

内部問題・外部問題に共通に適用される

解法とその結果

日本情報サービス 宗像健一

(Munakata Ken-iti)

1. はじめに

物体の外部または内部の流れを解析するときに、物体表面の境界条件が厳密に満足されているか、あるいは近似的にのみ満たされているかということが、結果にどのように影響するかということは興味ある問題である。特に物体近傍のフローパターンとか、流れの安定性の問題においては影響するところが大きいものと思われる。

円柱の背後にできる渦の成長と崩壊の過程を調べる問題と、円管内の Poiseuille 流の安定問題についてはすでに報告したことがあるが、それらを扱った解法に共通性があることと、現象としても関連性があるので、これらの問題についてまとめて議論したい。

2. 解法の特徴

非圧縮性粘性流体の流れの場を直交曲線座標 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) で表わすとき、速度成分を (u_1, u_2, u_3) とすると連続方程式は次式で与えられる

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}(h_2 h_3 u_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(h_3 h_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}(h_1 h_2 u_3) = 0. \quad (1)$$

いま、境界は静止固体 S であるとして、 ξ_2 と ξ_3 を S 上にとり、 ξ_1 を S に垂直にとると、境界条件は

$$\xi_1 = 0 : \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0, \quad (2)$$

であるが、(1)によって

$$\xi_1 = 0 : \quad \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = 0, \quad (3)$$

も同時に成立していることが分る。

二次元物体のばあい、領域を等角写像によって単位円の内部に写すとき、この性質は保存されることを考えて、われわれの方法では以下に示す方針に従って問題を取り扱う。

(i) 流れの領域を単位円の内部に写像する。

(ii) 速度場を表わす関数を有限個の座標関数の集合によって近似する。

(iii) 座標関数は境界条件と連続方程式とを満足する。

(iv) Navier-Stokes 方程式 (の変換されたもの) を Fourier 展開式に近似的に満足する。

(v) 座標関数としては周辺を固定された円板の振動モードを表現する次の直交完全関数系を使用する。

$$W_{nv} = \Phi_n(k_{nv} r) \exp(i n \theta), \quad (4)$$

ここに、

$$\Phi_n(k_{n\nu} r) = \frac{\epsilon_n}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{J_n(k_{n\nu})} \{ J_n(k_{n\nu} r) + \lambda_{n\nu} I_n(k_{n\nu} r) \}, \quad (5)$$

として、 $k_{n\nu}$ と $\lambda_{n\nu}$ は次式で決まる定数である。

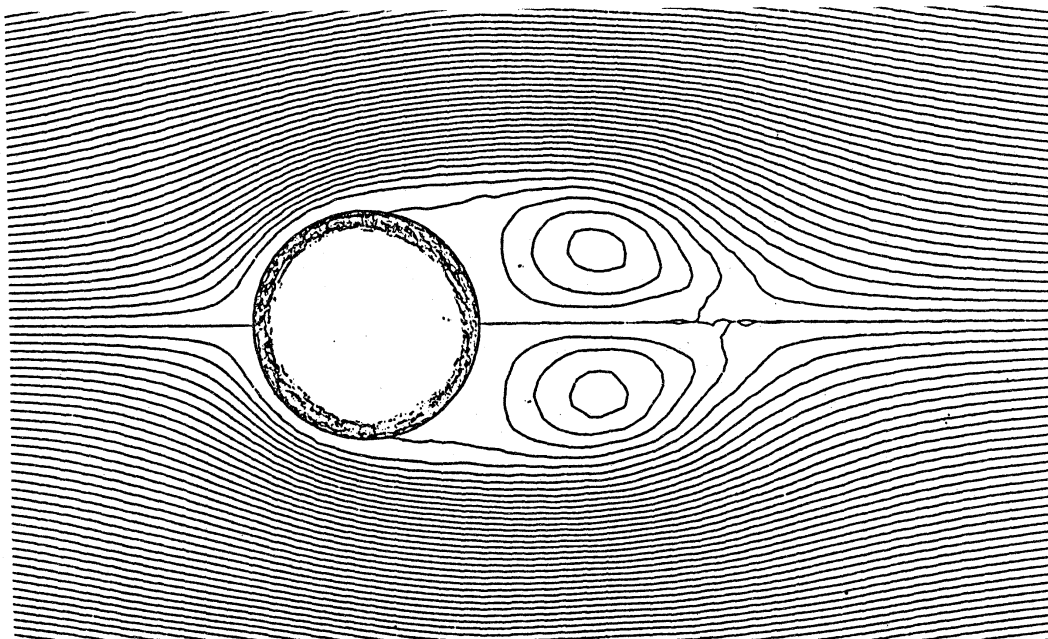
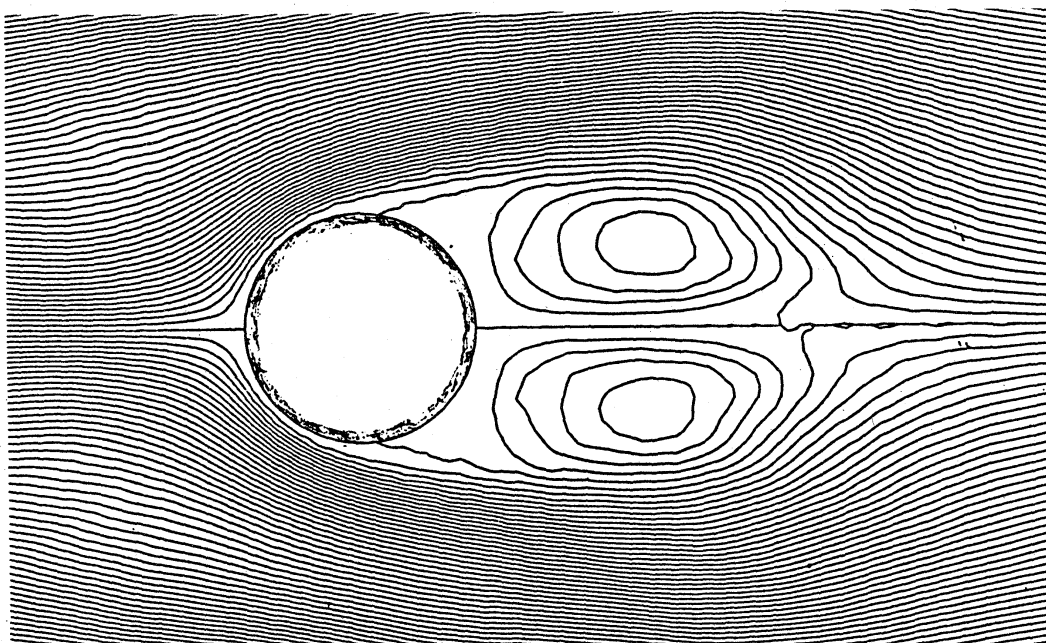
$$\frac{J_n(k_{n\nu})}{I_n(k_{n\nu})} = \frac{J'_n(k_{n\nu})}{I'_n(k_{n\nu})} = -\lambda_{n\nu}, \quad (6)$$

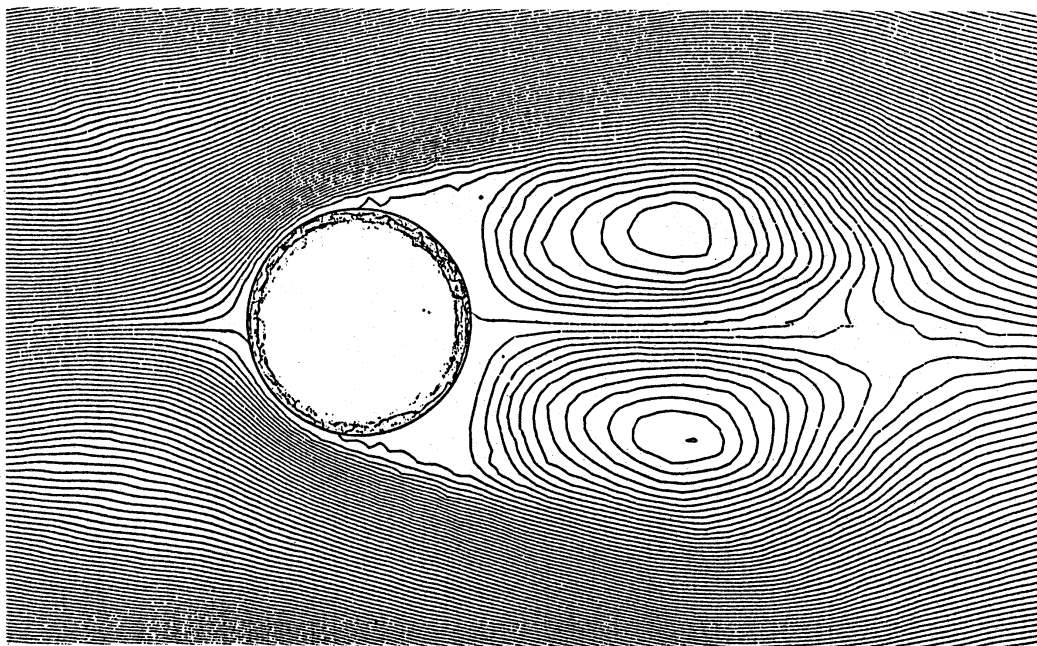
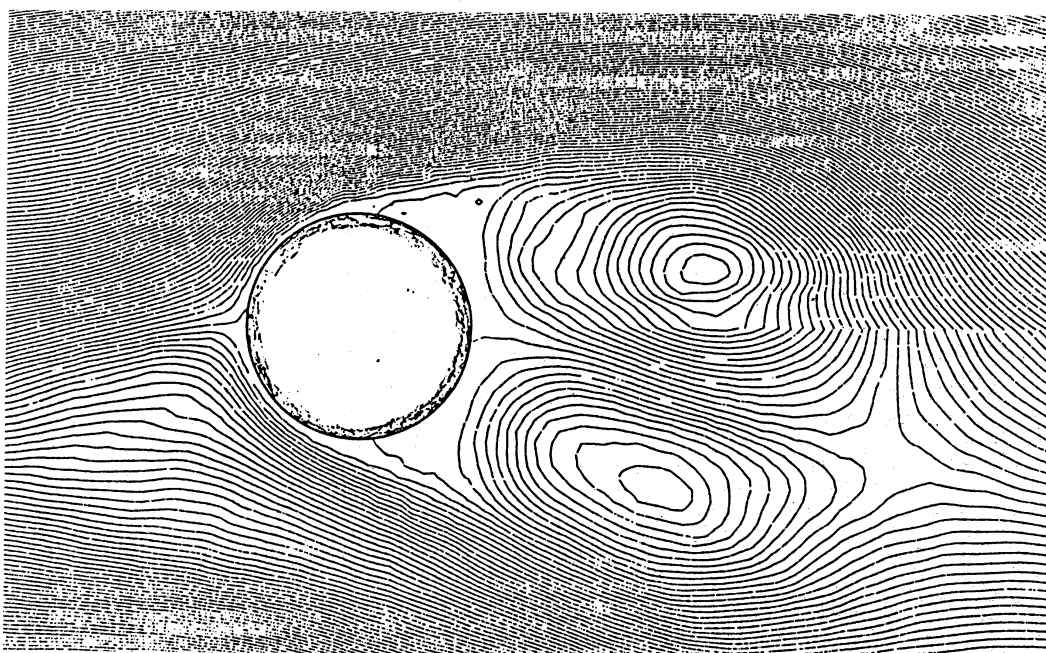
ただし、 $\epsilon_n = 1 : n > 0$, $\epsilon_0 = 1/\sqrt{2}$.

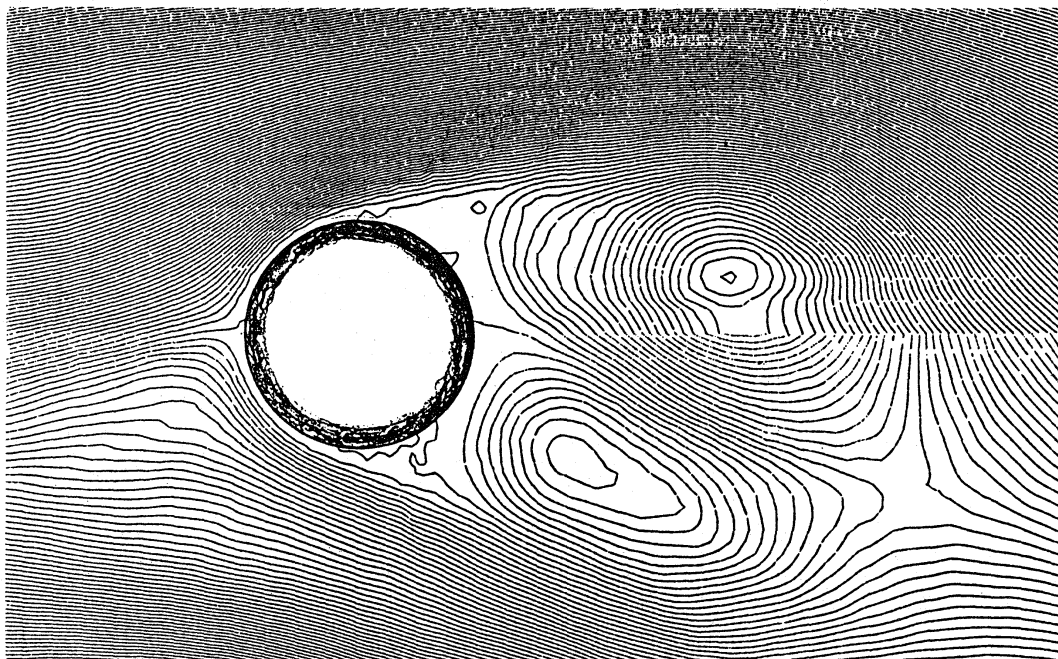
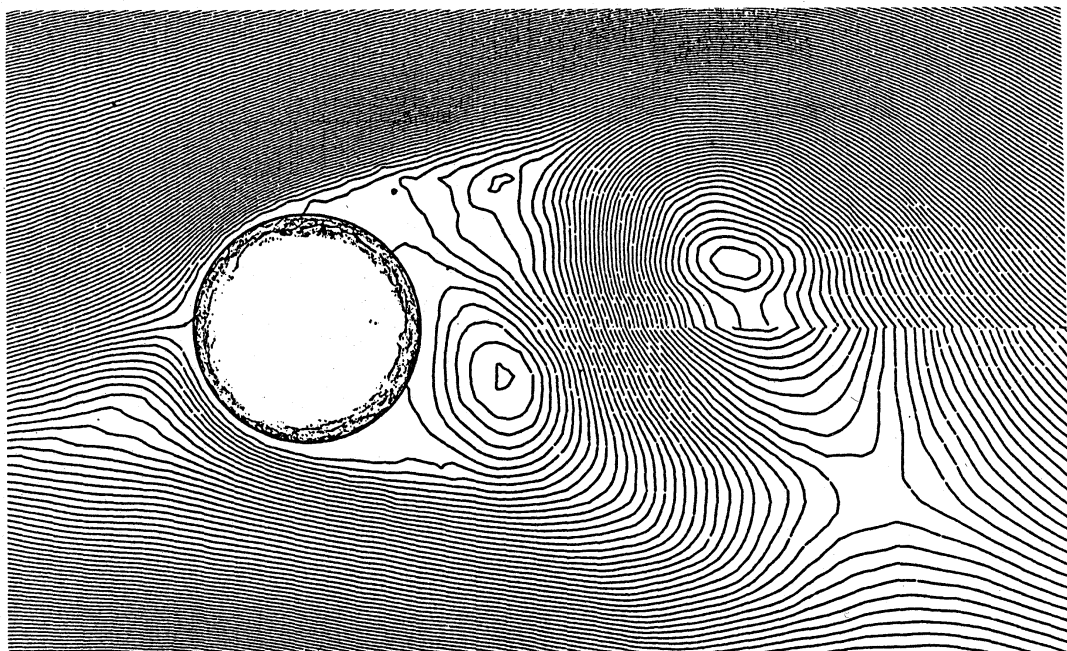
3. 円柱を過ぎる非定常流

静止した無限に広い流体中で、円柱が $t = 0$ において一定速度 U をもって動き出すばあいを考える。解法と計算式の記述は他¹⁾にあるので、ここでは省略して、座標関数を 200 個使って計算した結果を図 1 に一連の流線図で表示する。Reynolds 数 ($Re = 2aU/\nu$) を $Re = 200$ として、流れが上下対称でない時の安定性を見るために、 $t = 0$ で微小な (10^{-6}) 非対称攪乱を加えてある。円柱の背後にできる渦は $t = 40$ あたりまでは大体対称のまま成長してゆくが、その後比較的短い時間の中に急激に非対称性を増して剥離してゆく経過が示されている。Honji & Taneda²⁾による実験結果を参照すると、この数値実験はかなり良く現象を説明しているものと思われる。

図 2 は $Re = 10000$ の一例であるが、上記の実験で示された secondary vortex が本解法によっても認められることを示している。また逆に、 Re を小さくするとき、どこまで剥離が起るかということは興味ある問題である。

(a) $t = 5$ (b) $t = 20$

(c) $t = 45$ (d) $t = 49$

(e) $t = 50$ (f) $t = 52$ 図1 円柱の背後にできる渦の成長と剝離 $Re = 200$, $t = a/U$

非対称攪乱を与えない限り、 Re が大きいときでも流れは上下対称³⁾であるが、 $t \rightarrow \infty$ で定常流に収束するものか、振動流になるか、または剥離に類する現象が起るかということは調べてみなければ分らない。然し現実の流れでは微小攪乱は避けられないから非対称攪乱を与えたときの方が現実に近いことは確かであるが、たとえば、対称渦が十分に成長した時点で非対称攪乱を与えたらどうかというような問題もある。

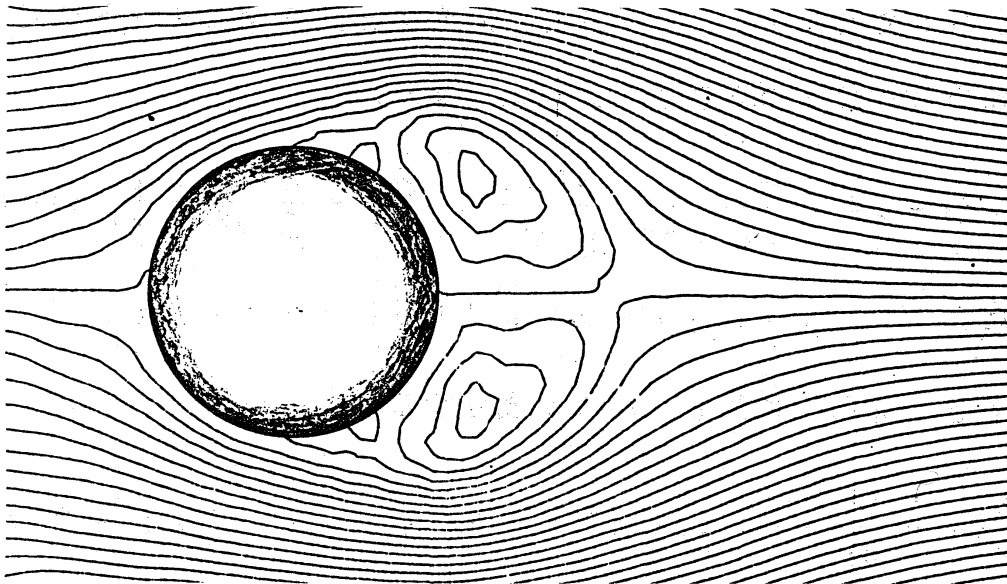


図2 円柱背後の渦と secondary vortex $Re = 10000$, $t = 2.5$

4. 円管 Poiseuille 流の不安定性

Poiseuille 流の層流から乱流へ遷移に関しては、流体力学における安定問題の典型的なものの一つとして、古くから多くの論文が発表されている。先に速報⁴⁾したように、§2に略述した解法にしたがって、円管 Poiseuille 流に3次元微小攪乱を加えたものとする、固有値問題から

臨界 Reynolds 数 (Rec) が見出だされることが分った。

無次元の円柱座標において、 $W = 1 - r^2$ で表わされる主流に対して加えられた微小三次元攪乱を

$$\sum_{n, \alpha} u_n(r) \exp i \{ n \theta + \alpha(z - ct) \}, \quad (7)$$

の形に表わすとき、 $n = 0, 1, 2 \dots$ に対してそれぞれ Rec が求められる。その中で最小の Rec は、 $n = 0, u = w = 0, v \neq 0$ であるようなモード(これをらせんモードと呼ぶ)に対応する。らせんモードに対しては N-S 方程式は次の線型微分方程式になり、

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (1 - r^2) \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2} v \right) = 0, \quad (8)$$

$$\text{さらに、} \quad v = g(r) \exp \{ i \alpha (z - ct) \}, \quad (9)$$

とおくと $g(r)$ に対して次式が成立する

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{1}{r^2} g - \alpha^2 g - E i (1 - r^2 - c) g = 0. \quad (10)$$

ここで、 $E = \text{Re} \alpha$ は大きい定数であって、この式は Orr-Sommerfeld 方程式と同様の特徴をそなえている。さらに $f = r g$, $x = r^2$ とおくと

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{4} E i f - \frac{1}{4} \{ \alpha^2 + E i (1 - c) \} \frac{1}{x} f = 0, \quad (11)$$

が得られるから、解は Bateman の k 関数⁵⁾ を使って次のように求められる

$$f = k_\lambda(y). \quad (12)$$

ここに、
$$y = \frac{1}{2} e x p (-i \pi / 4) \sqrt{E} x, \quad (13)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} e x p (-i \pi / 4) \sqrt{E} (1 - c - i \alpha^2 / E). \quad (14)$$

ただし、Bateman の関数 $k_n (x)$ は次の微分方程式の解である

$$x k_n'' (x) = (x - n) k_n (x). \quad (15)$$

ところで、らせんモードに関しては古くから Synge⁶⁾ の理論があつて、われわれの得た結果は一見それに対して矛盾するよう思われる。ここに Synge の説というのは、簡単に言えば、微分方程式に部分積分を行つて境界条件を適用することにより、らせんモードに不安定固有値は存在しないことを証明できるというものであつて、後に Pekeris⁷⁾ と Lin⁸⁾ も同様の推論を行っている。

それでは、われわれの結果との相違の原因はどこにあるかということであるが、結論を簡単に述べれば次のようになる。

- (i) 微小な攪乱速度成分 v が連続微分可能であることを要求するならば、Synge の説は正しいが、stückweise glatt を仮定すれば証明は成立しない。
- (ii) 微分方程式(10)は transition point ($c_r = W$) をもつが、実部・虚部を分離するとき、それは apparent singular point になることから、stückweise glatt な解を許容する理由がある。
- (iii) 非粘性の極限において、(10)は $Re \rightarrow \infty$ のとき δ 関数で表わされる次の解をもっているが、それは Helmholtz の渦定理を表現する

ものに外ならない。

$$g(r) = \delta(r - r_0), \quad c_r = 1 - r^2, \quad c_i = 0. \quad (16)$$

(iv) われわれの解法では、固有関数に *stückweise glatt* な関数を含む可能性がある。

攪乱速度分布に折れ曲りがあるということは、渦の二重層があると考えれば理解できる。そして二重層の成因としては、微細な Karmán 渦列のような、物体後流の影響としてとらえることができるであろう。

文 献

- 1) 宗像 健一 機械学会講演論文集 No. 760-18 (1976), 37.
- 2) Honji, H. & Taneda, S. J. Phys. Soc. Jpn. 27 (1969), 1668.
- 3) Munakata, K. Theoretical and Applied Mechanics 25 (1977), 323.
Uuiv. Tokyo Press.
- 4) Munakata, K. J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979), 685.
- 5) Bateman, H. Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 817.
- 6) Synge, J. L. Hydrodynamic Stability. Semi-centennial Publ. Am. Math. Soc. 2 (1938), 227.
- 7) Pekeris, C. L. Proc. U.S. Nat. Acad. Sci. 34 (1948), 285.
- 8) Lin, C. C. The Theory of Hydrodynamic Stability. (1955), 10.
Cambridge Univ. Press.