぶかはここでは省略する。

M' を C^∞ 多様体, $f: M' \rightarrow M$ を C^∞ -写像とするとき $C.R.$ 構造 S の f による逆像が存在することは上に注意したが, それを S' とする。

$f_*: S' \rightarrow f^*S = M' \times_M S$ を M' 上のベクトル束の射とし, これより $f_b: \hat{\pi}(M') \rightarrow f^*\hat{\pi}(M)$ が導かれる。 f_b は単射になる。

2.3. (M, S) を $C.R.$ 多様体とする。余接束 $E^n = \wedge^n T^c(M)^*$ の開集合 U 上の横断を U 上の n 次微分形式と呼ぶ。外微分を d とするとき複体 (E, d) は次のような Filtration を持つ: $F^p(E^n)$ は E^n の部分束で, U 上の横断は

$$F^p(E^n)(U) = \left\{ \varphi \in E^n(U); \forall x \in U \text{ に対し, } \varphi_x \in \overline{S}_x, \right. \\ \left. \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, n-p+1, \quad u_j \in T^c(M)_x, \\ j=1, 2, \dots, p-1 \text{ なら} \\ \varphi_x(u_1, \dots, u_{p-1}, v_1, \dots, v_{n-p+1}) = 0 \end{array} \right\}.$$

$dF^p(E^n) \subset F^p(E^{n+1})$ が成り立つ。

$$C^{p,q}(M) = F^p(E^{p+q}) / F^{p+1}(E^{p+q})$$

と置こう。

$C^{p,q}(M)$ の横断を型 (p, q) の微分形式と呼ぶ。

$$C^{p,q}(M) \cong \wedge^p \hat{\pi}(M)^* \otimes \wedge^q \overline{S}^*$$

である。

型 (p, q) の微分形式 φ の外微分 $d\varphi$ は

$$d\varphi = d'\varphi + d''\varphi + \beta\varphi,$$

但, $d'\varphi$ の型は $(p+1, q)$, $d''\varphi$ の型は $(p, q+1)$, $\beta\varphi$ の型は $(p+2, q-1)$, と分解され 残りの成分は 0 となる。

$f: M \rightarrow M'$ を C.R. 写像 とする。 M' 上の微分形式 φ の f による逆像を $f^*\varphi$ と記すと, f^* は型を保存し,

$$\begin{array}{ccc} C^{p,q}(M) & \xleftarrow{f^*} & C^{p,q}(M') \\ d'' \downarrow & & \downarrow d'' \\ C^{p,q+1}(M) & \xleftarrow{f^*} & C^{p,q+1}(M') \end{array} \quad \text{可換}$$

となる。 d', β も同様。

2.4.

$$\Omega_M^p = \ker d' : C^{p,0}(M) \longrightarrow C^{p,1}(M)$$

と置く。

$$0 \rightarrow \Omega_M^0 \xrightarrow{d} \Omega_M^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_M^{n-1} \xrightarrow{d} \Omega_M^n \rightarrow 0$$

なる 微分複体 が得られる。

我々の目的は この複体についてのポアンカレ補題である。

すなわち 列

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_M^0 \xrightarrow{d} \Omega_M^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_M^{n-1} \rightarrow \Omega_M^n \rightarrow 0$$

が M についてどのような条件のもとに exact 列となるかを見ることにある。

微分計算

2.5. $E \rightarrow M$ を rank r のベクトル束, U を $\mathbb{C}^1$ 内の領域とするとき $\sigma: U \ni z \mapsto \sigma_z \in \Gamma(M, E)$ が C^∞ (すは正則) であるとは $\sigma(x): U \ni z \mapsto \sigma_z(x) \in E_x \cong \mathbb{C}^r$ が各 x について C^∞ (すは正則) となることを言う。 σ が C^∞ なら

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \sigma, \frac{\partial}{\partial z} \sigma : U \longrightarrow \Gamma(M, E)$$

も同じく C^∞ であり, U 内の rectifiable 曲線 γ に対し積分

$$\int_\gamma \sigma \, dz \in \Gamma(M, E)$$

が定義される。 σ が正則なら この積分は γ の両端点にのみ依存して定まる。

2.6. U を $\mathbb{C}^1$ 内の領域, M を C^∞ -多様体と

$$\begin{array}{ccc} j_z: M & \longrightarrow & U \times M \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & j_z(x) = (z, x) \end{array}, \quad z \in U,$$

同じく

$$j_x: U \longrightarrow U \times M, \quad j_x(z) = (z, x), \quad x \in M,$$

と記す.

$U \times M$ 上の p 次微分形式 φ は次のとき *projetable* と呼ばれる. $(z, x) \in U \times M$, $\xi_i, i=1, 2, \dots, p, \in T_{(z,x)}^0(U \times M)$ に対し 少なくともひとつの ξ_i が $\xi_i \in dj_x(T_z^0(U))$ となっているなら

$$\varphi_{(z,x)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = 0.$$

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ と φ を *projetable* 成分 φ_0 とそうでないものに分解すると, $j_z^* \varphi_0 = j_z^* \varphi$.

また $j_z^* \varphi_0 = \sigma_z$ により $\sigma: U \rightarrow T(\mathcal{E}^p(M))$ を定義するとき これが正則となる条件は

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi_0((z, x); \xi_1, \dots, \xi_p) = 0, \quad \forall (z, x) \in U \times M \\ \forall \xi_1, \dots, \xi_p \in dj_z(T_z^0(M))$$

である.

2.6. 多様体 V 上の, ベクトル場 ξ による Lie 微分は

$$(\mathcal{L}_\xi \varphi)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \xi(\varphi(\xi_1, \dots, \xi_p)) \\ - \sum_1^p \varphi(\xi_1, \dots, [\xi, \xi_j], \dots, \xi_p) \\ \text{但 } \xi_i \in T(T^0(V)), \quad p = \text{rank } \varphi,$$

と定義される

多様体 $U \times M$; $U \subset \mathbb{C}^1$, において $\xi \in T(T^0(U))$

なるベクトル場を $U \times M$ 上のベクトル場と考え、その Lie 微分を θ_z , $\theta(z)$ と書く。

2.5 に述べたことは Lie 微分を用いて次のように述べられる: M $\mathbb{C}^n$ -多様体, $U \subset \mathbb{C}^1$,

φ を $U \times M$ 上の rank p の微分形式とすると,

(2.6.1) $z \mapsto j_z^* \varphi$ が正則となるのは $j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial z}) \varphi = 0$ のときで、そのときにかぎる。

(2.6.2) $j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial z}) \varphi = \frac{\partial}{\partial z} (j_z^* \varphi)$, 右辺は 2.5 の意味。

(2.6.3) $j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial z}) \varphi = 0$ のとき

$$\int_{\gamma} j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial z}) \varphi \, dz = j_b^* \varphi - j_a^* \varphi,$$

ただし γ は a, b を結ぶ rectifiable curve で左辺の積分は 2.5 の意味,

(2.6.4) $\sigma: U \mapsto P(\mathbb{C}^p(M))$ が正則なとき

$$d_M \left(\int_{\gamma} \sigma \, dz \right) = \int_{\gamma} d_M \sigma \, dz$$

となることもわかる。ただし d_M は M 上の外微分。

2.7. 以上の結果を M が C.R. 多様体 (M, S) のときにもっとくわしく見よう。(2.8 で見る)

まず M 上のベクトル場 X に対し

$$(i_3 \varphi)_x (v_1, v_2, \dots, v_{p-1}) = \varphi_x (x, v_1, \dots, v_{p-1}),$$

$$v_i \in T_x^C(M), \quad i=1, \dots, p-1,$$

で定義される 内部積 i_3 は次の性質をもつことに注意する。

φ が 型 (p, q) の微分形式 で $\xi \in \Gamma(\wedge^p(M))$ なら

$i_3 \varphi$ は 型 $(p-1, q)$ の微分形式 となり, $\xi \in \Gamma(\bar{S})$

なら $i_3 \varphi$ は 型 $(p, q-1)$ の微分形式 になる。

これより次のことがわかる。

φ を 型 (p, q) の微分形式 とし $(\theta_3 \varphi)_{(r,s)}$ を Lie

微分 $\theta_3 \varphi$ の (r,s) 成分を記せば,

(2.7.1) $\xi \in \Gamma(\wedge^p(M))$ なら

$$(\theta_3 \varphi)_{(p,q)} = d' i_3 \varphi + i_3 d' \varphi$$

$$(\theta_3 \varphi)_{(p-1, q+1)} = d'' i_3 \varphi + i_3 d'' \varphi$$

$$(\theta_3 \varphi)_{(p+1, q-1)} = \beta i_3 \varphi + i_3 \beta \varphi$$

他の成分は 0.

(2.7.2) $\xi \in \Gamma(\bar{S})$ なら

$$(\theta_3 \varphi)_{(p,q)} = d'' i_3 \varphi + i_3 d'' \varphi$$

$$(\theta_3 \varphi)_{(p+1, q-1)} = d' i_3 \varphi + i_3 d' \varphi$$

他の成分は 0.

2.8 (M, S) を C.R. 多様体, U を $\mathbb{C}^1$ の領域とする.

$(U \times M, T^{1,0}(U) \times S)$ は C.R. 多様体となり j_z, j_x ,
(2.6), は C.R. 写像となる. また 正則接ベクトル束
 $\hat{T}(U \times M)$ は $T^{1,0}(U) \times \hat{T}(M)$ と同型になる.

$U \times M$ または M の型 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, -1)$
の外微分をそれぞれ

$$\partial, \bar{\partial}, B, \quad d', d'', \beta$$

と書く.

$$d \equiv d_M = d' + d'' + \beta$$

$$d_{U \times M} = \partial + \bar{\partial} + B$$

である. また 2.3 より

$$j_z^* \partial = d' j_z^* \quad \text{等}$$

が成立つ.

$\partial \in \Gamma(T^0(U))$, $\varphi \in \Gamma(\mathcal{E}^{p,0}(U \times M))$ に対し

$\partial(\partial)\varphi$ は $(p-1, 1)$ 成分と $(p, 0)$ 成分しか持たず,

$(p-1, 1)$ 成分の方は

$$(\partial(\partial)\varphi)(\zeta_1, \dots, \zeta_{p-1}, \eta) = -\varphi(\zeta_1, \dots, \zeta_{p-1}, d j_U([\partial, \eta]))$$

で与えられる. 但し $\zeta_1, \dots, \zeta_{p-1} \in \Gamma(\hat{T}(U \times M))$, $\eta = (w, \xi)$

$\in \Gamma(T^{0,1}(U) \times \bar{S})$ で, $v \in \Gamma(T^0(U))$ に対し

$$(d j_U(v))(\bar{z}, z) = d j_x(v(z)) \quad \text{と定義された.}$$

これより $j_z^* \partial(\partial)\varphi \in \Gamma(\mathcal{E}^{p,0}(M))$ がわかる.

(2.7.1) より, 成分を見て,

$$j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi = j_z^* (\partial \bar{i}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi + \bar{i}(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \partial \varphi)$$

$$j_z^* (\bar{\partial} i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi + i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \bar{\partial} \varphi) = 0 \quad \text{----- (1)}$$

を得る.

さて $\bar{\partial} \varphi = 0$ を仮定すれば 2.6 より

$$j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi = 0 \quad \text{加したかう. 実際}$$

$$(j_z^* \theta(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi)(x; \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_p)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\varphi((z, x); dj_z \bar{z}_1, \dots, dj_z \bar{z}_p)) = 0$$

ただし $\bar{z}_i \in T_x^c(M)$, $i=1, \dots, p$.

さらに (1) 式 に $\bar{\partial} \varphi = 0$ を代入して

$$d^* j_z^* i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi = j_z^* \bar{\partial} i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi = 0.$$

命題: φ を型 $(p, 0)$ の $U \times M$ 上の微分形式で

$\bar{\partial} \varphi = 0$. γ を点 a, b を含む U 内の

rectifiable curve とする. このとき

$$d^* \left(\int_{\gamma} j_z^* i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi dz \right) + \int_{\gamma} (j_z^* i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \partial \varphi) dz$$

$$= j_b^* \varphi - j_a^* \varphi$$

および

$$d^* \left(\int_{\gamma} j_z^* i(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \varphi dz \right) = 0$$

証明, $j_z^* \theta(\frac{z}{\partial z}) \varphi = 0$ だから (2.6.3) より

$$\int_{\gamma} j_z^* \theta(\frac{z}{\partial z}) \varphi \, dz = j_b^* \varphi - j_a^* \varphi.$$

$$\begin{aligned} \text{一方 } j_z^* \theta(\frac{z}{\partial z}) &= j_z^* (\partial i(\frac{z}{\partial z}) + i(\frac{z}{\partial z}) \partial) \\ &= d' j_z^* i(\frac{z}{\partial z}) + j_z^* i(\frac{z}{\partial z}) \partial, \end{aligned}$$

d' と積分が可換だから第一式は示された。

$d'' j_z^* i(\frac{z}{\partial z}) \varphi = 0$ を上に見たが, これより第二式かわかる。

ホアンカレ補題

2.9. M を C.R. 多様体, U を $\mathbb{C}^1$ の領域で点 $0, 1$ を含むとする。

C.R. 写像 $h: U \times M \longrightarrow M$ が次の条件を満たすとき h を M の U とつの C.R. contraction と呼ぶ。

$$(2.9.1) \quad h(1, x) = x \quad \forall x \in M$$

$$(2.9.2) \quad a \in C^0(U), \quad a(0) = 0 \quad \text{と}$$

$$\text{C.R. 写像 } h^1, h^2: U \times M \longrightarrow M \quad \text{で}$$

$$dh_{(0,x)}^1 \circ dj_0 = 0$$

を満たすものが存在して

$$dh_{(z,x)} = dh_{(z,x)}^1 + a(z) dh_{(z,x)}^2$$

と書ける。

命題. M を C.R. contraction h を持つ C.R. 多様体とする. M 上の型 $(p, 0)$ の微分形式 φ が閉形式 $d\varphi = 0$ なら, 型 $(p-1, 0)$ の微分形式 ψ で

$$\varphi = d\psi$$

$$d''\psi = 0$$

を満たすものが存在する.

証. $\Xi = h^*\varphi$ により $U \times M$ 上の型 $(p, 0)$ の微分形式を定義する. $d_{U \times M} \Xi = 0$. 2.8 の命題より

$$d' \left(\int_{\gamma} j_z^* i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \Xi \, dz \right) = j_1^* \Xi - j_0^* \Xi$$

$$d'' \left(\int_{\gamma} j_z^* i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \Xi \, dz \right) = 0,$$

ただし γ は U 内の "0.1 を走る" curve.

$$j_z^* \Xi(x, z_1, \dots, z_p) = \varphi(h(z, x); dh_{(z, x)} \cdot dj_z z_1, \dots)$$

$$= \varphi(h(z, x); (dh_{(z, x)}^1 \cdot dj_z + a(z) dh_{(z, x)}^2 \cdot dj_z) z_1, \dots)$$

となるから 仮定 より $j_0^* \Xi = 0$. また $j_1^* \Xi = \Xi$.

ゆえに

$$\psi = \int_{\gamma} j_z^* i \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) h^* \varphi \, dz$$

が答となる.

2.10. C.R. 写像 $h: U \times M \rightarrow M$ が (2.9.1) および

(2.9.2)' $h(0, x) = 0$, ただし 0 は M の fixed pt. を満たせば h は C.R. contraction となる.

また h が $G \subset M$ なる 0 の近傍のみで C.R. ならそこでホアレカレ補題が成立つので 2.9 の命題は局所的, 大域的 にともに正しい.

系 M の各点 において その近傍に C.R. contraction が存在すれば

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \underline{\Omega}_M^0 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}_M^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \underline{\Omega}_M^n \rightarrow 0$$

は exact となる. ただし $\underline{\Omega}_M^p$ は Ω_M^p の層化.

系 次の スペクトル列 が存在する

$$E_1^{p,q} = H^q(M, \underline{\Omega}_M^p) \Rightarrow H^{p+q}(M, \mathbb{C})$$

2.11 $n \geq 3$ とし M を $2n-1$ 次元の 強擬凸 な

C.R. 多様体 (s.p.c. manifold) とすれば

J. Kohn と N. Tanaka より $H^q(M, \underline{\Omega}_M^p)$

は C.R. 多様体に associate した Laplacian (hypoelliptic) の harmonic (p, q) -forms の全体 $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ と isomorphic になる.

$$H^q(M, \underline{\Omega}_M^p) \cong \mathcal{H}^{p,q}(M).$$

このとき 2.10 の系のスペクトル列は退化するので

$$\begin{aligned} H^m(M, \mathbb{C}) &\cong \bigoplus_{p+q=m} H^q(M, \underline{\Omega}_M^p) \\ &\cong \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{H}^{p,q}(M) \end{aligned}$$

なる Hodge 分解 が得られる。ここで M は local に C.R.-contraction を持つとしておかねばならなかった。

Tanaka によればさらに

$$\mathcal{H}^{p,q}(M) \cong \mathcal{H}^{n-p, n-q-1}(M)$$

がわかっている。

こうして C.R.-contraction を持つ s.p.c manifold の Hodge theory が得られた。

2.12. M が Stein manifold V の境界 となっていてるとき, Tanaka-Kohn より

$$E_1^{p,q} = H^q(M, \underline{\Omega}_M^p) = 0 \quad q \neq 0, n-1$$

したがって 2.10 の系より, de Rham cohomology による

$$\mathcal{H}^i(\Gamma(M, \underline{\Omega}_M^*)) \cong H^i(M, \mathbb{C}), \quad 1 \leq i \leq n-2$$

がわかる。

§3, 複素多様体 に埋められた 強擬凸超曲面のコホモロジーの役割.

3.1, X を複素多様体, $T_X^{1,0}$ を正則接ベクトル束とする.
 M を実余次元 1 の部分多様体, N をこの埋めこみの
normal bundle とする.

$$S = T_M^c \cap T_X^{1,0}$$

とすると, (M, S) は C.R. 多様体となる. inclusion

$$i: (M, S) \longrightarrow (X, T_X^{1,0})$$

は C.R. 写像となり,

$$i_b: \hat{T}_M \longrightarrow i^* T_X^{1,0} \cong M \times_X T_X^{1,0}$$

は injection となる (2.2) が M の余次元が 1 だから

$$\hat{T}_M \cong i^* T_X^{1,0}.$$

可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \rightarrow & \bar{S} & \rightarrow & T_M^c & \rightarrow & \hat{T}_M \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel S & (exacts) \\ 0 & \rightarrow & i^* T_X^{0,1} & \rightarrow & i^* T_M^c & \rightarrow & i^* T_X^{1,0} \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & N^c & (exact) & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

より exact 列

$$0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow i^* T_X^{0,1} \xrightarrow{\nu} N^c \rightarrow 0$$

が得られる。(N^C は正則ベクトルバンドルになることがわかる)

$$\mathcal{E}_X^{p,q} = \Lambda^p(T_X^{1,0})^* \otimes \Lambda^q(T_X^{0,1})^*$$

$$\text{は } M \text{ 上で } \cong \Lambda^p(\hat{T}_M)^* \otimes \Lambda^q(T_X^{0,1})^*$$

$$\mathcal{E}_M^{p,q} = \Lambda^p(\hat{T}_M)^* \otimes \Lambda^q(\bar{S})^*,$$

$$\mathcal{J}_M^{p,q} = \Lambda^p(\hat{T}_M)^* \otimes \Lambda^{q-1}(\bar{S})^* \otimes (N^C)^*$$

とおく。このとき M 上で

$$0 \rightarrow \mathcal{J}_M^{p,q} \rightarrow \mathcal{E}_X^{p,q} \rightarrow \mathcal{E}_M^{p,q} \rightarrow 0$$

は exact となる。したがって

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Omega_X^p & \rightarrow & \Omega_M^p & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{E}_X^{p,0} & \cong & \mathcal{E}_M^{p,0} & & \\ & & \downarrow \bar{\omega} & & \downarrow \bar{\omega}_M & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{J}_M^{p,1} & \rightarrow & \mathcal{E}_X^{p,1} & \rightarrow & \mathcal{E}_M^{p,1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\omega} & & \downarrow \bar{\omega} & & \downarrow \bar{\omega}_M \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{J}_M^{p,2} & \rightarrow & \mathcal{E}_X^{p,2} & \rightarrow & \mathcal{E}_M^{p,2} \rightarrow 0 \end{array}$$

矢はすべて
exact

$\bar{\omega}, \bar{\omega}_M = d_M''$

の意味はふつう

のとおり。

なる可換図式を得るので

$$\Phi_{M/X}^p = \ker \bar{\omega} : \mathcal{J}_M^{p,1} \rightarrow \mathcal{J}_M^{p,2}$$

と置くと M 上で

$$0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \Omega_M^p \rightarrow \Phi_{M/X}^p \rightarrow 0$$

なる exact 列を得る。

3.2. M 上の complex の exact 列

$$0 \rightarrow \Omega_X^\bullet \rightarrow \Omega_M^\bullet \rightarrow \Phi_{M/X}^\bullet \rightarrow 0$$

を考えよう.

M が局所的に C.R. contraction を持つなら §2 のホプ
ツカレ補題 より quasi isomorphism

$$\Omega_X^\bullet \cong_{Q\omega} \mathbb{C} := \{ 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \} のこと.$$

$$\Omega_M^\bullet \cong_{Q\omega} \mathbb{C}$$

を得る.

$$\text{したがって } \Phi_{M/X}^\bullet \cong_{Q\omega} 0.$$

3.3 以下 M は 強疑凸な 余次元1の^閉超曲面で
C.R. 多様体と見るとき 局所的に C.R. contraction を持
つとする. M の開な領域を D とする. D は強疑凸領域.

Bochner extension U open $\subset X$, $\omega = U \cap M$

$\varphi \in \Gamma(\omega, \Omega_M^p)$ とするとき φ は $U \cap D$ に

holomorphic に extend される又 拡張は一意的 :

$$\exists_1 \tilde{\varphi} \in \Gamma(U \cap D, \Omega_X^p), \quad \tilde{\varphi} \in C^\infty(U \cap \bar{D})$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} \text{ on } \omega.$$

この extension theorem より 写像

$$\Omega_M^\bullet \xrightarrow{p'} (j_-)_*(\Omega_X^\bullet|D)$$

が定義される. f' と 1.4 の isomorphism $(j_-)_*(\Omega_X|D) \cong H_t^1(\Omega_X)$ と合成して

$$f' : \Omega_M \longrightarrow H_t^1(\Omega_X)$$

なる complex の monomorphism を得る.

以上より M 上の complex の exact 列の対応

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_X & \longrightarrow & \Omega_M & \longrightarrow & \Phi_{M/X} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f' & & \downarrow \sigma \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_X & \longrightarrow & (j_-)_*(\Omega_X|D) & \xrightarrow{\varepsilon} & H_{ex}^1(\Omega_X) \longrightarrow 0 \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & H_t^1(\Omega_X) & & \end{array}$$

を得る. 本行は (1.2.2) に他ならぬ.

1.6, 1.7 と 2.9 より 縦列 は Quasi isomorph となる.

すなわちることとして 例えは

$$H^*(M, H_t^1(\Omega_X)) \cong H^*(M, \Omega_M) \cong H^*(M, \mathbb{C}) \cong_{(1, f)} H_M^*(X, \mathbb{C}).$$

3.4.

$$\Omega_X^*(M) = \{ u \in (j_-)_*(\Omega_X|D) \mid u \in \text{Image } \sigma \}$$

と置く.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow \Omega_X^\bullet & \rightarrow & \Omega_X^\bullet(M) & \rightarrow & \Phi_{M/X}^\bullet & \rightarrow & 0 \quad \text{exact on } \bar{D} \\
\parallel & & \downarrow \text{GIS} & & \downarrow \text{GIS} & & \\
0 \rightarrow \Omega_X^\bullet & \rightarrow & (j_-)_*(\Omega_X^\bullet|D) & \rightarrow & H_{\text{ex}}^1(\Omega_X^\bullet) & \rightarrow & 0
\end{array}$$

となる。

したがって

$$\begin{aligned}
H^*(D, \mathbb{C}) &\cong H^*(\bar{D}, (j_-)_*(\Omega_X^\bullet|D)) \\
&\cong H^*(\bar{D}, \Omega_X^\bullet(M))
\end{aligned}$$

を得る。これは de Rham cohomology による $H^*(D, \mathbb{C})$ の表現で Atiyah - Hodge - Grothendieck の類似と考えられる。

3.5 3.4 をもう少し見よう。ここはまだできていないが おそらく正しい。

$\Phi_{M/X}^\bullet$ は その定義より $\Omega^\bullet(N^c)$ すなわち normal bundle (それは M 上正則線バンドルになる) N^c に値をとる 正則形式 である。 D が強擬凸 ならば

N^c は negative になる。それは $M = \partial D$ の定義函数の局所表示 $\bigcup_j M = \{f_j = 0\}$ $D \cap U_j = \{f_j < 0\}$ において, $g_{ij} = f_i/f_j$ が N を定義するので N 上の metric として $h_i \equiv f_i$ をとれば

$\bar{g}_{ij} = |g_{ij}|/g$ 。この curvature は Levi form に
 他ならない, ことから推測される。 N^c が negative
 なら $H^q(M, \Omega^p(N^c)) = 0$ となることがわかる
 (Tanaka)。

次に D を Stein と仮定すれば Kohn - Tanaka
 より $H^q(\bar{D}, \Omega_X^p) = 0 \quad q \neq 0$ 。

したがって exact 列

$$\rightarrow H^q(\bar{D}, \Omega_X^p) \rightarrow H^q(\bar{D}, \Omega_X^p(M)) \rightarrow H^q(M, \Omega^p(N^c)) \rightarrow$$

$$\text{より} \quad H^q(\bar{D}, \Omega_X^p(M)) = 0, \quad q \neq 0.$$

これと 3.4 より

$$H^i(D, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^i(\Gamma(\bar{D}, \Omega_X^i(M)))$$

なる, Atiyah - Hodge 型の de Rham cohomology による表現が
 可能となった。

(注) D Stein のとき $H^i(D, \mathbb{C}) = 0 \quad i > n$,

$$H^i(D, \mathbb{C}) \cong \mathcal{H}^i(\Gamma(D, \Omega_X^i)) \quad \forall i$$

は良く知られている。

文献.

De Rham cohomology に関するものは略.

N. Tanaka. Lectures in Mathematics, Vol. 9, Dept. Math.
Kyoto Univ. published by Kinokuniya

T. Kori. Exposé fait dans le Séminaire de G. A. G. AN.
GRA. GRO. 1977/78; Lemme de Poincaré
sur les variétés cauchy-riemanniennes. p. 1 - p. 20