

2つの水面重力波の間の非線形相互作用がもたらす 位相速度効果について

岐阜大工 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)

Faculty of Engineering, Gifu University

エコール ポリテクニーク Catherine PHAN VAN

エコール ポリテクニーク Olivier OLDRINI

The Ecole Polytechnique, France

1 二つの波列の相互作用

水面に生じる波動現象において復元力として働く主な力としては重力と表面張力があるが、このうち実質的に重力のみが有効に働く場合、その水面波動は水面重力波と呼ばれる。重力と表面張力の相対的な重要性は、対象とする波の波長により異なる。水と空気の界面の場合、両者が同程度の寄与を及ぼすのは波長 2cm 程度の波であり、これより波長が長くなるにつれて表面張力の寄与は急激に減少する。海洋波浪場はさまざまな波長および伝播方向を有する重力波の重ねあわせとして表現することができるが、エネルギースペクトルの主要部分を構成するのは波長数 10m から数 100m の水面波であり、これらに対しては表面張力は完全に無視することができ、したがって重力波として取り扱うことができる。

このように複数の水面重力波が共存する場においては、波列間の非線形相互作用によってそれぞれの波の伝播速度が修正を受け、線形分散関係から予想される伝播速度とのずれを生じる。ここでは、海洋波のような広帯域スペクトルを有する水面重力波の場における非線形効果まで含めた分散関係に関する研究の予備段階として、二つの非線形重力波が共存する場合の伝播速度の変化について考察する。従来より提案されている主要な理論的枠組みのうち、この目的に対して利用可能なものとしては

1. Longuet-Higgins and Phillips (1962) の理論.
2. 非簡略 Zakharov 方程式に基づくもの
3. Zakharov 方程式に基づくもの

の3つが考えられる。本稿では、まずこれら3つの理論が与える「位相速度効果」の同等性を検証し、その後高次スペクトル法に基づく直接数値シミュレーション結果とも比較検討する。

1.1 Longuet-Higgins & Phillips の理論

Longuet-Higgins & Phillips (1962) は非線形水面波動の基礎方程式に基づくオーソドックスな摂動計算によって、波数ベクトル $\mathbf{k}_1$, 振動数 $\omega_1 (= \sqrt{gk_1})$, 振幅 a_1 の波列1による、波数ベクトル $\mathbf{k}_2$, 振動数 $\omega_2 (= \sqrt{gk_1})$, 振幅 a_2 の波列2の位相速度の変化 ΔC_2 に対して

$$\Delta C_2 = \left(\frac{\omega_1}{2\omega_2} \right) K \times a_1^2 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} K = & (\omega_1 - \omega_2) |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \cos^2 \frac{1}{2} \theta \left\{ 1 + \frac{4\omega_1\omega_2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}{(\omega_1 - \omega_2)^2 - g|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|} \right\} \\ & + (\omega_1 + \omega_2) |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2| \sin^2 \frac{1}{2} \theta \left\{ 1 - \frac{4\omega_1\omega_2 \sin^2 \frac{1}{2} \beta}{(\omega_1 + \omega_2)^2 - g|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \right\} \\ & + \omega_1(k_1 - k_2 + k_2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta \sin^2 \frac{1}{2} \theta) + \omega_2(k_1 + k_2) \cos \theta \end{aligned} \quad (2)$$

なる表現を与えた。ここでは、異なる波列間の非線形相互作用による伝播速度の変化に興味があるので、自己相互作用による波列2の位相速度の変化分(いわゆる Stokes 補正)は考慮していない。また後に指摘するように、(2)の K の表現には一個所重大な間違いがある。ここで θ, α, β はそれぞれ図1のように定義された角度を表す。

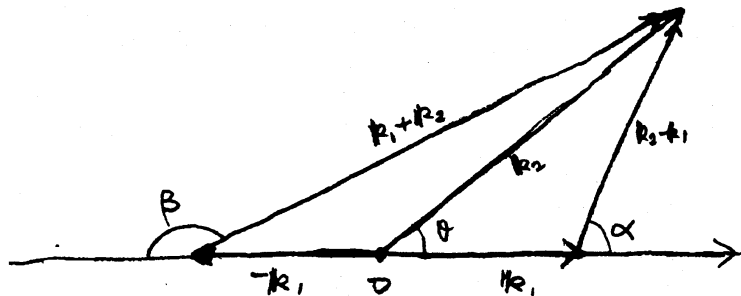


図 1: 角度 α, β, θ の定義

1.2 「非簡略 Zakharov 方程式」に基づく理論

Zakharov (1968) は水面波動を記述する基礎方程式系（場の方程式＋境界条件）をハミルトン系として定式化した。その過程で便利な正準変数として $\eta(\mathbf{x}, t)$ と $\psi(\mathbf{x}, t)$ の（離散）フーリエ変換 $\hat{\eta}_k(t)$, $\hat{\psi}_k(t)$ から

$$b_k(t) = \sqrt{\frac{\omega_k}{2k}} \hat{\eta}_k(t) + i \sqrt{\frac{k}{2\omega_k}} \hat{\psi}_k(t), \quad \omega_k = \sqrt{gk}, \quad k = |\mathbf{k}| \quad (3)$$

と定義される「複素振幅関数」 $b_k(t)$ を導入した。このように定義された $b_k(t)$ の時間発展は、以下の非簡略 Zakharov 方程式により記述される。

$$\begin{aligned} \dot{b}_k(t) + i\omega_k b_k(t) + i \sum_{k_1} \sum_{k_2} V_{k, k_1, k_2}^{(1)} b_{k_1} b_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} \\ + i \sum_{k_1} \sum_{k_2} V_{k, k_1, k_2}^{(2)} b_{k_1}^* b_{k_2} \delta_{k+k_1-k_2} + i \sum_{k_1} \sum_{k_2} V_{k, k_1, k_2}^{(3)} b_{k_1}^* b_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} \\ + i \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} W_{k, k_1, k_2, k_3}^{(1)} b_{k_1} b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k-k_1-k_2-k_3} \\ + i \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} W_{k, k_1, k_2, k_3}^{(2)} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} \\ + i \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} W_{k, k_1, k_2, k_3}^{(3)} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3} \delta_{k+k_1+k_2-k_3} \\ + i \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} W_{k, k_1, k_2, k_3}^{(4)} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3}^* \delta_{k+k_1+k_2+k_3} = (b^4) \approx 0. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで δ はその添字が 0 ベクトルなら 1, それ以外の場合は 0 となる「離散的なデルタ関数」を表す。また $V_{k, k_1, k_2}^{(n)}$, $W_{k, k_1, k_2, k_3}^{(n)}$ などに対する具体的な表式については Zakharov(1968), Krasitskii(1994), Lake & Yuen (1982) などを参照されたい。

今 $\mathbf{k}_1$ に振幅 $O(a)$ の波列 1 が, $\mathbf{k}_2$ に振幅 $O(\epsilon)$ の波列 2 があるとする。波列 2 の自己相互作用による部分は無視するために ϵ は無限小と考え, その非線形項は無視する。二つの波列の相互作用の結果生じる $O(a\epsilon)$ のモードとしては,

$$\begin{aligned} \dot{b}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} + i\omega_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} + i \left\{ V_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)} + V_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(1)} \right\} b_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2} &= 0, \\ \dot{b}_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} + i\omega_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} b_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} + i V_{-\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} b_{\mathbf{k}_1}^* b_{\mathbf{k}_2} &= 0, \\ \dot{b}_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1} + i\omega_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1} b_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1} + i V_{-\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(2)} b_{\mathbf{k}_2}^* b_{\mathbf{k}_1} &= 0, \\ \dot{b}_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} + i\omega_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} b_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2} + i \left\{ V_{-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(3)} + V_{-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3)} \right\} b_{\mathbf{k}_1}^* b_{\mathbf{k}_2}^* &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

の4種類があり, またこれらから $\mathbf{k}_2$ への跳ね返りの相互作用は,

$$\begin{aligned}
 \dot{b}_{\mathbf{k}_2} + i\omega_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_2} + i \left\{ V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^{(1)} + V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1}^{(1)} \right\} b_{\mathbf{k}_1} b_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1} \\
 + i \left\{ V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(2)} b_{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* b_{\mathbf{k}_1} + V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}^{(2)} b_{\mathbf{k}_1}^* b_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \right\} \\
 + i \left\{ V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^{(3)} + V_{\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(3)} \right\} b_{\mathbf{k}_1}^* b_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^* \\
 + i \left\{ W_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} + W_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(2)} \right\} |b_{\mathbf{k}_1}|^2 b_{\mathbf{k}_2} = 0. \quad (6)
 \end{aligned}$$

$\mathbf{k}_2$ への跳ね返りの最低次 $O(\epsilon a^2)$ の効果を考える際には, (5) の $b_{\mathbf{k}_2}$ は単色な線形波列解 $b_{\mathbf{k}_2}(t) = b_{\mathbf{k}_2}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}_2}t}$ と考えればいい. また $t=0$ では $b_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}$ など束縛波成分はすべて0であるとする, (6)は

$$\begin{aligned}
 \dot{b}_{\mathbf{k}_2} + i\omega_{\mathbf{k}_2} b_{\mathbf{k}_2} \\
 + i \left\{ V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}^{(1)} + V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1}^{(1)} \right\} \frac{-V_{-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)}}{\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{-\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1}} |b_{\mathbf{k}_1}|^2 b_{\mathbf{k}_2} \left[1 - e^{-i(\omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{-\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1})t} \right] \\
 + i V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(2)} \cdot \frac{-V_{-\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(2)}}{\omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{-\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1}} |b_{\mathbf{k}_1}|^2 b_{\mathbf{k}_2} \left[1 - e^{i(-\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{-\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1})t} \right] \\
 + i V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}^{(2)} \cdot \frac{V_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(1)} + V_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(1)}}{\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}} |b_{\mathbf{k}_1}|^2 b_{\mathbf{k}_2} \left[1 - e^{i(\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2})t} \right] \\
 + i \left\{ V_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^{(3)} + V_{\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(3)} \right\} \frac{V_{-\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(3)} + V_{-\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(3)}}{\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}} |b_{\mathbf{k}_1}|^2 b_{\mathbf{k}_2} \\
 \left[1 - e^{i(\omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{-\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2})t} \right] + i \left\{ W_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{(2)} + W_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1}^{(2)} \right\} |b_{\mathbf{k}_1}|^2 b_{\mathbf{k}_2} = 0 \quad (7)
 \end{aligned}$$

のように変形される.

複素数 $b_{\mathbf{k}_2}$ の位相部分の変化率, すなわち

$$\Omega_{\mathbf{k}_2} \equiv -\text{Im} \left[\frac{\dot{b}_{\mathbf{k}_2}(t)}{b_{\mathbf{k}_2}(t)} \right] = \omega_{\mathbf{k}_2} + \Delta\Omega_{\mathbf{k}_2} \quad (8)$$

によって $\mathbf{k}_2$ モードの実質的な振動数 $\Omega_{\mathbf{k}_2}$, およびその線形振動数からのずれ $\Delta\Omega_{\mathbf{k}_2}$ を評

価することになると, (7) より $\Delta\Omega_{k_2}$ の時間平均 $\overline{\Delta\Omega_{k_2}}$ は

$$\begin{aligned}\overline{\Delta\Omega_{k_2}} = & -\frac{\left\{V_{k_2, k_1, k_2-k_1}^{(1)} + V_{k_2, k_2-k_1, k_1}^{(1)}\right\} V_{-k_1+k_2, k_1, k_2}^{(2)}}{\omega_{k_1} - \omega_{k_2} + \omega_{-k_2+k_1}} |b_{k_1}|^2 \\ & - \frac{V_{k_2, k_1-k_2, k_1}^{(2)} \cdot V_{-k_2+k_1, k_2, k_1}^{(2)}}{\omega_{k_2} - \omega_{k_1} + \omega_{-k_2+k_1}} |b_{k_1}|^2 \\ & + \frac{V_{k_2, k_1, k_1+k_1}^{(2)} \left\{V_{k_1+k_2, k_1, k_2}^{(1)} + V_{k_1+k_2, k_2, k_1}^{(1)}\right\}}{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_1+k_2}} |b_{k_1}|^2 \\ & - \frac{\left\{V_{k_2, k_1, -k_1-k_2}^{(3)} + V_{k_2, -k_1-k_2, k_1}^{(3)}\right\} \left\{V_{-k_2-k_1, k_2, k_1}^{(3)} + V_{-k_2-k_1, k_1, k_2}^{(3)}\right\}}{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{-k_1-k_2}} |b_{k_1}|^2 \\ & + \left\{W_{k_2, k_1, k_1, k_2}^{(2)} + W_{k_2, k_1, k_2, k_1}^{(2)}\right\} |b_{k_1}|^2.\end{aligned}\quad (9)$$

波列 2 の位相速度の線形速度からの変化分の時間平均値 ΔC_2^b はこの $\overline{\Delta\Omega_{k_2}}$ より

$$\Delta C_2^b = \overline{\Delta\Omega_{k_2}} / |k_2| \quad (10)$$

で与えられる. また波列 2 の実質的な位相速度は $C_L + \Delta C_2^b$

このようにして非簡略 Zakharov 方程式から導出された ΔC_2^b と, (1) で与えられる Longuet-Higgins & Phillips (1962) による ΔC_2 は同一の量に対する異なる表現であり, 両者は完全に一致すべきものであるが, その事実は今までにきちんと確認されていないように思われる.

1.3 Zakharov 方程式に基づく理論

前節の $\Delta\Omega_{k_2}$ を導出する手続きは, 非簡略 Zakharov 方程式から, 通常の Zakharov equation を導出する過程に酷似している. 非簡略 Zakharov 方程式から通常の Zakharov 方程式を導出する際には, まず

$$b_k(t) = [B_k(t) + B'_k(t)] e^{-i\omega_k t} \quad (11)$$

により $B_k(t)$, $B'_k(t)$ を導入する. ここで b_k のオーダーを ϵ とすると, $B_k(t)$ は大きさは $O(\epsilon)$ で, 時間に対しては $\epsilon^2 t$ 程度の遅い時間にしか依存しない自由波の部分, 一方 $B'_k(t)$ は大きさは $O(\epsilon^2)$ で, 時間に対しては速い時間 t そのものに依存する拘束波の部分を表現している.

(11) の表現を (4) に代入し、微分展開法などの摂動法を用いることにより、自由波の複素振幅 B_k に対する発展方程式として **Zakharov 方程式**

$$\dot{B}_k(t) = -i \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} T_{k,k_1,k_2,k_3} B_{k_1}^* B_{k_2} B_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} e^{i(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t} \quad (12)$$

が得られる。 T_{k,k_1,k_2,k_3} の具体的な表式については Zakharov(1968), Krasitskii(1994), Lake & Yuen (1982) などを参照されたい。2つの波列 k_1, k_2 のみが存在する場合には (12) は

$$\dot{B}_{k_2}(t) = -i \{T_{k_2,k_1,k_1,k_2} + T_{k_2,k_1,k_2,k_1}\} |B_{k_1}|^2 B_{k_2} \quad (13)$$

となり、これより波列2の位相速度の変化分 ΔC_2 に対するもう一つの表現として、

$$\Delta C_{k_2}^B = \frac{1}{k_2} \{T_{k_2,k_1,k_1,k_2} + T_{k_2,k_1,k_2,k_1}\} |B_{k_1}|^2 \quad (14)$$

が得られるが、はたしてこれは (1) および (10) と一致するのであろうか？

1.4 理論間の比較

以上で、波列2の位相速度の変化分 ΔC_2 に対して、(1) で与えられる Longuet-Higgins & Phillips (1962) による ΔC_2^{LHP} , (10) で与えられる非簡略化 Zakharov 方程式の解析から得られた ΔC_2^b , および (14) で与えられる Zakharov 方程式の解析から得られた ΔC_2^B , 計3つの表現が得られたが、はたしてこれらの表現は互いに同じなのであろうか？それぞれの表現を解析的に変形して、その同一性を確認することもできようが、ここではより簡便な方法として、波列1を一般性を失うことなく $k_1 = (1, 0)$, $a_1 = 1$ と固定し、さまざまな k_2 に対する ΔC_2 を数値的に求め、それらを比較することで3つの表現の同一性を確認することにした。その結果、例えば $k_2 = (2, 2)$ に対しては

$$\Delta C_2^{LHP} = 0.631961113, \quad \Delta C_2^b = 0.737073165, \quad \Delta C_2^B = 0.737073165 \quad (15)$$

というように、どのような k_2 に対しても ΔC_2^b と ΔC_2^B はまったく同一の値を与えるのに対し、 ΔC_2^{LHP} だけ値が異なることが判明した。

この結果を踏まえて、我々は再度 Longuet-Higgins & Phillips (1962) による ΔC_2^{LHP} の導出過程を注意深く調べたところ、(2) の第3番目のファクター $\omega_1(k_1 - k_2 + k_2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta \sin^2 \frac{1}{2}\theta)$ が正しくは $\omega_1(k_1 - k_2 + 2k_2 \cos^2 \frac{1}{2}\theta \sin^2 \frac{1}{2}\theta)$ でなければならないことを発見した。単なる

印刷の段階でのミスプリントなのかもしれないが、 K に対する複雑な表式 (2) が初めて導出された Longuet-Higgins (1962) の対応する個所にも同じミスがあることを考えると、導出の過程ですでに間違いがあった可能性も否定できない。 ΔC_2^{LHP} にあるこの間違いを訂正すると、任意の k_2 に対して ΔC_2 に対する 3 つの表現がすべて完全に同一の値を与えるようになる。

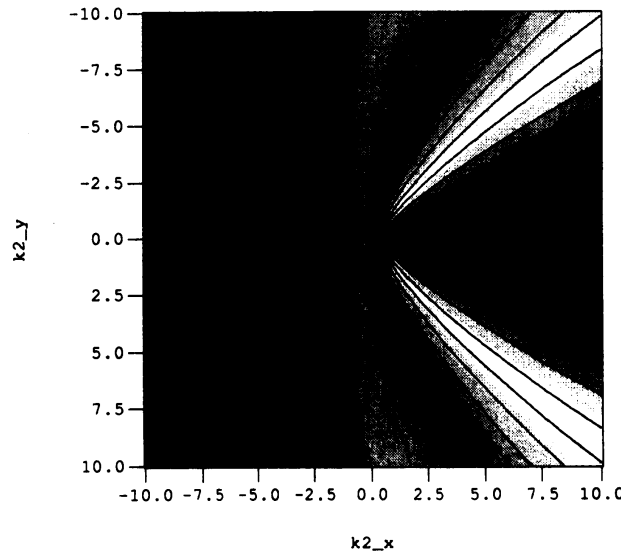


図 2: 修正前の ΔC_2^{LHP} の分布図 ($a_1 = 1, \mathbf{k}_1 = (1, 0)$).

図 2 および 3 は、それぞれ修正前および修正後の ΔC_2^{LHP} の値を $\mathbf{k}_2$ -平面上に示したものである。上述のように、波列 1 についてはやはり $\mathbf{k}_1 = (1, 0)$, $a_1 = 1$ としている。直感的に考えて、 $k_2 \gg k_1$ の領域では、波列 1 の波長は波列 2 の波長に比べて非常に長いために、波列 2 の位相速度に対する波列 1 の影響は、流速ベクトル $(a_1^2, 0)$ の流れが及ぼす影響と同等になるであろう。もしこれが正しければ $\Delta C_2 \approx a_1^2 \cos \theta$ ($k_2 \gg k_1$) となって、 k_2 が十分大きいところでは、 $\mathbf{k}_1$ と直角方向に伝播する波列 2 の位相速度は線形位相速度からずれることはないであろう。図 2 および 3 をよく見ると、ミスを修正する以前は、たとえば $\mathbf{k}_1$ と直角方向に伝播する場合にも有意な修正を受けることになってしまう。

この $k_2 \gg k_1$ の領域での振舞いをもう少し詳細に見るために $\delta = \sqrt{k_1/k_2}$ とおいて $\delta \rightarrow 0$ の漸近的振舞いを調べると、 ΔC_2^{LHP} を構成する 4 つの因子のうち、第 3 番目の因子は $O(1/\delta)$ で、また残る 3 つの因子は $O(1/\delta^2)$ でそれぞれ発散するが、発散部分が互い

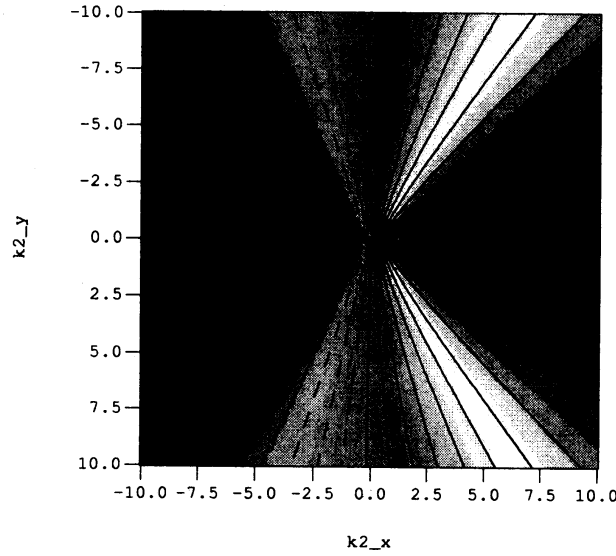


図 3: 修正後の ΔC_2^{LHP} の分布図 ($a_1 = 1, \mathbf{k}_1 = (1, 0)$).

にうまくキャンセルしあい、その結果、

$$\Delta C_2^{LHP} = g^{1/2} k_1^{3/2} a_1^2 \cos \theta + O(\delta) \quad (16)$$

となり上の直感的予想を確認することができる。これに対して Longuet-Higgins & Phillips (1962) が与えたままの ΔC_2^{LHP} の形では発散部分の相殺は起こらず、漸近的振舞いは

$$\Delta C_2^{LHP} = \frac{1}{8} g^{1/2} k_1 k_2^{1/2} a_1^2 (\cos^2 \theta - 1) + O(1), \quad k_2 \rightarrow \infty \quad (17)$$

のように k_2 -依存性が残ってしまう。図 4 は、 $\mathbf{k}_1 = (1, 0)$, $a_1 = 1$, $\theta = \pi/4$ の時に、修正前および修正後の表式を用いて ΔC_2^{LHP} を k_2 の関数として求めたものであるが、修正によって漸近的振舞いが大きく変わっていることがよく分かる。

1.5 高次スペクトル法

非定常な水面変動を数値的に追跡するシミュレーション手法に高次スペクトル法 (high-order spectral method) (以下では HOSM と記す) がある。 (West et al. 1987). この手法は、各時刻 t において速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ に対する Laplace 方程式の Dirichlet 問題を FFT を活用して高速・高精度に解いて自由表面における速度ベクトルを求め、その結果を自由表面における力学的および運動学的境界条件の中で用いることにより、次の時間ス

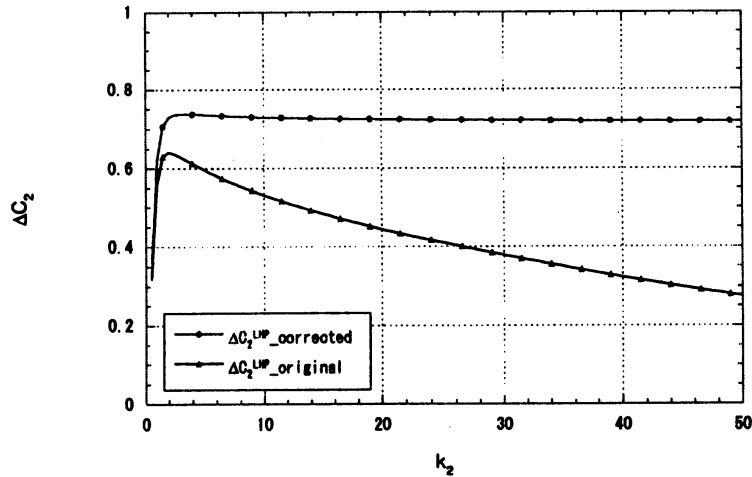


図 4: 修正前と修正後の ΔC_2^{LHP} の比較: $\mathbf{k}_1 = (1, 0)$, $a_1 = 1$, $\theta = \pi/4$.

テップにおける水面変位 $\eta(\mathbf{x}, t)$ および表面における速度ポテンシャル $\psi(\mathbf{x}, t)$ を求めるものである: HOSM はもともとはこのように $\eta(\mathbf{x}, t)$ および $\psi(\mathbf{x}, t)$ を追跡するものであるが, その情報は (3) により $b_{\mathbf{k}}(t)$ に翻訳することができる. Tanaka (2001) は, とともに 4 波相互作用までを考慮した場合, West et al. (1987) の HOSM と, 非簡略 Zakharov 方程式 (4) が完全に同等であることを数値的に確認している. 図 5 は, この HOSM を用いた直接数値シミュレーションから得られた $C_2^{HOSM}(t)$ を t の関数としてプロットしたものである. ここで $C_2^{HOSM}(t)$ は $C_2^b(t)$ と同様, 数値シミュレーションの各ステップで求められた $\dot{b}_{\mathbf{k}_2}(t)$ から

$$C_{\mathbf{k}_2}^{HOSM} = -\frac{1}{k_2} \text{Im} \left[\frac{\dot{b}_{\mathbf{k}_2}(t)}{b_{\mathbf{k}_2}(t)} \right] \quad (18)$$

により定義されている. 対象とした計算の初期条件は, $\mathbf{k}_1 = (1, 0)$, $a_1 = 0.1$ の 3 次 Stokes 波と, $\mathbf{k}_2 = (5/3, 5/3)$, $a_2 = 0.001$ の単色波列の重ねあわせとして構成されている. 図に示した時間間隔は, 波 1 の周期 $T_1 (= 2\pi)$ から見て 10 周期分である. 図には比較のため, 線形分散関係から決まる位相速度 C_L , および上で指摘した間違いを修正した後の Longuet-Higgins and Phillips (1962) 理論が予測する ΔC_2^{LHP} により $C_L + \Delta C_2^{HOSM}$ で定義される速度も合せてプロットした. $0 \leq t \leq 10T_1$ の範囲での $C_2^{HOSM}(t)$ の平均値は 0.65887, 一方ミスを修正した後の理論値 $C_L + \Delta C_2^{LHP}$ は 0.65870 と両者ほぼ一致して

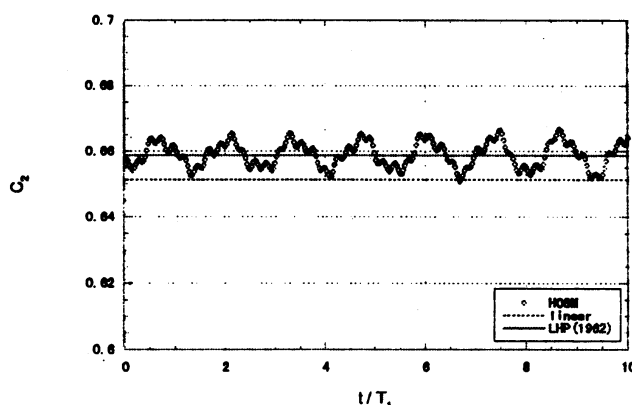


図 5: 高次スペクトル法により得られた $C_2 : \mathbf{k}_1 = (1, 0)$, $a_1 = 0.1$, $\mathbf{k}_2 = (5/3, 5/3)$, $a_2 = 0.001$.

参考文献

- [1] Krasitskii, V.P.: On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface waves. J. Fluid Mech., **272** (1994), 1–20.
- [2] Longuet-Higgins, M.S.: Resonant interactions between two trains of gravity waves. J. Fluid Mech., **12** (1962), 321–332.
- [3] Longuet-Higgins, M.S. and Phillips, O.M.: Phase velocity effects in tertiary wave interactions J. Fluid Mech., **12** (1962), 333–336.
- [4] Tanaka, M.: A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation. Fluid Dyn. Res. **28** (2001), 41–60.
- [5] West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R.S., Milder, M. and Milton, R.L.: A new numerical method for surface hydrodynamics. J. Geophys. Res., **92** (1987), 11,803–11,824.
- [6] Yuen, H.C. & Lake, B.M.: Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves. Adv. Appl. Mech. **22** (1982), 67–229.
- [7] Zakharov, V.E.: Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. J. Appl. Mech. Tech. Phys. (Engl. Transl.), **2** (1968), 190–194.