

On Equivariant Desuspension

阪大 理学部 森本 雅治

コンパクト・リー群 G が与えられた時 (有限次元) 実 G -ベクトル空間を, その単位球面の G -ホモトピー同値あるいは安定 G -ホモトピー同値によって分類する問題がある。この問題は G が有限群の場合に帰着されるということが知られている。そこで以下 G は有限群とする。上の問題に関連して, G -ホモトピー同値と安定 G -ホモトピー同値の差が我々の関心を引く。

V, W を実 G -ベクトル空間, $\mathbb{R}$ を自明な G -作用を持つ 1 次元実 G -ベクトル空間とする。 V, W および $\mathbb{R}$ に G -不変な内積を入れ, さらに $V \oplus \mathbb{R}, W \oplus \mathbb{R}$ に自然に G -不変な内積を導入しておく。 V の単位球面を $S(V)$ とする。即ち

$$S(V) = \{x \in V : \|x\| = 1\}$$

である。 W 等に対しても同様である。自然数 n に対して $n\mathbb{R}$ で n 個の $\mathbb{R}$ の直和を表す。

問題 A $S(V \oplus n\mathbb{R})$ から $S(W \oplus n\mathbb{R})$ への G -ホモトピー同値があるとき $S(V)$ から $S(W)$ への G -ホモトピー同値があるか。

この問題に密接に関連するのが次の問題である。

$S(V)$ から $S(W)$ へ G -写像 f があるとき、そのサスペンションと呼ばれるべき G -写像 $\Sigma f: S(V \oplus \mathbb{R}) \rightarrow S(W \oplus \mathbb{R})$ が定義される。 $S(V)$ から $S(W)$ への G -写像の全体を G -ホモトピー同値で割ったものを $[S(V), S(W)]_G$ で表す。このとき自然に $\Sigma: [S(V), S(W)]_G \rightarrow [S(V \oplus \mathbb{R}), S(W \oplus \mathbb{R})]_G$ が誘導される。

問題 B $\Sigma([S(V), S(W)]_G) \subset [S(V \oplus \mathbb{R}), S(W \oplus \mathbb{R})]_G$ の決定。

また一般に $[S(V), S(W)]_G$ は加群とは限らない。しかし、 $[S(V \oplus 2\mathbb{R}), S(W \oplus 2\mathbb{R})]_G$ には自然に加群構造がはいる。この事実は (G -ホモトピーに関するある条件をみたす) $S(V)$ から $S(W)$ への G -写像を作ろうとする時、まず $S(V \oplus n\mathbb{R})$ から $S(W \oplus n\mathbb{R})$ への G -写像を作り、サスペンションの逆にあたる操作によって $S(V)$ から $S(W)$ への G -写像を手に入れる

ことはできないものかという疑問を投げかける。

問題A, Bおよび上の理由によってサスペンションの逆操作を考えてみた。

H が G の部分群であるとき $H < G$ によって表す。 H の共役類を (H) で書く。 G -空間 X があるとき

$$\text{Iso}(X) = \{(H) : H = G_x \text{ for some } x \in X\},$$

$H < G$ に対して

$$X^H = \{x \in X : \forall g \in H, gx = x\}$$

とする。 G -写像 $f : S(V) \rightarrow S(W)$ に対して f^H を

$$f^H = f|S(V)^H : S(V)^H \rightarrow S(W)^H$$

で定める。 f を動径方向に自然に拡張して V から W への G -写像としておく。 $(a, b) \in S(V \oplus \mathbb{R})$, $a \in V$, $b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\Sigma f(a, b) = (f(a), b)$$

により $\Sigma f : S(V \oplus \mathbb{R}) \rightarrow S(W \oplus \mathbb{R})$ を定める。

問題A, Bに対する解答が定理A, Bである。

定理A $(H) \in \text{Iso}(S(V))$ で $H \neq G$ に対して $\dim V^H \geq 2$ が成り立てば, $S(V \oplus \mathbb{N}\mathbb{R})$ と $S(W \oplus \mathbb{N}\mathbb{R})$ が G -ホ

ホモトピー同値の時 $S(V)$ と $S(W)$ は G -ホモトピー同値である。

定理 B V および W が次の (i) および (ii) をみたすとき

$$\Sigma : [S(V), S(W)]_G \longrightarrow [S(V \oplus \mathbb{R}), S(W \oplus \mathbb{R})]_G$$

は (加群の) 全型である。

- (i) $\dim V = \dim W$ 。
- (ii) $(H) \in \text{Iso}(S(V))$ に対して $\dim V^H = \dim W^H$ で、
 $\dim V^G \geq 2$ 。

これらの定理は次の補題から得られる。

補題 I G -写像 $f : S(V \oplus \mathbb{R}) \longrightarrow S(W \oplus \mathbb{R})$, V および W が次の条件 (i) ~ (iv) をみたしているとする。

- (i) $\dim V = \dim W$ 。
- (ii) $(H) \in \text{Iso}(S(V))$ に対して $\dim V^H = \dim W^H$ で、
 $H \neq G$ のとき $\dim V^H \geq 2$ 。
- (iii) $f(0, 1) = (0, 1)$ かつ $f(0, -1) = (0, -1)$, ここで $0 \in V$ or W , $\pm 1 \in \mathbb{R}$ 。
- (iv) $\dim V^G = 1$ ならば $\deg f^G = 0$ or ± 1 。

このとき $S(V)$ から $S(W)$ への G -写像 g で、 Σg が f と G -ホモトピックになるものが存在する。

補題 1 は以下の命題，補題により証明される。

命題 2 各 $(H) \in \text{Iso}(S(V))$ に対して $\dim S(V)^H \leq \dim S(W)^H$ であれば $S(V)$ から $S(W)$ への G -写像が存在する。

X をコンパクト G -多様体， $Y = S(W \oplus \mathbb{R})$ としよう。 $i = 1, 2$ に対して f_i が X から Y への G -写像であるとき， $d(f_1, f_2)$ を

$$d(f_1, f_2) = \sup \{ \|f_1(x) - f_2(x)\| : x \in X \}$$

で定める。

命題 3 $d(f_1, f_2) < 2$ ならば f_1 と f_2 は G -ホモトピーである。

さて X の各連結成分の次元は相等しく， X^H の各連結成分の次元も相等しいものとしよう。それによつて $\dim X$ および $\dim X^H$ がおのおの定められているとする。

補題 4 X および Y が条件 (a), (b) をみたすとする。

(a) $\dim X = \dim Y$ 。

(b) $(H) \in \text{Iso}(X)$ について $\dim X^H = \dim Y^H$ 。

X から Y への G -写像 f が $f(\partial X) \neq (0, \pm 1)$ をみたすとき、任意の $\delta > 0$ に対して次の (i), (ii) および (iii) をみたす G -写像 $f_\delta : X \rightarrow Y$ が存在する。

- (i) $f_\delta^{-1}((0, \pm 1))$ は有限集合。
- (ii) $d(f_\delta, f) < \delta$ かつ f_δ は f に G -ホモトピック。
- (iii) $f_\delta|_{\partial X} = f|_{\partial X}$ 。

系 5 補題 1 の f は $f^{-1}((0, \pm 1))$ が有限集合である G -写像 $\tilde{f} : S(V \oplus \mathbb{R}) \rightarrow S(W \oplus \mathbb{R})$ に G -ホモトピックである。

参考文献

- [1] C.N.Lee and A.G.Wasserman, On the groups $JO(G)$, *Memorirs of the American Mathematical society* 159 (1975).
- [2] A.Meyerhoff and T.Petrie, Quasi equivalence of G -modules, *Topology* 15 (1976).
- [3] R.L.Rubinsztein, On the equivariant homotopy of spheres, *Dissertations Math. (Rozprawy Mat.)* 134 (1976).