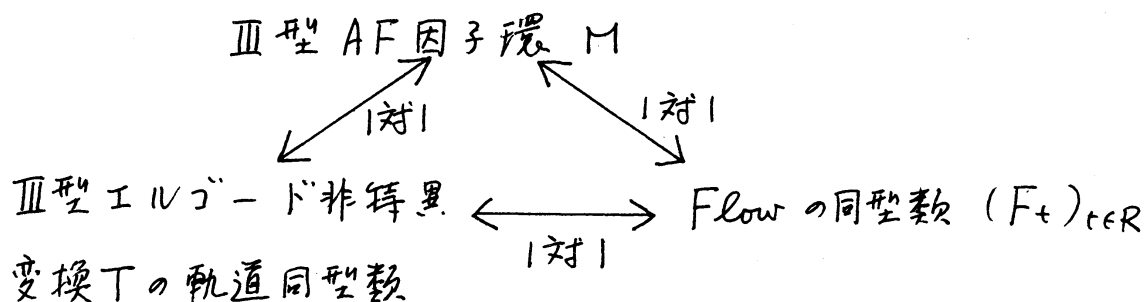


エルゴード変換と指数理論

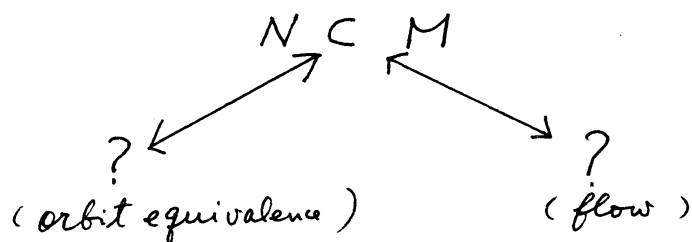
九大教養 浜地敏弘 (Toshihiro Hamachi)

Ⅲ型の AF 因子環の分類は、



によって、完全に決定されていることが知られている。

では部分因子環 $N \subset M$ の分類について、flow レベルと orbit equivalence のレベルでは、各々何が起きるだろうか？



flow レベルについては、幸崎氏の報告を見て貰うことにして、ここでは orbit equivalence のレベルについて報告する。なおこれは、幸崎氏との共同の仕事で論文は現在タイプ中である。

§1 Orbital factor map.

ある測度空間に作用しているエルゴード非特異可算変換群の対に対して、一方から他方への埋め込みなるものを旨く定義することにより、factor M , subfactor $N \subset M$ を作る事が出来る。

定義を述べる前に例を知っておいた方が、理解の手助けになるので2つ例を紹介する。

Ex.1 $0 < \lambda < 1$.

$$(X, \mathcal{B}_X, \mu_X) = \prod_{i=1}^{\infty} (\{0, 1\}, \mathcal{B}(\{0, 1\}), m_{\lambda})$$

$$(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y) = \prod_{i=2}^{\infty} (\{0, 1\}, \mathcal{B}(\{0, 1\}), m_{\lambda})$$

$$m_{\lambda}(0) = 1/(1+\lambda), \quad m_{\lambda}(1) = \lambda/(1+\lambda)$$

$$\pi: (\omega_1, \omega_2, \dots) \in X \longmapsto (\omega_2, \omega_3, \dots) \in Y$$

$$\mathbb{F} = \pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$$

と置く。

$$g_{i,j}(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots) = (\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots) \\ i, j \geq 1$$

$$h_{i,j}(\omega_2, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots) = (\omega_2, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots) \\ i, j \geq 2.$$

と置く。

$$G_X = g_{i,j}, \quad i, j \geq 1, \quad \text{より生成される群.}$$

$\sigma_j = g_{i,j}$, $i, j \geq 2$, は生成元群

$G_Y = h_{i,j}$, $i, j \geq 2$, は生成元群.

Ex. 2. $0 < \lambda < 1$.

$$(Y, B_Y, \mu_Y) = \prod_{i=1}^{\infty} (\{0,1\}, B(\{0,1\}), m_{\lambda})$$

$$(X, B_X, \mu_X) = (Y, B_Y, \mu_Y) \times (\{0,1\}, B(\{0,1\}), m)$$

$$m(0) = m(1) = 1/2.$$

$$m_{\lambda}(0) = 1/(1+\lambda), \quad m_{\lambda}(1) = \lambda/(1+\lambda)$$

$$T(y_1, y_2, \dots) = (y_1, y_2, \dots) + (1, 0, 0, \dots) \quad (\text{右へ繰り上がり})$$

$$\forall (y_1, y_2, \dots) \in Y.$$

$$\hat{T}(y, \varepsilon) = (Ty, \varepsilon + n(T, y) \pmod{2})$$

$$, \forall (y, \varepsilon) \in X,$$

$$\therefore \text{ " } \frac{d\mu_Y T}{d\mu_Y}(y) = \lambda^{n(T,y)}$$

$$\pi(y, \varepsilon) = y$$

$$\Pi = \pi^{-1}(B_Y)$$

$$G_X = \sigma = \{\hat{T}^n; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$G_Y = \{T^n; n \in \mathbb{Z}\}.$$

さて、以上の例を念頭に置いて、今 G_X, G_Y エルベール空間 (X, B_X, μ_X) , (Y, B_Y, μ_Y) に作用する可算エルゴード非特異変換群とする。

定義 有限対1の可測写像 $\pi: X \rightarrow Y$ に対して次の5条件を満たす部分群 $\mathcal{G} \subset [G_X]$ (G_X の充足群)が存在するとき、 π は orbital factor map と言う。

- (a) $\text{Orb}_{\mathcal{G}}(x) \cap \pi^{-1}(\pi(x)) = \{x\}$, $\forall x \in X$
- (b) $\mu_X(\pi^{-1}(E)) = \mu_Y(E)$, $\forall E \in \mathcal{B}_Y$
- (c) $\mathcal{G}(\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)) = \pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$, $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{G}$
- (d) $\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$ によって X の quotient space X_{π} を作り、 $\mathcal{G}$ の X_{π} への作用を $\mathcal{G}_{\pi}$ と書くと、 $\mathcal{G}_{\pi}$ は G_Y と π の下で orbit equivalent になる。

(e) $\frac{d\mu_X \circ \mathcal{G}}{d\mu_X}$ は $\pi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$ -可測, $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{G}$ 。

EX.1, 2の例がこれらの条件を満たしていることを check したい。

なお条件 (e) は、条件付確率の言葉で次のように言い換えることができる。($P_{\mathcal{G}}(\cdot)$) $\mathcal{G} \in \mathcal{G}$ を測度の標準系, 即ち,

$$\mu_X(E \cap \pi^{-1}(F)) = \int_F P_{\mathcal{G}}(E) d\mu_Y(y),$$

$\forall E \in \mathcal{B}_X, \forall F \in \mathcal{B}_Y$

とすると、条件 (e) は条件

$$(e') \quad P_{\pi(x)}(u) = P_{\pi(g^{-1}x)}(g^{-1}u), \quad \text{a.e. } x \in X, \quad \underbrace{\forall u: \pi(u) = \pi(x)}_{\forall \mathcal{G} \in \mathcal{G}}$$

と同値である。

§2 orbital factor map と Krieger factor

R_X は同値関係.

$$u \sim_{R_X} v \iff u \in \text{Orb}_{G_X}(v)$$

と可なり。同様にして R_Y は G_Y の作用による同値関係と可なり。

R_X の部分同値関係 S_X は

$$u \sim_{S_X} v \iff u \in \text{Orb}_{G_Y}(v)$$

と定めよう。

粗く言って、 R_X から作られる Krieger factor $W^*(R_X)$ は、左測度

$$d(\mu_X)_e(u, v) = d\mu_X(v), \quad \forall (u, v) \in R_X$$

による $L^2(R_X, (\mu_X)_e)$ の上に作用する convolution op. L_f ,
但し $f \in L^\infty(R_X)$ はある "良-条件" を満たす関数,

$$L_f \xi(u, v) = \sum_{\substack{w \sim v \\ R_X}} f(u, w) \xi(w, v)$$

から生成される factor のことである。詳しくは J. Feldmann
and C. Moore Trans. A.M.S. 234 (1977), 234 (1977) を見らう。

$M = W^*(R_X)$ とおく。 subfactor $N \subset M$ を次のように
定める:

$$N = \{ L_f \in M; \text{supp } f \subset S_X, \exists \tilde{f} \in L^\infty(R_Y) \text{ s.t.} \\ f(u, v) = \tilde{f}(\pi(u), \pi(v)) \}.$$

M 上の state ψ は

$$\psi(\cdot) = (\cdot | X_D | X_D)$$

とす。 $\therefore D = \{ (u, u) ; u \in X \} \subset R_X$ 。

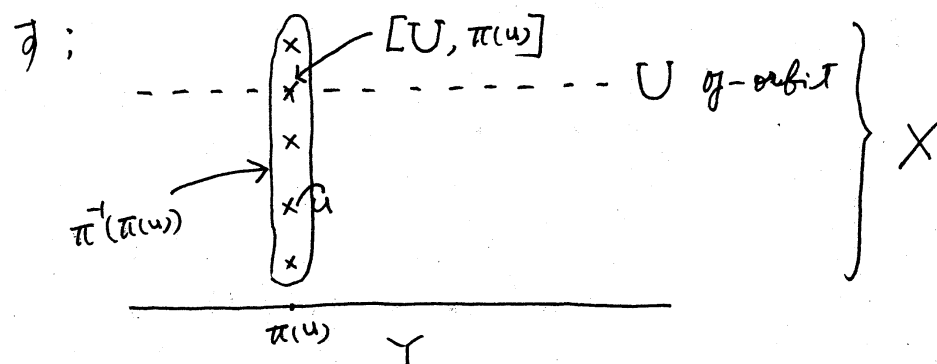
ψ を preserve する Γ から N への条件付期待値 E_N が存在することが分かり、実際それは次で与えられる；

$$E_N(L_f) = L_g, \quad \forall L_f \in \Gamma$$

$$g(u, v) = \chi_{\mathcal{L}_X}(u, v) \sum_{\substack{U \\ \pi(u) \in \pi(U)}} P(U) f([U, \pi(u)], [U, \pi(v)]).$$

$\therefore U$ は g -orbit を表し、 $P(U)$ は π -fibre と。

U の交点 z の条件付確率の値 $P_{\pi(z)}(z)$ を表し、これは z のとり方に依る。 $[U, \pi(u)]$ は次の図中の点を表す；



従って、Jones projection e_N は、

$$(e_N f)(u, v) = \chi_{\mathcal{L}_X}(u, v) \sum_{\substack{U \\ \pi(u) \in \pi(U)}} P(U) f([U, \pi(u)], [U, \pi(v)])$$

$$, \quad \forall f \in L^2(R_X, (\mu_X)_\theta)$$

以上の準備の下に、条件付期待値 E_N に依存する^{幸い} 指数 $\text{Index } E_N$ 理論を築き上げ、エルゴード理論のデータを詳しく記述することが期待される。

§3 主要の結果.

指数公式、基本拡大 $\langle M, e_N \rangle$ をエングート理論のデータを用いて、非常に具体的に書き下すことが出来る。

$$X_1 = \{ (u, U) : u \in X, U \text{ は } \sigma\text{-orbit で } U \subset \text{Orb}_{G_X}(u) \}$$

$$d\mu_{X_1}(u, U) = \frac{1}{p(U)} d\mu_X(u)$$

とおく。 X_1 の新しい同値関係を

$$(u, U) \underset{R_{X_1}}{\sim} (v, V) \iff \pi(U) = \pi(V)$$

$$(u, U) \underset{S_{X_1}}{\sim} (v, V) \iff U = V$$

と可る。

$$\pi_1 : (u, U) \in X_1 \longmapsto u \in X$$

とおく。

$L^2(R_{X_1}, (H_{X_1})_L)$ の上の convolution op. を $\tilde{f}$ に L_F^1 と書く。 $L_F^1 \in W^*(R_{X_1})$ に対して

$$(\rho_F \tilde{f})(u, \Delta) = \sum_{\substack{(v, V) \underset{R_{X_1}}{\sim} (u, U_\Delta)}} \sqrt{\frac{p(V)}{p(U_\Delta)}} F((u, U_\Delta), (v, V)) \tilde{f}(v, [V, \pi(V)])$$

, $\forall \tilde{f} \in L^2(R_{X_1}, (H_{X_1})_L)$

とく。 Δ は Δ を含む σ -orbit。

定理 (1) $\langle M, e_N \rangle = \{ \rho_F : L_F^1 \in W^*(R_{X_1}) \}$. かつ

$$\rho_F \in \langle M, e_N \rangle \longmapsto L_F^1 \in W^*(R_{X_1}) \text{ は } \langle M, e_N \rangle \text{ の}$$

standard representation である。

$$(2) \text{ Index } E_N = \sum_{i=1}^l K_i L_i / \mu_X(F_i)$$

$\therefore \tau \{ F_i : 1 \leq i \leq l \}$ は σ -ergodic components τ .

K_i は $\pi: F_i \rightarrow Y$ が K_i 対 1 を意味し, L_i は $u \in F_i$ に対し $F_i \cap \text{Orb}_{G_X}(u)$ の中の σ -orbits の個数を表す。

(3) $E_0: M \rightarrow N$ は minimum index を attain する場合の conditional expectation とおき。

$$\text{Index } E_0 = \left(\sum_{j=1}^l \sqrt{K_j L_j} \right)^2$$

注. (3) で実際に非整数の index E_0 を実現生ずる。