

オイラー座標系でのガリレー不変な乱流理論

東大 生研 吉澤 徹

§1. はじめに

平均流を支配する $N-S$ 方程式に現われるレイノルズ応力を決定することは、乱流の統計理論に課せられた主要な課題である。与えられた任意の平均流とレイノルズ応力の間に何らかの関係を見い出すことができれば、我々は平均流に対する $N-S$ 方程式を閉じることができる。この目的のためには、平均流の上に集った小さな乱れ（渦）の統計量、とくに速度相関を知る事が重要になる。¹⁻³⁾ この小さな乱れの統計を支配するエネルギー・カスケード過程は、平均流および大きな乱れによる流れの効果から無縁でなければならぬ。すなわち、ガリレー不変でなければならぬ。この目的のためには、まず通常のオイラー座標系における理論が何故破綻をきたすかを示し、次にこの考察に基づいてガリレー不変な2つの物理量を見い出し、理論を構成する。

§2. ガリレー不変な物理量

$N-S$ 方程式は波数 (k) 空間で

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{\alpha}(k; t) + \nu k^2 u^{\alpha}(k; t) = i M^{\alpha\alpha\alpha}(k) \int_p \int_q u^{\alpha}(p; t) u^{\alpha}(q; t), \quad (1)$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^3 d k^{\alpha}, \\ \int_p \int_q &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-p-q) \prod_{\alpha=1}^3 d p^{\alpha} \prod_{\alpha=1}^3 d q^{\alpha}, \\ M^{\alpha\beta\gamma}(k) &= \frac{i}{2} (k^{\gamma} D^{\alpha\beta}(k) + k^{\beta} D^{\alpha\gamma}(k)), \\ D^{\alpha\beta}(k) &= \delta^{\alpha\beta} - \frac{k^{\alpha} k^{\beta}}{k^2}. \end{aligned}$$

また、(1) に対する応答方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{G}^{\alpha\beta}(k; t, t') + \nu k^2 \hat{G}^{\alpha\beta}(k; t, t') \\ = 2 i M^{\alpha\alpha\alpha}(k) \int_p \int_q u^{\alpha}(p; t) \hat{G}^{\alpha\beta}(q; t, t') \\ + D^{\alpha\beta}(k) \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (2)$$

(1), (2) より大きな渦、すなわち小さな波数から流れ、効果は 2 時間速度積。応答に対して次のように書ける：⁴⁾

$$\begin{aligned} u^{\alpha}(k; t) u^{\beta}(-k; t'), \hat{G}^{\alpha\beta}(k; t, t') \\ \propto \exp(i k^{\alpha} \bar{\sigma}^{\alpha}(t-t')), \\ \bar{\sigma}^{\alpha} = \int_{p < K} u^{\alpha}(p; t). \end{aligned} \quad (3)$$

(3) において K は大きな渦の代表的波数であり、 $\bar{\sigma}^{\alpha}$ は大きな渦による対流速度である。乱流エネルギーの大部分が大きな渦に含まれていることより

$$\bar{\sigma}^{\alpha} \sim \int_p u^{\alpha}(p; t).$$

(3) より分かるように、オイラー座標系では2時間速度相関、応答を用いるかぎり流れの効果すなわち ∂^α を除くことはできない。

上の考察より、ガリレー不変な乱流理論を構成するためには同時刻相関

$$\langle u^\alpha(k; t) u^\beta(k'; t) \rangle = \delta(k+k') Q^{\alpha\beta}(k; t), \quad (4)$$

を用いる。次に、流れの効果をもたない応答を見い出すために、我々は流れの効果記述する応答 $\hat{G}_c(k; t, t')$ を導入する。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{G}_c(k; t, t') + \nu k^2 \hat{G}_c(k; t, t') \\ = i k^\alpha \int_p u^\alpha(p; t) \hat{G}_c(k; t, t') + \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (5)$$

$\hat{G}_c(k; t, t')$ を用いると、流れの効果をもたない応答

$$\langle \hat{G}^{\alpha\beta}(k; t, t') \hat{G}_c(-k; t, t') \rangle = J^{\alpha\beta}(k; t, t'), \quad (6)$$

を作ることができる。本研究においては、2つのガリレー不変な物理量 $Q^{\alpha\beta}(k; t)$, $J^{\alpha\beta}(k; t, t')$ を基本量として理論を構成する。

§3. 理論の構成

ここでは理論の枠組のみを述べ、詳細は文献5, 6にゆずる。午続さを要約すると

1) (1), (2), (5) の非線型項を摂動項として解き、

$u^a(r; t)$, $\hat{q}^{ap}(r; t, t')$, $\hat{q}_c(r; t, t')$ を求める。

2) 上の解を用いて $Q^{ap}(r; t)$, $J^{ap}(r; t, t')$ を計算する。

(例) $Q^{ap}(r; t) = Q_{\text{L}}^{ap}(r; t) + \dots$ (Q_{L}^{ap} は線型項からの寄与を表わす)

3) 等方性 (例) $Q^{ap}(r; t) = Q^{ap}(r) Q(r; t)$ を仮定し、

$Q(r; t)$, $J(r; t, t')$ に対する支配方程式を作る。

(例) $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\nu r^2) Q(r; t) = (Q_c, J_c \text{ の汎関数})$

4) の I 定式化の適用、すなわち Q_c, J_c を Q, J で表わし、上式の右辺に代入し最低次を残す ($J(r; t, t')$ に対する方程式に於いても同様)。⁷⁾ このようにして得られた2つの方程式が我々の理論の基本方程式となる。

§4. 結果

上の2つの基本方程式を用いると、速度相関、スカラー(温度・温度)相関に対するコルモゴロフ則⁸⁾

$$E(r) = K_0 \epsilon^{2/3} r^{-5/3},$$

$$\Theta(r) = \beta \chi \epsilon^{-1/3} r^{-5/3},$$

を導くことができる (ϵ, χ はそれぞれ乱流エネルギー、2果スカラーの散逸割合である)。 K_0, β はいわゆるコルモゴロフ定数である。本方法から得られた K_0, β は、Kraichnan のラグランジャン定式化、^{9,10)} 著者のガリレー変換法^{11,12)} に

より得られた結果と共に下表に与えられている。

Table. Comparison of theoretical and experimental values of K_0 and β .

	K_0	β
Present formalism	1.28	0.58
Lagrangian formalism ^{9,10)}	1.77	0.21
Galilean-transformation approach ^{11,12)}	1.48	0.83
Experiments	~ 1.5	~ 0.7

実験との比較は、著者の方法とはとにかくかなりよい結果を与えていることを示している。

本理論は任意の平均流をもつ非一様乱流へ適用することができる。得られた結果（例えばレイノルズ応力）は著者の前の方から求められたもの^{1,2)} とほとんど同一であることが示される。

文 献

- 1) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 46 (1979) 669.
- 2) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 47 (1979) 1665.
- 3) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980) 647.
- 4) A. Yoshizawa and M. Sakiyama: J. Phys. Soc. Jpn. 44 (1978) 1977.
- 5) A. Yoshizawa: submitted to J. Phys. Soc. Jpn. (1980).
- 6) A. Yoshizawa and M. Sakiyama: submitted to J. Phys. Soc.

Jpn.

- 7) R.H. Kraichnan: J. Fluid Mech. 83 (1977) 349.
- 8) A.S. Monin and A.M. Yaglom: Statistical Fluid Mechanics
(The MIT Press, Massachusetts, 1975) vol.2.
- 9) R.H. Kraichnan: Phys. Fluids 9 (1966) 1728.
- 10) R.H. Kraichnan: Phys. Fluids 11 (1968) 945.
- 11) A. Yoshizawa: J. Phys. Soc. Jpn. 45 (1978) 1734.
- 12) A. Yoshizawa and M. Sakiyama: J. Phys. Soc. Jpn. 48 (1980)
301.