

コンパクト型対称空間のイソトロピー群の極小軌道

廣橋大悟 (筑波大学数学研究科)

序

これは宋賢貞氏 (千葉大学)、高木亮一氏 (千葉大学)、田崎博之氏 (筑波大学) との共同研究である。

Riemann 多様体 M と M に Lie 変換群として等長的に作用する Lie 群 K を考える。 K が対称空間 N の原点 o でのイソトロピー部分群で M が接空間 $T_o(N)$ の場合、軌道 $K(X)$ ($X \in T_o(N)$) は M の部分多様体としていくつもの顕著な性質を持つ (e.g., [5], [7], [8], [10])。ここでは、 (M, K) を

- (1) K をコンパクト型対称空間 N の原点 o におけるイソトロピー部分群、 M を接空間 $T_o(N)$ 内の単位球面、
- (2) M をコンパクト型対称空間、 K を M の一点でのイソトロピー部分群。

の二通りの場合に制限して M の極小部分多様体になる K -軌道を決定する。いずれの場合についても M の包体 $\bar{C}$ が存在して

$$M = \bigcup_{k \in K} k \cdot \bar{C}$$

を満たす。 $\bar{C}$ については第 1 節で構成する。 M の極小部分多様体となる K -軌道の $\bar{C}$ 内にとった起点の分類が本研究の主結果である (定理 2.1、定理 3.1)。(1) については第 2 節、(3) については第 3 節で詳しく述べる。

1 準備

G をコンパクト連結半単純 Lie 群とし、 K を G の閉部分群、 θ を G の対合的自己同型写像とする。さらに、 (G, K) は θ に関して対称対になっていると仮定する。すなわち、

$$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$$

とおき、 G_θ^0 で G_θ の単位連結成分を表したとき、 $G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$ が成り立つと仮定する。 G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で表す。 G の対合的自己同型写像 θ の微分は、 $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型写像になる。それも θ で表すことにする。このとき、 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$$

を満たす。

$\mathfrak{g}$ の内積 $\langle, \rangle$ を θ と G の随伴群の作用に関して不変になるようにとる。

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

とおくと、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

は直交直和分解になる。この直和分解を対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の標準分解と呼ぶ。

$\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ と、 $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとり、固定する。

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$$

とおくと、直交直和分解

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$$

を得る。 $\alpha \in \mathfrak{t}$ に対して、

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{t})\}$$

とおき、

$$\tilde{R}(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \mathfrak{t} - \{0\} \mid \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \neq \{0\}\} \subset \mathfrak{t}$$

によって $\mathfrak{g}$ のルート系 $\tilde{R}(\mathfrak{g})$ を定める。 $\tilde{R}(\mathfrak{g})$ を単に $\tilde{R}$ とも書く。 $\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して、

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \lambda, H \rangle X \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおき、

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\lambda \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\lambda \neq \{0\}\} \subset \mathfrak{a}'$$

によって $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ のルート系 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を定める。 $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を単に R とも書く。

$$\tilde{R}_0(\mathfrak{g}) = \tilde{R}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{b}$$

とおき、 $\mathfrak{t}$ から $\mathfrak{a}$ への直交射影を $H \mapsto \bar{H}$ で表すと、

$$R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{R}(\mathfrak{g}) - \tilde{R}_0(\mathfrak{g})\}$$

が成り立つ。 $\mathfrak{a}$ の基底を $\mathfrak{t}$ の基底に拡張し、これらの基底に関する辞書式順序 $>$ を $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{t}$ に入れると、 $H \in \mathfrak{t}$ に対して

$$\bar{H} > 0 \implies H > 0$$

が成り立つ。順序 $>$ に関する $\tilde{R}(\mathfrak{g})$ の基本系を $\tilde{F}(\mathfrak{g})$ で表す。 $\tilde{F}(\mathfrak{g})$ を単に $\tilde{F}$ とも書く。

$$\tilde{F}_0(\mathfrak{g}) = \tilde{F}(\mathfrak{g}) \cap \tilde{R}_0(\mathfrak{g})$$

とおくと、順序 $>$ に関する $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の基本系 $F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は

$$F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{F}(\mathfrak{g}) - \tilde{F}_0(\mathfrak{g})\}$$

で与えられる。

$$\begin{aligned}\tilde{R}_+(\mathfrak{g}) &= \{\alpha \in \tilde{R}(\mathfrak{g}) \mid \alpha > 0\} \\ R_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) &= \{\lambda \in R(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \mid \lambda > 0\}\end{aligned}$$

とおくと、

$$R_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \tilde{R}_+(\mathfrak{g}) - \tilde{R}_0(\mathfrak{g})\}$$

が成り立つ。

$$\mathfrak{k}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, H] = 0 \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

とおき、 $\lambda \in R_+(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対して、

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_\lambda &= \mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{g}_{-\lambda}) \\ \mathfrak{m}_\lambda &= \mathfrak{m} \cap (\mathfrak{g}_\lambda + \mathfrak{g}_{-\lambda})\end{aligned}$$

とおくと、次の補題が成り立つ。

補題 1.1 (1)

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{k}_\lambda, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+} \mathfrak{m}_\lambda,$$

は直交直和分解になる。

(2) 各 $\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_0$ に対して $S_\alpha \in \mathfrak{k}$ と $T_\alpha \in \mathfrak{m}$ が存在し、

$$\{S_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+, \bar{\alpha} = \lambda\}, \quad \{S_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+, \bar{\alpha} = \lambda\}$$

はそれぞれ $\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{m}_\lambda$ の正規直交基底になり、 $H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned}[H, S_\alpha] &= \langle \alpha, H \rangle T_\alpha, & [H, T_\alpha] &= -\langle \alpha, H \rangle S_\alpha, & [S_\alpha, T_\alpha] &= \bar{\alpha}, \\ \text{Ad}(\exp H) S_\alpha &= \cos \langle \alpha, H \rangle S_\alpha + \sin \langle \alpha, H \rangle T_\alpha, \\ \text{Ad}(\exp H) T_\alpha &= -\sin \langle \alpha, H \rangle S_\alpha + \cos \langle \alpha, H \rangle T_\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ。

証明 $[S_\alpha, T_\alpha] = \bar{\alpha}$ を示す。他の主張は、Helgason [2], p335, Lemma 11.3 を参照。任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{aligned}[[S_\alpha, T_\alpha], H] &= -[[T_\alpha, H], S_\alpha] - [H, S_\alpha], T_\alpha \\ &= -\langle \alpha, H \rangle ([S_\alpha, S_\alpha] + [T_\alpha, T_\alpha]) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\mathfrak{a}$ の極大可換なので $[S_\alpha, T_\alpha] \in \mathfrak{a}$ であり、

$$\begin{aligned} \langle [S_\alpha, T_\alpha], H \rangle &= \langle S_\alpha, [T_\alpha, H] \rangle \\ &= \langle S_\alpha, \langle \alpha, H \rangle S_\alpha \rangle \\ &= \langle \alpha, H \rangle \end{aligned}$$

$\langle, \rangle$ は $\mathfrak{a}$ 上で非退化なので、 $[S_\alpha, T_\alpha] = \bar{\alpha}$ である。 $\square$

対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を既約対称対 $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{k}_k)$ ($1 \leq k \leq s$) に分解する。:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_s, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{k}_1 + \cdots + \mathfrak{k}_s,$$

ここで、

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{k} \mid [X, \mathfrak{m}] = \{0\}\}$$

このとき、次の分解が得られる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_s, \quad \text{ただし、} \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_k, \\ R &= R_1 \cup \cdots \cup R_s, \quad \text{ただし、} R_k = R \cap \mathfrak{a}_k, \\ F &= F_1 \cup \cdots \cup F_s, \quad \text{ただし、} F_k = F \cap R_k. \end{aligned}$$

ここで、 $\mathfrak{a}'$ の分解は直交直和分解であり、 R と F の分解は disjoint union である。

$\mathfrak{a}$ の部分集合 D を

$$D = \bigcup_{\lambda \in R} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle = 0\}$$

によって定める。 $\mathfrak{a} - D$ の各連結成分を Weyl 領域と呼ぶ。

$$\begin{aligned} C &= \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle > 0 \ (\lambda \in F)\}, \\ C_k &= \{H \in \mathfrak{a}_k \mid \langle \lambda, H \rangle > 0 \ (\lambda \in F_k)\} \quad (1 \leq k \leq s) \end{aligned}$$

とおくと、これら C, C_k はそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_k$ 内の凸領域になり、閉包は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \lambda, H \rangle \geq 0 \ (\lambda \in F)\}, \\ \bar{C}_k &= \{H \in \mathfrak{a}_k \mid \langle \lambda, H \rangle \geq 0 \ (\lambda \in F_k)\} \quad (1 \leq k \leq s). \end{aligned}$$

さらに

$$C = C_1 \times \cdots \times C_s$$

が成り立つ。

任意の部分集合 $\Delta \subset F = F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対して

$$C^\Delta = \{H \in \bar{C} \mid \langle \lambda, H \rangle > 0 \ (\lambda \in \Delta), \langle \mu, H \rangle = 0 \ (\mu \in F - \Delta)\}$$

とおく。 $\Delta_k \subset F_k$ ($1 \leq k \leq s$) に対しても同様に、

$$C_k^{\Delta_k} = \{H \in \bar{C}_k \mid \langle \lambda, H \rangle > 0 \ (\lambda \in \Delta_k), \langle \mu, H \rangle = 0 \ (\mu \in F_k - \Delta_k)\}$$

と定義する。

$\Delta \subset F$ に対して、 $\Delta_k = \Delta \cap F_k$ 、 $C'^{\Delta} = C^{\Delta} \cap \mathfrak{a}'$ とおくと、

$$C^{\Delta} = C_1^{\Delta_1} \times \cdots \times C_s^{\Delta_s}$$

が成り立つ。

補題 1.2 (1) $\Delta_1 \subset F$ に対して、

$$\overline{C^{\Delta_1}} = \bigcup_{\Delta \subset \Delta_1} C^{\Delta}$$

は disjoint union になる。特に、 $\bar{C} = \bigcup_{\Delta \subset F} C^{\Delta}$ は disjoint union になる。

(2) $\Delta_1, \Delta_2 \subset F$ に対して

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \Leftrightarrow C^{\Delta_1} \subset \overline{C^{\Delta_2}}$$

が成り立つ。

各 $\mu \in F$ に対して次の条件を満たす $H_{\mu} \in \mathfrak{a}$ をとる。

$$\langle \lambda, H_{\mu} \rangle = \begin{cases} 1 & (\lambda = \mu, \lambda \in F) \\ 0 & (\lambda \neq \mu, \lambda \in F). \end{cases}$$

このとき、

$$\bar{C} = \left\{ \sum_{\lambda \in F} t_{\lambda} H_{\lambda} \mid t_{\lambda} \geq 0 \right\}$$

が成り立ち、 $\Delta \subset F$ に対して

$$C^{\Delta} = \left\{ \sum_{\lambda \in \Delta} t_{\lambda} H_{\lambda} \mid t_{\lambda} > 0 \right\}$$

を得る。

$H \in \mathfrak{m}$ に対して

$$\begin{aligned} Z^H &= \{g \in G \mid \text{Ad}(g)H = H\}, \\ Z_K^H &= \{k \in K \mid \text{Ad}(k)H = H\} \end{aligned}$$

とおくと、 $Z_K^H = Z^H \cap K$ 。 Z^H は G の閉部分群になり、 Z_K^H は K の閉部分群になる。

次の補題 1.3 から定理 1.6 までについては、 [3] を参照。

補題 1.3 Z^H は連結になる。

$\Delta \subset F$ に対して

$$\begin{aligned} N^\Delta &= \{g \in G \mid \text{Ad}(g)C^\Delta = C^\Delta\}, \\ Z^\Delta &= \{g \in G \mid \text{Ad}(g)|_{C^\Delta} = 1\}, \\ N_K^\Delta &= \{k \in K \mid \text{Ad}(k)C^\Delta = C^\Delta\}, \\ Z_K^\Delta &= \{k \in K \mid \text{Ad}(k)|_{C^\Delta} = 1\} \end{aligned}$$

とおくと、 $N_K^\Delta = N^\Delta \cap K$, $Z_K^\Delta = Z^\Delta \cap K$ 。 Z^Δ は G の閉部分群になり、 Z_K^Δ は K の閉部分群になる。 $H \in C^\Delta$ のとき、

$$Z^\Delta \subset Z^H, \quad Z_K^\Delta \subset Z_K^H$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned} R^\Delta &= R \cap (F - \Delta)Z, \\ R_+^\Delta &= R^\Delta \cap R_+, \\ \mathfrak{g}^\Delta &= \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+^\Delta} (\mathfrak{k}_\lambda + \mathfrak{m}_\lambda) \end{aligned}$$

とおく。

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}^\Delta &= \mathfrak{g}^\Delta \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 + \sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{k}_\lambda, \\ \mathfrak{m}^\Delta &= \mathfrak{g}^\Delta \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda, \end{aligned}$$

とすると、直交直和分解

$$\mathfrak{g}^\Delta = \mathfrak{k}^\Delta + \mathfrak{m}^\Delta$$

を得る。

補題 1.4 $\Delta \subset F$ をとる。 $H \in C^\Delta$ に対して次が成り立つ。

- (1) $R_+^\Delta = \{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, H \rangle = 0\}$
- (2) $R^\Delta = \{\lambda \in R \mid \langle \lambda, H \rangle = 0\}$
- (3) $\mathfrak{g}^\Delta = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = 0\}$
- (4) $(\mathfrak{g}^\Delta, \mathfrak{k}^\Delta)$ は対称対になり、 $\mathfrak{g}^\Delta = \mathfrak{k}^\Delta + \mathfrak{m}^\Delta$ はその標準分解になる。

補題 1.5 (1) $\Delta_1, \Delta_2 \subset F$ に対して、 $H_1 \in C^{\Delta_1}, H_2 \in C^{\Delta_2}$ をとり、 $g \in G$ とする。このとき、 $\text{Ad}(g)H_1 = H_2$ ならば $\text{Ad}(g)\mathfrak{g}^{\Delta_1} = \mathfrak{g}^{\Delta_2}$ が成り立つ。

- (2) $\Delta \subset F$ に対して $N^\Delta \subset N(\mathfrak{g}^\Delta)$ が成り立つ。さらに、任意の $H \in C^\Delta$ に対して、 $Z^H, Z^\Delta, N^\Delta, N(\mathfrak{g}^\Delta)$ はすべて G のコンパクト Lie 部分群になり、Lie 環はすべて $\mathfrak{g}^\Delta$ に一致する。

定理 1.6 $\Delta \subset F$ と $H \in C^\Delta$ に対して

$$Z^\Delta = Z^H = N^\Delta, \quad Z_K^\Delta = Z_K^H = N_K^\Delta$$

が成り立つ。

$\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle, \rangle$ は、 $\text{Ad}(G)$ -不変内積なので、等質空間 $M = G/K$ の G -不変 Riemann 計量を誘導する。このとき、 M はコンパクト型対称空間になる。 M の原点 o における接空間 $T_o(M)$ は、自然な射影

$$\pi: G \rightarrow M$$

の微分写像 $d\pi = d\pi_e$ により、 $\mathfrak{m}$ と同一視される。

δ_k を既約対称対 $(\mathfrak{g}_k, \mathfrak{k}_k)$ の最高ルートとして、disjoint union

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k &= F_k \cup \{\delta_k\} \quad (1 \leq k \leq s), \\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_s = F \cup \{\delta_1, \dots, \delta_s\} \end{aligned}$$

を考える。

$$\begin{aligned} Q &= \{H \in \mathfrak{a} \mid 0 < \langle H, \lambda \rangle < \pi \ (\lambda \in \mathcal{F})\}, \\ Q_k &= \{H \in \mathfrak{a}_k \mid 0 < \langle H, \lambda \rangle < \pi \ (\lambda \in \mathcal{F}_k)\} \quad (1 \leq k \leq s) \end{aligned}$$

とおく。これらの閉包は

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \{H \in \mathfrak{a} \mid 0 \leq \langle H, \lambda \rangle \leq \pi \ (\lambda \in \mathcal{F})\}, \\ \bar{Q}_k &= \{H \in \mathfrak{a}_k \mid 0 \leq \langle H, \lambda \rangle \leq \pi \ (\lambda \in \mathcal{F}_k)\} \quad (1 \leq k \leq s) \end{aligned}$$

で与えられる。 Q, Q_k はそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_k$ の凸領域であり、

$$Q = Q_1 \times \dots \times Q_s$$

が成り立つ。次に Q の凸胞体への分解を行う。 $\Delta \subset \mathcal{F}$ に対して、

$$Q^\Delta = \left\{ H \in \bar{Q} \mid \begin{array}{l} 0 < \langle H, \lambda \rangle \ (\lambda \in \Delta \cap F), \ \langle H, \delta_i \rangle < \pi \ (\delta_i \in \Delta), \\ \langle H, \mu \rangle = 0 \ (\mu \in F - \Delta), \ \langle H, \delta_j \rangle = \pi \ (\delta_j \in \mathcal{F} - \Delta) \end{array} \right\}$$

とおく。 $\Delta_k \subset \mathcal{F}_k$ ($1 \leq k \leq s$) に対しても同様に $\bar{Q}_k$ 内の凸胞体 $Q_k^{\Delta_k}$ を

$$Q_k^{\Delta_k} = \left\{ H \in \bar{Q}_k \mid \begin{array}{l} 0 < \langle H, \lambda \rangle \ (\lambda \in \Delta_k \cap F_k), \ \langle H, \delta_k \rangle < \pi \ (\delta_k \in \Delta_k), \\ \langle H, \mu \rangle = 0 \ (\mu \in F_k - \Delta_k), \ \langle H, \delta_k \rangle = \pi \ (\delta_k \in \mathcal{F}_k - \Delta_k) \end{array} \right\}$$

と定義する。たとえば、 $\Delta_k = \{\delta_k\}$ のときは $Q_k^{\Delta_k}$ は $\mathfrak{a}_k$ の原点になり、 $\Delta_k = \emptyset$ のときは $Q_k^{\Delta_k} = \emptyset$ となる。

$\Delta \subset \mathcal{F}$ に対して、 $\Delta_k = \Delta \cap \mathcal{F}_k$ ($1 \leq k \leq s$)、 $Q'^\Delta = Q^\Delta \cap \mathfrak{a}'$ とおけば、

$$Q^\Delta = Q_1^{\Delta_1} \times \dots \times Q_s^{\Delta_s}$$

が成り立つ。従って、 $Q^\Delta \neq \emptyset$ であることと、 $\Delta_k \neq \emptyset$ ($1 \leq k \leq s$) であることは同値である。この条件を満たす $\Delta \subset \mathcal{F}$ を許容 (admissible) という。空でない Q^Δ は $\bar{Q}$ 内の凸胞体になる。以下考える $\Delta \subset \mathcal{F}$ は許容部分集合であるとする。

補題 1.7 (1) $\Delta_1 \subset \mathcal{F}$ に対して、

$$\overline{Q^{\Delta_1}} = \bigcup_{\Delta \subset \Delta_1} Q^\Delta$$

は disjoint union になる。特に、 $\bar{Q} = \bigcup_{\Delta \subset \mathcal{F}} Q^\Delta$ は disjoint union になる。

(2) $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathcal{F}$ に対して

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \Leftrightarrow Q^{\Delta_1} \subset \overline{Q^{\Delta_2}}$$

が成り立つ。

$p \in M$ に対して、

$$K_p = \{k \in K \mid kp = p\}$$

とおく。

定理 1.8 $\Delta \subset \mathcal{F}$ に対して、

$$H_1, H_2 \in Q^\Delta \Leftrightarrow \mathcal{L}(K_{\text{Exp}H_1}) = \mathcal{L}(K_{\text{Exp}H_2})$$

証明 $H \in \bar{Q}$ に対して、 $K_{\text{Exp}H}$ の Lie 環を求める。 $K_{\text{Exp}H}$ は K の閉 Lie 部分群なので、補題 1.1 から

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(K_{\text{Exp}H}) &= \{X \in \mathfrak{k} \mid \exp tX \in K_{\text{Exp}H} \ (t \in \mathbf{R})\} \\ &= \{X \in \mathfrak{k} \mid \exp tX \cdot \text{Exp}H = \text{Exp}H \ (t \in \mathbf{R})\} \\ &= \left\{ X \in \mathfrak{k} \mid \left(\exp H \right)_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Exp Ad}(\exp(-H))tX = 0 \right\} \\ &= \{X \in \mathfrak{k} \mid ((\exp H)_* \circ d\pi) \cdot \text{Ad}(\exp(-H))(X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{k} \mid d\pi(\text{Ad}(\exp(-H))X) = 0\} \\ &= \mathfrak{k}_0 + \sum_{\substack{\lambda \in R_+ \\ \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbf{Z}}} \mathfrak{k}_\lambda \end{aligned}$$

が分かる。補題 1.7 により $H \in Q^\Delta$ を満たす $\Delta \subset \mathcal{F}$ が唯一つ決まる。定理の証明のために次の補題を用意する。

補題 1.9 $\Delta \subset \mathcal{F}$ と $H \in Q^\Delta$ に対して、 $\Delta' = \Delta \cap F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ とおいたとき、

$$\{\lambda \in R_+ \mid \langle \lambda, H \rangle \in \pi\mathbf{Z}\} = \begin{cases} R_+^{\Delta'}, & (\Delta \neq \Delta') \\ R_+^{\Delta'} \cup \left\{ \tilde{\alpha}_k - \sum_{\lambda \in (F-\Delta')\mathbf{Z}} t_\lambda \lambda \in R_+ \mid t_\lambda \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, 1 \leq k \leq s \right\}, & (\Delta = \Delta') \end{cases}$$

が成立する。特に、両辺は Δ のみに依存する。これを $\mathcal{R}_+^\Delta$ と表わすことにする。

この補題から定理 1.8 の必要性は明らかである。逆に、 $\mathcal{L}(K_{\text{Exp}H_1}) = \mathcal{L}(K_{\text{Exp}H_2})$ のときもこの補題から、 H_1, H_2 に対応する Δ_1 と Δ_2 とが一致することが分かり十分性も成り立つ。以上で、定理 1.8 が証明された。□

系 1.10 $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathcal{F}$, $H_1 \in Q^{\Delta_1}$, $H_2 \in Q^{\Delta_2}$ に対して、

$$Q^{\Delta_1} \subset \overline{Q^{\Delta_2}} \iff \mathcal{L}(K_{\text{Exp}H_1}) \supset \mathcal{L}(K_{\text{Exp}H_2})$$

が成り立つ。

証明 補題 1.7と $\mathcal{R}_+^\Delta$ の定義より、

$$\begin{aligned} Q^{\Delta_1} \subset \overline{Q^{\Delta_2}} &\iff \Delta_1 \subset \Delta_2 \\ &\iff \mathcal{R}_+^{\Delta_1} \supset \mathcal{R}_+^{\Delta_2} \end{aligned}$$

よって、定理 1.8の証明中の Lie 環の表示から、主張の成立が分かる。 $\square$

2 線形イソトロピー群の極小軌道

以下、 $H \in \mathfrak{m}$, $|H| = 1$ に対して、線形イソトロピー表現の軌道 $\text{Ad}(K)H$ を考える。 $\text{Ad}(K)H$ は $\mathfrak{m}$ 内の単位球面 S の部分多様体である。Helgason [2], p247, Lemma 6.3 と p293, Theorem 2.22 より、

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in K_0} \text{Ad}(k)\bar{C}$$

が成り立つので、

$$H \in \bar{C}$$

としてよい。[3] より $\text{Ad}(K)H$ は連結である。

定理 2.1 空でない部分集合 $\Delta \subset F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ に対して、 $H \in S \cap C^\Delta$ が唯一つ存在して $\text{Ad}(K)H$ は S の極小部分多様体となる。

証明 まず、 $H \in C^\Delta$ に対して、 $\text{Ad}(K)H$ の $\mathfrak{m}$ 内での点 H における平均曲率ベクトル m_H を求める。接空間 $T_H(\text{Ad}(K)H)$ は、

$$\begin{aligned} T_H(\text{Ad}(K)H) &= \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp tX)H \mid X \in \mathfrak{k} \right\} \\ &= \{[X, H] \mid X \in \mathfrak{k}\} \\ &= \sum_{\lambda \in R_+ - R_+^\Delta} m_\lambda \end{aligned} \tag{1}$$

であるから、

$$\tilde{R}_+^\Delta = \{\alpha \in \tilde{R}_+ \mid \langle \alpha, H \rangle = 0\}$$

とおくと、

$$\{T_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta\}$$

は $T_H(\text{Ad}(K)H)$ の正規直交基底である。各 T_α は

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp tS_\alpha)H = [S_\alpha, H] = -\langle \alpha, H \rangle T_\alpha$$

なる関係をもつ。そこで、 $X \in \mathfrak{k}$, $x \in \mathfrak{m}$ に対して、

$$X_x^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp tX)x = [X, x]$$

により $\mathfrak{m}$ のベクトル場 X^* を定義し、 $\text{Ad}(K)H$ の接ベクトル場 $X^*|_{\text{Ad}(K)H}$ を考える。

$$\begin{aligned} (X^*Y^*)_H &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y_{\text{Ad}(\exp tX)H}^* \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [Y, \text{Ad}(\exp tX)H] \\ &= [Y, [X, H]] \end{aligned}$$

である。 h を $\text{Ad}(K)H$ の $\mathfrak{m}$ における H での第二基本形式とすると (Takagi and Takahashi [8] で h が、Kitagawa and Ohnita [5] で m_H 計算されている)、

$$\begin{aligned} h(X^*, Y^*) &= ((X^*Y^*)_H \text{ の } \text{Ad}(K)H\text{-法成分}) \\ &= [Y, [X, H]] \text{ の } \left(\sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda + \mathfrak{a} \right)\text{-成分}. \end{aligned}$$

$(S_\alpha^*)_H = -\langle \alpha, H \rangle T_\alpha$ より

$$\begin{aligned} m_H &= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} h(T_\alpha, T_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{1}{\langle \alpha, H \rangle^2} [S_\alpha, [S_\alpha, H]] \text{ の } \left(\sum_{\lambda \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda + \mathfrak{a} \right)\text{-成分} \end{aligned}$$

ここで、補題 1.1 より

$$\begin{aligned} [S_\alpha, [S_\alpha, H]] &= -\langle \alpha, H \rangle [S_\alpha, T_\alpha] \\ &= -\langle \alpha, H \rangle \bar{\alpha} \end{aligned}$$

よって、

$$m_H = - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{\bar{\alpha}}{\langle \alpha, H \rangle} \quad (2)$$

が分かる。

補題 2.2 [Hsiang [4], Lawson [6]] m_H は C^Δ に接する。

証明 (2) 式より $m_H \in \mathfrak{a}$ であるから、十分小さい $\epsilon > 0$ に対して、

$$H + tm_H \in C^\Delta \quad (|t| < \epsilon)$$

が成立すればよい。定理 1.6 より、これは

$$Z_K^H = Z_K^{H+tm_H}$$

と同値である。 $\text{Ad}(K)H$ の $\mathfrak{m}$ における平均曲率ベクトル場 m は、 $\text{Ad}(K)$ が $\mathfrak{m}$ に等長的に作用することから

$$\text{Ad}(k)_* m = m \quad (k \in K)$$

を満たす。すなわち、

$$\text{Ad}(k)(H + tm_H) = \text{Ad}(k)H + tm_{\text{Ad}(k)H} \quad (k \in K)$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned} Z_K^{H+tm_H} &= \{k \in K \mid \text{Ad}(k)(H + tm_H) = H + tm_H\} \\ &= \{k \in K \mid \text{Ad}(k)H + tm_{\text{Ad}(k)H} = H + tm_H\} \\ &\supset \{k \in K \mid \text{Ad}(k)H = H\} \\ &= Z_K^H \end{aligned}$$

となる。逆の包含関係をみる。 $H + tm_H \in C^{\Delta'}$ ($\Delta' \subset F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$) とすると、 $|t|$ が十分小さいことから、

$$C^\Delta \subset \overline{C^{\Delta'}}$$

が成り立ち、定理 1.6 から、

$$Z_K^{H+tm_H} = Z_K^{\Delta'} \subset Z_K^\Delta = Z_K^H$$

となる。以上で、補題が証明された。 $\square$

以下、 $\Delta \subset F(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ を固定して H は C^Δ を動くとする。 C^Δ 上の関数

$$F(H) = - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \log \langle \alpha, H \rangle \quad (H \in C^\Delta)$$

を考える。各 $X \in T_H(C^\Delta)$ に対して、 $\mathfrak{a}$ の部分多様体 C^Δ 上の F の勾配ベクトル場を $\text{grad} F$ で表わと、

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}_H F, X \rangle &= dF_H(X) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(H + tX) \\ &= - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \log(\langle \alpha, H \rangle + t\langle \alpha, X \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\alpha \in \bar{R}_+ - \bar{R}_+^\Delta} \frac{\langle \alpha, X \rangle}{\langle \alpha, H \rangle} \\
&= \left\langle - \sum_{\alpha \in \bar{R}_+ - \bar{R}_+^\Delta} \frac{\alpha}{\langle \alpha, H \rangle}, X \right\rangle
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\text{grad}_H F &= - \sum_{\alpha \in \bar{R}_+ - \bar{R}_+^\Delta} \frac{\alpha}{\langle \alpha, H \rangle} \text{の } C^\Delta \text{の接成分} \\
&= - \sum_{\alpha \in \bar{R}_+ - \bar{R}_+^\Delta} \frac{\bar{\alpha}}{\langle \alpha, H \rangle} \text{の } C^\Delta \text{の接成分} \\
&= - \sum_{\alpha \in \bar{R}_+ - \bar{R}_+^\Delta} \frac{\bar{\alpha}}{\langle \alpha, H \rangle}
\end{aligned}$$

最後の等号は補題 2.2から分かる。よって、(2) から $\text{Ad}(K)H$ の $\mathfrak{m}$ における平均曲率ベクトル場 m^H は

$$(m^H)_H = \text{grad}_H F$$

を満たす。ゆえに、 $H \in S \cap C^\Delta$ のとき

$$T_H(\mathfrak{m}) \rightarrow T_H(S); X \mapsto X^T$$

を直交射影とすると、 $\text{Ad}(K)H$ の S における H での第二基本形式は h^T であるから、

$$\begin{aligned}
(\text{Ad}(K)H \subset S \text{ の } H \text{ での平均曲率ベクトル}) &= (m^H)_H^T \\
&= (\text{grad}_H F)^T \\
&= \text{grad}_H(F|_{S \cap C^\Delta}). \tag{3}
\end{aligned}$$

(3) 式より、 $\text{Ad}(K)H$ が S の極小部分多様体であることと $\text{grad}_H(F|_{S \cap C^\Delta}) = 0$ とは同値である。以下、 $F|_{S \cap C^\Delta}$ の考察を行う。 $\tilde{\nabla}, \nabla$ をそれぞれ $\mathfrak{m}, S$ の共変微分、 $S \subset \mathfrak{m}$ の第二基本形式を h^S とする。 $S \cap C^\Delta$ の接ベクトル場 X, Y に対して、

$$\begin{aligned}
(\text{Hess} F)(X, Y) &= \tilde{\nabla}^2 F(X, Y) \\
&= (\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla} F)(X) \\
&= Y((\tilde{\nabla} F)(X)) - \tilde{\nabla} F(\tilde{\nabla}_Y X) \\
&= Y(dF(X)) - dF(YX) \\
&= Y(d(F|_{S \cap C^\Delta})(X)) - d(F|_{S \cap C^\Delta})(\nabla_Y X) - dF(h^S(X, Y)) \\
&= (\text{Hess}(F|_{S \cap C^\Delta}))(X, Y) - dF(h^S(X, Y)).
\end{aligned}$$

よって、

$$(\text{Hess}(F|_{S \cap C^\Delta}))(X, Y) = (\text{Hess} F)(X, Y) + dF(h^S(X, Y)) \tag{4}$$

となる。まず、 $\text{Hess}F$ を求める。 $T_H(C^\Delta)$ の正規直交基底 $e_1, \dots, e_k$ を取り、平行にベクトル場に拡張しておく。

$$\begin{aligned} (\text{Hess}F)_H(e_i, e_j) &= (e_j)_H(dF(e_i)) \\ &= (e_j e_i F)(H), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e_i F)(H) &= - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \log \langle \alpha, H + t e_i \rangle \\ &= - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{\langle \alpha, e_i \rangle}{\langle \alpha, H \rangle}, \\ (e_j e_i F)(H) &= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{\langle \alpha, e_i \rangle \langle \alpha, e_j \rangle}{\langle \alpha, H \rangle^2}. \end{aligned}$$

つぎに、(4) 式の第二項について、球面の第二基本形式 h^S が、

$$h_H^S(X, Y) = -\langle X, Y \rangle H$$

で与えられることから

$$\begin{aligned} dF(h_H^S(X, Y)) &= \left\langle - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{\bar{\alpha}}{\langle \alpha, H \rangle}, -\langle X, Y \rangle H \right\rangle \\ &= \text{Card}(\tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta) \langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

が分かる。ただし、 Card は集合の元の個数とする。以上より、

$$(\text{Hess}(F|_{S \cap C^\Delta}))_H(X, Y) = \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{\langle \alpha, X \rangle \langle \alpha, Y \rangle}{\langle \alpha, H \rangle^2} + \text{Card}(\tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta) \langle X, Y \rangle.$$

ここで、 $\mathfrak{g}$ は半単純であることから、各 $X_H \in T_H(S \cap C^\Delta)$ に対して、ある $\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta$ が存在して、

$$\langle \alpha, X_H \rangle > 0$$

となる。従って、任意の $H \in S \cap C^\Delta$ に対して、 $(\text{Hess}(F|_{S \cap C^\Delta}))_H$ は正定値になり、 $F|_{S \cap C^\Delta}$ は下に凸となっている。

H を $S \cap C^\Delta$ の境界に近づけると、ある $\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta$ が存在して、

$$\langle \alpha, H \rangle \longrightarrow +0$$

となる。さらに、 $H \in S \cap C^\Delta$ より、全ての $\beta \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta$ に対して、 $\langle \beta, H \rangle$ は上に有界なので、 F の定義より、

$$F|_{S \cap C^\Delta}(H) \longrightarrow +\infty$$

が分かる。

以上より、 $\text{grad}_H(F|_{S \cap C^\Delta}) = 0$ となる $H \in S \cap C^\Delta$ は唯一つ存在し、定理が成り立つ。

□

3 イソトロピー群の極小軌道

以下、 $p \in M$ に対して、イソトロピー軌道 Kp を考える。 Kp を M の Riemann 部分多様体とする。 $d\pi = d\pi_e$ の下に $T_o(M)$ は $\mathfrak{m}$ と同一視され、さらに、Helgason [2], p323, Theorem 8.6 より、

$$G/K = K \operatorname{Exp} \bar{Q}$$

が成り立つので、

$$p = \operatorname{Exp} H, \quad H \in \bar{Q}$$

としてよい。[1] より、 Kp は連結である。

定理 3.1 許容部分集合 $\Delta \subset \mathcal{F}$ に対して、 $H \in Q^\Delta$ が唯一つ存在して $K \operatorname{Exp} H$ は M の極小部分多様体となる。

証明 任意の $H \in Q^\Delta$ に対して、 $p = \operatorname{Exp} H$ とおく。

$$\begin{aligned} T_p(Kp) &= \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX \cdot p \mid X \in \mathfrak{k} \right\} \\ &= \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX \cdot \operatorname{Exp} H \mid X \in \mathfrak{k} \right\} \\ &= \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp tX \exp H) K \mid X \in \mathfrak{k} \right\} \\ &= \left\{ \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp H (\exp \operatorname{Ad}(\exp(-H))(tX)) K \mid X \in \mathfrak{k} \right\} \\ &= \left\{ (\exp H)_* \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi (\exp \operatorname{Ad}(\exp(-H))(tX)) \mid X \in \mathfrak{k} \right\} \\ &= \{ ((\exp H)_* \circ d\pi) \operatorname{Ad}(\exp(-H))(X) \mid X \in \mathfrak{k} \} \\ &\cong \{ d\pi(e^{-\operatorname{ad} H}(X)) \mid X \in \mathfrak{k} \} \\ &\cong \{ (e^{-\operatorname{ad} H}(X))_{\mathfrak{m}} \mid X \in \mathfrak{k} \} \end{aligned}$$

補題 1.1 より、 $\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_0$ に対して、

$$\begin{aligned} (e^{-\operatorname{ad} H}(S_\alpha))_{\mathfrak{m}} &= (\cos \langle \alpha, H \rangle S_\alpha - \sin \langle \alpha, H \rangle T_\alpha)_{\mathfrak{m}} \\ &= -\sin \langle \alpha, H \rangle T_\alpha \end{aligned}$$

であり、 $e^{-\operatorname{ad} H}$ は $\mathfrak{k}_0$ には自明に作用するので、

$$T_p(Kp) = \sum_{\lambda \in R_+ - \mathcal{R}_+^\Delta} \mathfrak{m}_\lambda \quad (5)$$

となり、

$$\tilde{\mathcal{R}}_+^\Delta = \{ \alpha \in \tilde{R}_+(\mathfrak{g}) \mid \langle \alpha, H \rangle \in \pi \mathbb{Z} \}$$

とおくと、

$$\{T_\alpha \mid \alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathcal{R}}_+^\Delta\}$$

は $T_p(Kp)$ の正規直交基底となる。ここで、各 T_α は補題 1.1 により、

$$\begin{aligned} T_\alpha &\cong ((\exp H)_* \circ d\pi) T_\alpha \\ &= -\frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp tS_\alpha \cdot \text{Exp} H \right) \end{aligned} \quad (6)$$

と表わされる。

任意の $X \in \mathfrak{g}$, $q \in M$ に対して、 M のベクトル場 X^+ を、

$$(X^+)_q = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp tX \cdot q$$

によって定める。 $\mathfrak{h}$ を Kp の M における第二基本形式、 $\tilde{\nabla}$ を M の Levi-Civita 接続とすると、 $\alpha, \beta \in \tilde{R}_+ - \tilde{\mathcal{R}}_+^\Delta$ に対して、

$$\begin{aligned} &\mathfrak{h}_p(T_\alpha, T_\beta) \\ &= \mathfrak{h}_p \left(-\frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp tS_\alpha \cdot \text{Exp} H \right), -\frac{1}{\sin\langle\beta, H\rangle} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp tS_\beta \cdot \text{Exp} H \right) \right) \\ &\quad ((6) \text{ 式より}) \\ &= \frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle \sin\langle\beta, H\rangle} \mathfrak{h}_p \left((S_\alpha^+)_{\text{Exp} H}, (S_\beta^+)_{\text{Exp} H} \right) \\ &= \frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle \sin\langle\beta, H\rangle} \left((\tilde{\nabla}_{S_\alpha^+} S_\beta^+)_{\text{Exp} H} \text{ の } K\text{Exp} H \text{ の法成分} \right) \end{aligned}$$

補題 3.2 (1) $g \in G$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$g_*(\tilde{\nabla}_{X+Y^+}) = \tilde{\nabla}_{(\text{Ad}(g)X)^+} (\text{Ad}(g)Y)^+.$$

(2) $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$(\tilde{\nabla}_{X+Y^+})_o = \begin{cases} -[X, Y]_{\mathfrak{m}}, & X \in \mathfrak{m}. \\ 0, & X \in \mathfrak{k}. \end{cases}$$

証明 (1) $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, $q \in M$ に対して、

$$\begin{aligned} g_*(X^+)_q &= g_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp tX \cdot q \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \exp tX \cdot q \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp \text{Ad}(g)(tX) \cdot (g \cdot q) \\ &= (\text{Ad}(g)X)_{g \cdot q}^+ \end{aligned}$$

すなわち、

$$g_*X^+ = (\text{Ad}(g)X)^+$$

が成り立つ。\$G\$ は \$M\$ に等長的に作用しているので、

$$g_*(\tilde{\nabla}_{X+Y^+}) = \tilde{\nabla}_{(\text{Ad}(g)X)^+(\text{Ad}(g)Y)^+}, \quad (g \in G, X, Y \in \text{frak}g)$$

が分かる。

(2) \$X \in \mathfrak{m}\$ とする。\$\exp(-tX)_*\$ は、\$M\$ の測地線 \$\exp(-tX) \cdot o\$ に沿った平行移動なので、

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{X+Y^+})_o &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\exp(-tX)_* \cdot Y_{\exp tX \cdot o}^+ - Y}{t} \\ &= [X^+, Y^+]_o \\ &= -[X, Y]_o^+ \quad ([2] \text{ より}) \\ &= -\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp t[X, Y] \cdot o \\ &= -d\pi([X, Y]) \\ &= -[X, Y]_{\mathfrak{m}} \end{aligned}$$

\$X \in \mathfrak{k}\$ とすれば、\$X_o^+ = 0\$ なので

$$(\tilde{\nabla}_{X+Y^+})_o = 0$$

である。□

補題 3.2 より、

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{S_\alpha^+ S_\beta^+})_{\text{Exp}H} &= (\exp H)_* \left((\exp(-H))_* \tilde{\nabla}_{S_\alpha^+ S_\beta^+} \right)_o \\ &\cong \left((\exp(-H))_* \tilde{\nabla}_{S_\alpha^+ S_\beta^+} \right)_o \\ &= \left(\tilde{\nabla}_{(\text{Ad}(\exp(-H))S_\alpha)^+(\text{Ad}(\exp(-H))S_\beta)^+} \right)_o \\ &= \left(\tilde{\nabla}_{(\cos\langle\alpha, H\rangle S_\alpha - \sin\langle\alpha, H\rangle T_\alpha)^+(\cos\langle\beta, H\rangle S_\beta - \sin\langle\beta, H\rangle T_\beta)^+} \right)_o \\ &= -[-\sin\langle\alpha, H\rangle T_\alpha, \cos\langle\beta, H\rangle S_\beta - \sin\langle\beta, H\rangle T_\beta]_{\mathfrak{m}} \\ &= -[-\sin\langle\alpha, H\rangle T_\alpha, \cos\langle\beta, H\rangle S_\beta] \\ &= \sin\langle\alpha, H\rangle \cos\langle\beta, H\rangle [T_\alpha, S_\beta] \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} h_p(T_\alpha, T_\beta) &= \frac{1}{\sin\langle\alpha, H\rangle \sin\langle\beta, H\rangle} \left(\sin\langle\alpha, H\rangle \cos\langle\beta, H\rangle [T_\alpha, S_\beta]^\perp \right) \\ &= \cot\langle\beta, H\rangle [T_\alpha, S_\beta]^\perp \end{aligned} \tag{7}$$

ただし、\$[\cdot, \cdot]^\perp\$ は \$\mathfrak{m}\$ での \$T_p(Kp)\$-法成分とする。

\$\mathfrak{m}\$ を \$Kp\$ の \$M\$ における平均曲率ベクトル場とする。(7) 式と \$[S_\alpha, T_\alpha] = \bar{\alpha}\$ より、

$$m_p = \text{trace} h_p$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} h_p(T_\alpha, T_\alpha) \\
&= - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \cot \langle \alpha, H \rangle \bar{\alpha}
\end{aligned} \tag{8}$$

となる (m_p は Tasaki [11] で計算されている)。特に、 m_p は a に接している。

補題 3.3 [Hsiang [4], Lawson [6]] $p = \text{Exp} H$, $H \in Q^\Delta$ とする。このとき、 Kp の p での平均曲率ベクトル m_p は Q^Δ に接する。

証明 十分小さい $\epsilon > 0$ に対して、

$$H + tm_p \in Q^\Delta \quad (|t| < \epsilon)$$

を示せばよい。定理 1.8 より、

$$\mathcal{L}(K_p) = \mathcal{L}(K_{\text{Exp}(H+tm_p)})$$

を示せば十分である。 K は Kp に等長的に作用しているので、

$$k_* m = m, \quad (k \in K)$$

が成り立つ。故に、

$$\begin{aligned}
K_{\text{Exp}(H+tm_p)} &= \{k \in K \mid k \text{Exp}_p tm_p = \text{Exp}_p tm_p\} \\
&= \{k \in K \mid \text{Exp}_{k \cdot p} t(k_* m_p) = \text{Exp}_p tm_p\} \\
&= \{k \in K \mid \text{Exp}_{k \cdot p} tm_{k \cdot p} = \text{Exp}_p tm_p\} \\
&\supset \{k \in K \mid k \cdot p = p\} \\
&= K_p
\end{aligned}$$

となる。逆の包含関係をみる。 $H + tm_p \in Q^{\Delta'}$ ($\Delta' \subset \mathcal{F}$) とすると、 $|t|$ が十分小さいことから、

$$Q^\Delta \subset \overline{Q^{\Delta'}}$$

が成り立ち、系 1.10 から、

$$\mathcal{L}(K_{\text{Exp}(H+tm_p)}) \subset \mathcal{L}(K_p)$$

となる。以上で、補題が証明された。□

以下、 $\Delta \subset \mathcal{F}$ を固定して、 H は Q^Δ を動くものとする。 $K \text{Exp} H$ が M の極小部分多様体となるものの一意存在性を示す。

Q^Δ 上の関数 F を

$$F(H) = - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \log(\sin \langle \alpha, H \rangle) \quad (H \in Q^\Delta)$$

で定義する。 $\partial_1, \dots, \partial_r$ を Q^Δ の正規直交平行ベクトル場とする。

$$\begin{aligned} (\partial_i F)(H) &= \partial_i \left(- \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \log(\sin \langle \alpha, \cdot \rangle) \right) (H) \\ &= - \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} (\cot \langle \alpha, H \rangle) \langle \alpha, \partial_i \rangle \end{aligned}$$

よって、 $K\text{Exp}H$ の $M = G/K$ 内の平均曲率ベクトル場 $\mathbf{m}^H$ は、補題 3.3 と (8) 式より、

$$(\mathbf{m}^H)_{\text{Exp}H} = \text{grad}_H F \quad (9)$$

を満たす。(9) 式より $\text{grad}_H F = 0$ は、 $K\text{Exp}H$ が M の極小部分多様体であるための必要十分条件である。

$$(\text{Hess} F)_H(\partial_i, \partial_j) = (\partial_j \partial_i F)(H)$$

$$\begin{aligned} (\partial_j \partial_i F)(H) &= \partial_j \left(- \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} (\cot \langle \alpha, \cdot \rangle) \langle \alpha, \partial_i \rangle \right) (H) \\ &= \sum_{\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta} \frac{\langle \alpha, \partial_i \rangle \langle \alpha, \partial_j \rangle}{\sin^2 \langle \alpha, H \rangle} \quad (H \in Q^\Delta). \end{aligned}$$

ここで、 $\mathfrak{g}$ の半単純性から、各 ∂_i に対して、ある $\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta$ が存在して、

$$\langle \alpha, \partial_i \rangle > 0$$

となる。従って、任意の $H \in Q^\Delta$ に対して $(\text{Hess} F)_H$ は正定値になり、 F は Q^Δ で下に凸となっている。

H を Q^Δ の境界に近づけると、ある $\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta$ が存在して、

$$\langle \alpha, H \rangle \longrightarrow +0 \text{ または } \pi - 0$$

となる。 $H \in Q^\Delta$ より、全ての $\alpha \in \tilde{R}_+ - \tilde{R}_+^\Delta$ に対して、 $\sin \langle \alpha, H \rangle$ は上に有界なので、 F の定義より、

$$F(H) \longrightarrow +\infty$$

が分かる。以上より、 $\text{grad}_H F = 0$ 、すなわち $K\text{Exp}H$ が M の極小部分多様体となる $H \in Q^\Delta$ は唯一つ存在する。□

参考文献

- [1] B. Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces II, Duke Math. J., 45 (1978), 405 - 425.

- [2] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, 1978.
- [3] D. Hirohashi, T. Kanno and H. Tasaki, Area-minimizing of the cone over symmetric R -spaces, preprint.
- [4] W. Y. Hsiang, On compact homogeneous submanifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **56** (1966), 5 – 6.
- [5] Y. Kitagawa and Y. Ohnita, On the mean curvature of R -spaces, Math. Ann., **262** (1983), 239 – 243.
- [6] H. B. Lawson, Jr., Lectures on minimal submanifolds, Volume I, Publish or Perish, Inc., 1980.
- [7] Y. Ohnita, On differential geometrical properties of the standard imbeddings of R -spaces, Report at the Conference of Math. Soc. Japan (April, 1982), in Japanese.
- [8] R. Takagi and T. Takahashi, On the principal curvature of homogeneous hypersurfaces in a sphere, Differential geometry, in honor of K. Yano, Kinokuniya, Tokyo, 1972, 469 – 481.
- [9] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I, Tsukuba J. Math., **2** (1978), 35 – 68.
- [10] M. Takeuchi and S. Kobayashi, Minimal imbedding of R -spaces, J. Differential Geometry, **2** (1968), 203 – 215.
- [11] H. Tasaki, Certain minimal or homologically volume minimizing submanifolds in compact symmetric spaces, Tsukuba J. Math., **9** (1985), 117 – 131.

Institute of Mathematics
 University of Tsukuba
 Tsukuba, Ibaraki
 305-8571
 Japan
 daigo@math.tsukuba.ac.jp