

流体乱流の統計力学と熱力学

崇城大学工学部総合教育物理 柴田博史(Hiroshi Shibata)
Department of General Education, Faculty of Engineering,
Sojo University

1. はじめに

乱流輸送は長い研究の歴史を持つが、渦粘性係数（乱流粘性係数）に対して、正しい認識がなされてきたのはこの 10 年ぐらいに思われる[1,2]。それは、1990 年代から急速に研究が進んだラージ・エディ・シミュレーション（LES）の枠組みで、乱流輸送係数、つまり、乱流拡散係数、乱流粘性係数、そして乱流熱伝導率が、統一的に捉えられる様になったからである[3,4]。

この論文において、LES の枠組みで、乱流輸送係数を統一的に取り上げ、その乱流輸送係数を統計力学的に表現する。その統計力学的表現が成立する理由は、十分発達した乱流の速度分布関数が、近似的に速度のガウシアンになるからに他ならない。この乱流の速度分布関数は、あたかも、気体を構成する分子の速度分布関数、つまり、Maxwell の分布関数と同じ形をしている。

そこで、ナビエ・ストークス方程式の分子粘性係数が、分子運動を記述する Maxwell の分布関数から与えられた様に、空間的に粗視化されたナビエ・ストークス方程式の渦粘性係数が、乱流運動を記述するガウス分布関数を基に与えられる[5]。この様子を表にしてみると、次の様になる。

スケール	ミクロ	マクロ	スーパーマクロ
方程式	分子運動を記述する 方程式 $m \frac{du_0}{dt} = f$	ナビエ・ストークス 方程式 $\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + (u \cdot \nabla) u \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu_0 \nabla^2 u \end{aligned}$	空間粗視化された ナビエ・ストークス 方程式 $\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} \\ = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \nabla P + \nu_t \nabla^2 \tilde{u} \end{aligned}$
粘性係数		$u_0 \rightarrow \nu_0(u_0)$	$u \rightarrow \nu_t(u)$
分布関数	$P_B(u_0) = B \exp \left[-\frac{m \sum_{i=1}^n u_{0i}^2}{2k_B T} \right]$	$P(u) = A \exp \left[-\frac{m \sum_{i=1}^N u_i^2}{2k_B T} \right]$	

表 1

表 1 において、ミクロなスケールにおける分子運動を記述する方程式が存在し、その速度分布関数 P_B は、分子の速度 u_0 を用いて、

$$P_B(u_0) = B \exp \left[-\frac{m \sum_{i=1}^n u_{0i}^2}{2k_B T} \right] \quad (1)$$

の様に与えられる。マクロなスケールの流体運動を記述する記述するナビエ・ストークス方程式は、乱流が発達すると、流体速度 u の分布関数を、

$$P(u) = A \exp \left[-\frac{m \sum_{i=1}^N u_i^2}{2k_B T} \right] \quad (2)$$

の様に与える。

マクロなスケールの流体の運動は、ナビエ・ストークス方程式によって与えられるが、ナビエ・ストークス方程式を構成する粘性項の分子粘性係数 ν_0 は、流体を構成する分子の運動によって与えられ、 ν_0 に対する Helfand の公式が存在する[6,7]。つまり、分子粘性係数 ν_0 は、分子の速度 u_0 を用いて書き表される。これが、従来の非平衡統計力学である。

マクロなスケールよりさらに大きなスーパーマクロなスケールの流体のかたまりの運動は、空間粗視化されたナビエ・ストークス方程式によって記述される。この論文は、この空間粗視化されたナビエ・ストークス方程式を構成する渦粘性項の渦粘性係数 ν_t は、乱流が十分発達すれば、ナビエ・ストークス方程式で記述される速度 u を用いて、分子粘性係数 ν_0 と同じ様に、統計力学的に書き表すことができることを主張する。さらに、その統計力学と整合性を持つ熱力学が、乱流に対して展開できることを主張する。その根拠は、乱流の速度に対する分布関数が、近似的に式(2)の様に表現されることにある。これを、ここで、Gas-Turbulence Analogy (気体-乱流アナロジー)と呼ぶ。

この論文は、次の様に構成される。2 節では、乱流輸送係数を、圧縮性乱流に対する LES の枠組みで捉える。3 節では、気体-乱流アナロジーについて触れ、乱流の熱力学を展開する。さらに、それに基づき乱流輸送係数に対する統計力学を述べる。結語は、4 節で述べる。

2. 乱流輸送係数と LES

この節では、乱流輸送係数、つまり、乱流自己拡散係数、乱流粘性係数（渦粘性係数）、そして乱流熱伝導率が、ラージ・エディ・シミュレーション（LES）の枠組みで、どの様に記述されるかを述べる[3,4]。

まず、圧縮性乱流に対する輸送方程式を書くと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0 \quad (3)$$

のようになる。ここで、

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{pmatrix} \quad (4)$$

である。 ρ , ρu_1 , ρu_2 , ρu_3 , そして ρe は, 流体の密度, 運動量の 1 成分, 2 成分, 3 成分, そして全エネルギーである。ここで, 全エネルギー ρe は,

$$\rho e = \rho c_v T + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \quad (5)$$

である。フラックス f_1 , f_2 , そして f_3 は,

$$f_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_1 + p \delta_{i1} - 2\mu A_{i1} \\ \rho u_i u_2 + p \delta_{i2} - 2\mu A_{i2} \\ \rho u_i u_3 + p \delta_{i3} - 2\mu A_{i3} \\ (\rho e + p) u_i - 2\mu u_j A_{ij} - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (6)$$

の様に書くことができる。ここで,

$$\lambda = \rho c_p \kappa \quad (7)$$

は, 熱伝導率で, κ は熱拡散係数である。ここで, A_{ij} は,

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \delta_{ij} \right] \quad (8)$$

で与えられる。 μ は, 分子粘性係数である。また, 分子プラントル数 Pr は,

$$Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa} \quad (9)$$

の様に定義され,

$$\frac{\nu}{\kappa} = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad (10)$$

である。式(3)を長さ L にわたって空間粗視化すると,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = 0 \quad (11)$$

を得る。ここで,

$$U = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_1 \\ \bar{\rho} \tilde{u}_2 \\ \bar{\rho} \tilde{u}_3 \\ \bar{\rho} \tilde{e} \end{pmatrix} \quad (12)$$

である。ここで, $\bar{\phi}$ は,

$$\bar{\phi} \equiv \int d\vec{r}_1 G(\vec{r} - \vec{r}_1) \phi(\vec{r}_1, t) \quad (13)$$

であり, $\tilde{\phi}$ は,

$$\tilde{\phi} \equiv \frac{\bar{\rho} \phi}{\bar{\rho}} \quad (14)$$

で定義される。ここで, $G(\vec{r})$ は, 長さ L にわたって空間粗視化するときの積分の核である。ベクトル F_i は,

$$F_i = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \tilde{u}_i \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_1 + \varpi \delta_{i1} - \tau_{i1} - \overline{2\mu A_{i1}} \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_2 + \varpi \delta_{i2} - \tau_{i2} - \overline{2\mu A_{i2}} \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_3 + \varpi \delta_{i3} - \tau_{i3} - \overline{2\mu A_{i3}} \\ (\overline{\rho} \tilde{e} + \varpi) \tilde{u}_i - Q_i \end{pmatrix} \quad (15)$$

であり,

$$\overline{\rho} \tilde{e} = \overline{\rho} c_v \tilde{T} + \frac{1}{2} \overline{\rho} (\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) - \frac{1}{2} \Gamma_{ii} \quad (16)$$

である。ここで,

$$\varpi = \overline{p} - \frac{1}{3} \Gamma_{ii}, \quad (17)$$

$$\Gamma_{ij} = -\overline{\rho u_i u_j} + \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j, \quad (18)$$

$$\tau_{ij} = \Gamma_{ij} - \frac{1}{3} \Gamma_{ii} \delta_{ij}, \quad (19)$$

および,

$$Q_i = -\overline{(\rho e + p) u_i} + (\overline{\rho} \tilde{e} + \varpi) \tilde{u}_i \quad (20)$$

である。ここで, 乱流粘性係数 ν_t と乱流ブランドル数 Pr_t を,

$$\tau_{ij} \cong \overline{\rho} \nu_t \tilde{A}_{ij}, \quad (21)$$

および,

$$Q_i \cong \overline{\rho} c_p \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \quad (22)$$

という近似のもとに, 導入する。ここで, ϑ は,

$$\vartheta \equiv \tilde{T} - \frac{1}{2c_v \overline{\rho}} \Gamma_{ii} \quad (23)$$

の様に定義される。すると, 式(15)は,

$$F_i = \begin{pmatrix} \overline{\rho} \tilde{u}_i \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_1 + \varpi \delta_{i1} - 2(\overline{\mu} + \overline{\rho} \nu_t) \tilde{A}_{i1} \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_2 + \varpi \delta_{i2} - 2(\overline{\mu} + \overline{\rho} \nu_t) \tilde{A}_{i2} \\ \overline{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_3 + \varpi \delta_{i3} - 2(\overline{\mu} + \overline{\rho} \nu_t) \tilde{A}_{i3} \\ (\overline{\rho} \tilde{e} + \varpi) \tilde{u}_i - 2\overline{\mu} \tilde{A}_{ji} \tilde{u}_j - [\overline{\lambda} + \overline{\rho} c_p \frac{\nu_t}{Pr_t}] \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (24)$$

の書き下すことができる。乱流ブランドル数 Pr_t は, 乱流熱拡散係数 κ_t と,

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\kappa_t} \quad (25)$$

の関係にある。式(24)において, $\overline{\mu} + \overline{\rho} \nu_t$ と $\overline{\lambda} + \overline{\rho} c_p \frac{\nu_t}{Pr_t}$ を改めて, μ_t と λ_t と書く。すると, 式(11)は式(3)と同じ形で書き表される。つまり, 式(24)は,

$$F_i = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{u}_i \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_1 + \varpi \delta_{i1} - 2\mu_t \tilde{A}_{i1} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_2 + \varpi \delta_{i2} - 2\mu_t \tilde{A}_{i2} \\ \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_3 + \varpi \delta_{i3} - 2\mu_t \tilde{A}_{i3} \\ (\bar{\rho} \tilde{e} + \varpi) \tilde{u}_i - 2\bar{\mu} \tilde{A}_{ji} \tilde{u}_j - \lambda_t \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (26)$$

と書き表され、式(6)と比較してみると、同じ形になっていることがわかる。ここで、 μ_t と λ_t を、Helfand による μ と λ の統計力学的表式のように書き表すことが、この論文の主題である。また、気体の熱力学と同じ形式の熱力学が圧縮性乱流において展開される。

3. 流体乱流の統計力学と熱力学

この節では、圧縮性乱流において熱力学が成立することを、気体分子の運動と圧縮性乱流の運動との対応を示しながら説明する。

乱流状態の流れの中で、一辺の長さ L 、体積 $V (= L^3)$ の立方体を考え、その乱流輸送を取り上げる。この立方体を、長さコルモゴロフ長 l_K 、体積 $V_K (= l_K^3)$ の立方体で区切る。その様子を図1に表す。

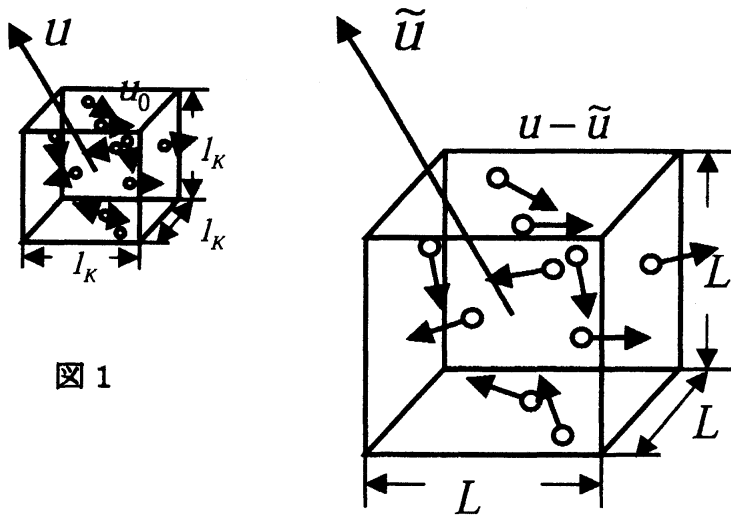


図 1

式(6)と(26)に現れる熱力学量の対応表を書く。

表 2

	気体	乱流
温度	T	$\vartheta (= \tilde{T} - \frac{1}{2c_v \bar{\rho}} \Gamma_{ii})$
粒子速度	u_0	$u' (= u - \tilde{u})$

熱力学と統計力学 をつなぐ定数	k_B ボルツマン定数	k 乱流ボルツマン定数
	$P_B(u_0)$	$P(u')$
粒子速度の	$= A_B \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^n p_{0i}^2}{2mk_B T} \right] = A \exp \left[-\frac{\sum_{i=1}^N p_i'^2}{2mk \vartheta} \right]$	
分布関数	$(p_0 = mu_0)$	$(p' = mu')$
熱力学的エン トロピー	$S(u_0) = k_B \ln W_B(u_0)$	$S(u') = k \ln W(u')$
等重率の原理	$P_B(u_0) W_B(u_0) = 1$	$P(u') W(u') = 1$
圧力	p	$\varpi (= \bar{p} - \frac{1}{3} \Gamma_{ })$
粒子数	n	$N (= \left(\frac{L}{l_K} \right)^3)$
熱力学的関係	$pV_K = nk_B T$	$\varpi V = Nk \vartheta$
熱力学的 エネルギー	$E(u_0) = TS(u_0)$	$E(u') = \vartheta S(u')$

ここで、乱流における熱力学的関係式、

$$\varpi V = Nk \vartheta \quad (27)$$

を簡潔に証明する[8]。

Fermi 粒子でも Bose 粒子でも、密度が十分小さく、温度が十分高く、熱運動に対する平均的な de Broglie 波長が粒子の平均距離に比べて短いときには、Fermi-Dirac 統計、

$$\bar{N}_\nu = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_\nu - \mu) / k \vartheta] + 1}, \quad (28)$$

と、Bose-Einstein 統計、

$$\bar{N}_\nu = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_\nu - \mu) / k \vartheta] - 1}, \quad (29)$$

は、ともに、

$$\bar{N}_\nu = \exp[(\mu - \varepsilon_\nu) / k \vartheta] \quad (30)$$

となる。化学ポテンシャル μ は、規格化条件、

$$\sum_{v=1}^N \bar{N}_v = N, \quad (31)$$

あるいは,

$$N \exp[-\mu / k\vartheta] = \sum_{v=1}^N \exp[-\varepsilon_v / k\vartheta] \quad (32)$$

より求めることができる。運動量 P_x , P_y , そして P_z を持つ状態の運動エネルギー ε は,

$$\varepsilon = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) \quad (33)$$

であるが, P_x と $P_x + dP_x$, P_y と $P_y + dP_y$, そして P_z と $P_z + dP_z$ の間の運動量を持って, 体積 V の立方体の中を, 往復する古典的な運動に, 対応する量子状態の数は,

$$\frac{V}{h^3} dP_x dP_y dP_z \quad (34)$$

であるから, P_x , P_y , P_z , の付近の $dP_x dP_y dP_z$ の範囲に運動量を持つ粒子数の平均として, 式(32)は,

$$\begin{aligned} & \bar{N}(P_x, P_y, P_z) dP_x dP_y dP_z \\ &= \frac{V}{h^3} \exp\left[\frac{1}{k\vartheta} \left\{ \mu - \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) \right\}\right] dP_x dP_y dP_z \end{aligned} \quad (35)$$

を与える。ここに, μ は, 式(32)より,

$$N = \left(\frac{2\pi mk\vartheta}{h^2} \right)^{3/2} V \exp\left[\frac{\mu}{k\vartheta}\right] \quad (36)$$

を得るが, これを用いて定めることができる。これを式(35)に代入すると,

$$\begin{aligned} & \bar{N}(P_x, P_y, P_z) dP_x dP_y dP_z \\ &= \frac{N}{(2\pi mk\vartheta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2mk\vartheta} (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)\right] dP_x dP_y dP_z \end{aligned} \quad (37)$$

を得る。圧力 ϖ は,

$$\varpi = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_\vartheta, \quad (38)$$

$$F = -k\vartheta \ln Z, \quad (39)$$

および,

$$Z = \frac{(2\pi mk\vartheta)^{3N/2} V^N}{h^{3N} N!} \quad (40)$$

の関係式より,

$$\varpi = Nk\vartheta / V \quad (41)$$

の関係式を満たすことがわかる。

さらに, 気体の熱力学に対する乱流の熱力学の対応に基づき, 式(26)に現れる乱流自己拡散係数 D_t , 乱流(渦)粘性係数 ν_t , そして乱流熱伝導率 λ_t を, 統計力学的に表現する。乱流輸送係数を α とすると, α は,

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \lim_{V \rightarrow \infty} \langle [G_t^{(\alpha)} - G_0^{(\alpha)}]^2 \rangle \quad (42)$$

の様に書き表され, 通常の統計力学との対応は, 表3のようになる[7]。

表 3

	気体	乱流
自己拡散係数	$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$ $G_t^{(D)} = x_i(t)$ $= \int_0^t dt' u_{0i}(t') + x_i(0)$	$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = D_t \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial x^2}$ $G_t^{(D_t)} = x_i(t)$ $= \int_0^t dt' (u_i(t') - \bar{u}_i(t')) + x_i(0)$
粘性係数	$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$ $G_t^{(\nu)}$ $= \frac{1}{\sqrt{V_k k_B T}} \sum_{i=1}^n x_i p_{iy}$ $\frac{\partial}{\partial t} \rho e = \frac{\lambda}{cc_v} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho e$	$\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} = \nu_t \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2}$ $G_t^{(\nu_t)}$ $= \frac{1}{\sqrt{V k \vartheta}} \sum_{i=1}^N x_i P_{iy}$ $\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} \bar{e} = \frac{\lambda_t}{cc_v} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\rho} \bar{e}$
熱伝導率	$= \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T$ $G_t^{(\lambda)}$ $= \frac{1}{\sqrt{V_k k_B T^2}} \sum_{i=1}^n x_i (\rho_i e_i - \langle \rho_i e_i \rangle)$	$= \lambda_t \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vartheta$ $G_t^{(\lambda_t)}$ $= \frac{1}{\sqrt{V k \vartheta^2}} \sum_{i=1}^N x_i (\bar{\rho}_i \bar{e}_i - \langle \bar{\rho}_i \bar{e}_i \rangle)$

ここで、乱流（渦）粘性係数 ν_t を例に取り、式(42)を簡潔に述べる[9,10]。乱流（渦）粘性係数 ν_t は、方程式、

$$\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t} = \nu_t \frac{\partial^2 \bar{u}_y}{\partial x^2} \quad (43)$$

の中に現れるが、境界条件、

$$\bar{u}_y(x, t | x'_0, P_{y0}) \big|_{|\bar{r}| \rightarrow \infty} = 0$$

のもと、式(43)の解は、

$$\bar{u}_y(x, t | x'_0, P_{y0}) = \frac{1}{Z_y} \exp \left[-\frac{(x - x'_0)^2}{4\nu_t t} \right] \quad (44)$$

の様に書き下すことができる。一方、運動量 $P_y(\bar{r}, t)$ に対して、分布関数、

$$f^{(1,0)}(x, P) = A \exp \left[-\frac{P^2}{2mk\theta} \right] \quad (45)$$

を仮定すると、関数、

$$I^{(v_i)}(t) \equiv \int \int dx'_0 dP'_{y0} P'_{y0} M^{(v_i)} f^{(1,0)}(x'_0, P'_{y0}), \quad (46)$$

および、

$$M^{(v_i)}_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx (x - x'_0)^2 \tilde{u}_y(x, t | x'_0, P'_{y0}) \quad (47)$$

を考へることにより、式(42)を得る。

4. 結語

乱流の統計力学と、それと整合性を持つ熱力学を、気体の統計力学、および熱力学を基に構築した。輸送方程式を空間粗視化して得られる方程式は、もとの輸送方程式と同じ形をしており、乱流輸送係数は、通常の輸送係数と同じ様に定義される。乱流の統計力学、および熱力学が、気体のそれと同じ様に成立する理由は、乱流速度の分布関数が、Maxwellの分布関数と同じ、速度のガウシアンになることに基づく。空間3次元、一様等方性乱流の速度分布関数の研究は、長い歴史を持つ[11,12]が、そのデータの積み重ねの上に、この様な統計力学、および熱力学の構築を試みた。

謝辞

この研究は、多くの人達に支えられ成り立っています。九州大学応用力学研究所及川研究室の皆さん、異友正先生、京都大学木田重雄先生、後藤晋さん、名古屋大学金田行雄先生、石原卓さん、名古屋工業大学後藤俊幸先生、中央大学中野徹先生より有益な助言をもらっております。また、九州大学福本康秀先生より、日頃より励ましをもらっています。ここに、感謝の意を表します。

References

- [1] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge Univ. Press, New York, 1995.
- [2] S. B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [3] M. Lesieur, O. Metais, and P. Comte, *Large Eddy, Simulations of Turbulence*, Cambridge Univ. Press, New York, 2005.
- [4] P. Sagaut, *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2001.
- [5] M. Toda, R. Kubo, and N. Saitô, *Statistical Physics I: Equilibrium Statistical Mechanics* 2nd ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.
- [6] E. Helfand, *Phys. Rev.* 119, 1(1960).
- [7] P. Gaspard, *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [8] R. Kubo, *Statistical Mechanics*, Kyoritsu, Tokyo, 1951. [in Japanese]
- [9] H. Shibata, *Physics A* 333, 71(2004).
- [10] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume, *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics* 2nd ed., Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
- [11] Y. KANEDA and T. ISHIHARA, *J. Turbulence* 7, N20(2006).
- [12] C. Beck, *Phys. Rev. Lett.* 98, 064502(2007).