近接する根入れ構造物相互の連成振動特性について

小堀鐸二・日下部馨

CROSS-INTERACTION BETWEEN TWO EMBEDDED STRUCTURES

By *Takuji* KOBORI and *Kaoru* KUSAKABE

Synopsis

The coupled vibration between two cylindrical structures embedded in visco-elastic soil layers of infinite horizontal extent has been studied, as the three-dimensional problem. It is assumed that the model of soil-structures has been subdivided by several horizontal planes. The formulation has been obtained by making use of the closed-form solution, based on the exact displacement functions in the horizontal direction, and the finite element method in the vertical direction. The choice of the cylindrical coordinate system, suitable for analysis of the coupling between two structures with circular cross section has led to the exact infinite series solution.

The numerical results for steady-state vibrations are shown graphically, and the effects of the coupling on the vibrational characteristics have been discussed.

1. まえがき

一般に，市街地においては，同一支持地盤上に多くの建築構造物が互いに近接して建てられているため，それらの構造物は地盤を介して動的に連成系を構成することになる。林立しているこれらの建物は静的には隣りの建物の影響を受けることはほとんどないが，一旦，地震や強風等に見舞われると周囲の建物と動的に連成し，それらの個々の建物が孤立して建っているときとは異なった振動性状を示す。このことは厳しい安全性が要求される原子炉構造物の複合建屋の場合にも問題にされるところである。そこで，このような相互連成作用の問題を明らかにするために，筆者等は近接構造物同士が互いに連成する場合の振動特性を理論および実験の両面から検討してきた[1)~7)]。一方，必ずしも筆者等と同じ観点に立つものとは限らないが，類似の研究が他の研究者によって近年行なわれるようになってきた[8)~12)]。ところで，これらの研究では，モデルを3次元的に扱かった場合でも構造物が地表面に直に接しているとしているか[1)~10)]，あるいは構造物の一部が地盤内に根入れされていても2次元問題として扱かっているかのいずれかである[11),12)]。現実の建築構造物は基礎や地下室等地盤内に埋設された部分を持ちながら隣りの建物と互いに近接して建っている場合が多いし，そうした場合がまた建物間の相互連成作用を問題としなければならないことが多いのである。本報ではその一つのステップとして，2個の近接する円筒形の根入れ部分をもつ構造物の相互連成振動を3次元問題として解析しようとする。

さて，根入れ構造物相互間の連成振動を扱かった研究としては，J. E. Luco and L. Contesseの論文[11)]を掲げることができる。彼等は，無限に長い半円筒基礎がその軸を水平にして地盤内に埋設され，その上に剪断型連続壁が接続している構造物を考え，それらが2つ平行に並ぶとして相互連成系に対する振動特性を2次元問題として扱かった。この解法の特徴は各円筒基礎の軸を原点とする局所円筒座標を設定し，Hankel関数の加法定理を用いて，弾性地盤の変位を各々の座標系で表現することにより基礎周辺の境界条件を満足させるところにある。

本報告では2つの近接する円筒形の根入れ構造物同士が連成する場合の振動特性を3次元問題として解析し，隣接の根入れ構造物が振動特性に如何なる影響を及ぼすかを明らかにするところにあるが，ここで扱かう構造物モデルは2棟の円筒構造物がそれぞれの軸を鉛直にして成層地盤内に根入れされているとする。ここで，成層地盤とは水平な剛基盤上に等質等方な粘弾性体の薄い水平層が幾重にも積み重ねられているとし，各層の地盤常数は層毎に異なっても差支えない。解析に当って，薄層地盤に有限要素法を適用する田治見の方法[13]と2つの円筒座標系に座標変換を導入して境界条件を満足させる J. E. Luco の手法[11]とを併用して，3次元問題として構造物相互連成系の運動方程式を誘導し，振動特性を数値的に解析する。まず，数値解析の信憑性を確認するため，均質な粘弾性層地盤上に自重のない1つの剛な円板を考え，それを水平方向に加振したときの振動特性（compliance）をここで用いた手法により解析し，その数値解を波動論から得られる成層地盤上の長方形基礎に対する Dynamical Ground Compliance[3]の値と比較する。ついで，連成根入れ構造物に対する振動特性の数値計算を行ない，特に根入れ効果に注目しながら，振動特性に与える隣接構造物の影響について検討を加える。

2. 運動方程式およびその解

ここでは，水平方向に無限に拡がる成層地盤内に2個の円筒構造物がその軸を鉛直にして根入れされている場合の振動特性を3次元問題として解析する。そのモデルを **Fig. 1** に示す。地盤の層厚は D で一様とし，円筒構造物の半径をそれぞれ R_I と R_{II}，根入れ深さを D_{eI}, D_{eII}，構造物間距離を D_x とする。さらに，2個の構造物およびその下の円形土柱をそれぞれ Block I, Block II とし，それらの周辺の地盤を Block O と定義する。ここで，地盤と根入れ部分を水平面で切断し，地盤—構造物モデルは L 層の薄層地盤から構成されるとする。地盤の取扱いは水平方向には波動論を，鉛直方向には有限要素法を適用する。外力は2個の構造物が並んでいる方向に水平加振力 $P_H e^{i\omega t}$ が働らくとする。

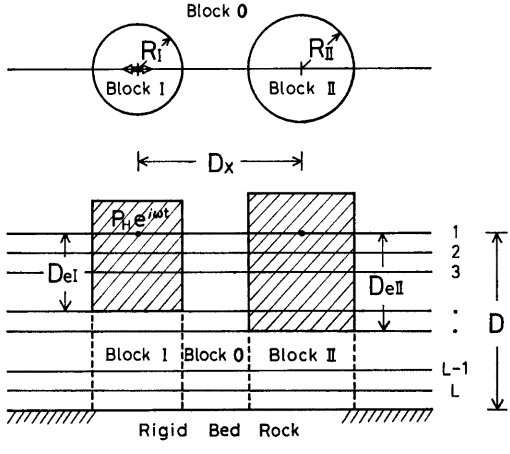


Fig. 1. Description of the model.

解析にあたり次の仮定をおく。

（1） 基礎およびその下の土柱（Block I および Block II）の水平断面は常に円形を保持する。

（2） 各層における地盤（Block O）は等質等方な粘弾性体である。

（3） 各々の薄層における変位は深さ方向に対し直線的に変化する。
（4） 基礎と周辺地盤とは常に密着しており，すべりは起こらない。
（5） 水平方向加振の場合，基礎の上下方向の振動成分を無視する。（ただし，水平軸に関する回転は起こり得る）

以上の仮定のもとに，2個の円筒構造物が互いに連成する場合の振動特性を解析する。

2.1 波動方程式

Fig. 1 に示す薄層の1つの要素に対し，円筒座標 (r, θ, z) に関する次の運動方程式を考える。

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial r}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial \theta}+2\mu\frac{\partial \tilde{\omega}_\theta}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}\\
&(\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial \Theta}{\partial \theta}-2\mu\frac{\partial \tilde{\omega}_r}{\partial z}+2\mu\frac{\partial \tilde{\omega}_z}{\partial r}=\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z}-\frac{2\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{\omega}_\theta)+\frac{2\mu}{r}\frac{\partial \tilde{\omega}_r}{\partial \theta}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (1)
$$

ここに，

λ, μ: Lamé の常数，　　$\{u_r, u_\theta, u_z\}$: $\{r, \theta, z\}$ 方向の変位

$$
\Theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad 2\tilde{\omega}_r=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}-\frac{\partial u_\theta}{\partial z}
$$

$$
2\tilde{\omega}_\theta=\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r},\quad 2\tilde{\omega}_z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \qquad \cdots\cdots (2)
$$

ここでは，2個の円筒構造物を考え，加振方向も2個の構造物の並んでいる方向としているため，解析の対象とする地盤－構造物モデルの応答は2個の円筒の軸を含む鉛直面に関して対称となる。したがって，対称性を考慮に入れると，(1) 式の変位 $\{u_r, u_\theta, u_z\}$ は下式の Fourier 級数で表わされる。

$$
\begin{aligned}
u_r&=\sum_{n=0}^{\infty} v_r{}^n \cos n\theta\, e^{i\omega t}\\
u_\theta&=\sum_{n=0}^{\infty} v_\theta{}^n \sin n\theta\, e^{i\omega t}\\
u_z&=\sum_{n=0}^{\infty} v_z{}^n \cos n\theta\, e^{i\omega t}
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (3)
$$

さらに，(1) 式の解には Hankel 関数が含まれることを考慮して，変位 $\{u_r, u_\theta, u_z\}$ の Fourier 級数の係数 $\{v_r{}^n, v_\theta{}^n, v_z{}^n\}$ を次のように置く。

$$
\begin{aligned}
v_r{}^n&=\phi^n H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r)+\psi^n H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r)\\
v_\theta{}^n&=\phi^n H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r)-\psi^n H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r)\\
v_z{}^n&=\chi^n H_n{}^{(2)}(\kappa r)
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (4)
$$

ここに，$H_n{}^{(2)}(\kappa r)$ は n 次の第2種 Hankel 関数である。

次に，**Fig. 2** に示すように各層要素の上面に1，下面に2の符号をつけ，仮定「各々の薄層における変位は深さ方向に対して直線的に変化する」をポテンシャル関数 ϕ^n, ψ^n, χ^n に適用して次式のように置き，

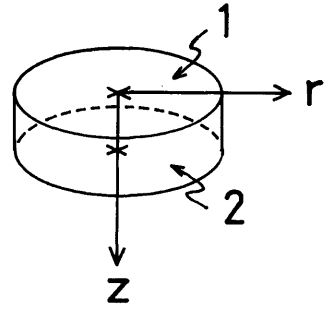


Fig. 2.

$$
\begin{aligned}
\phi^n&=\phi_1{}^n\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{H}\right)+\phi_2{}^n\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{H}\right)\\
\psi^n&=\psi_1{}^n\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{H}\right)+\psi_2{}^n\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{H}\right)\qquad -\frac{H}{2}\le z\le\frac{H}{2}\\
\chi^n&=\chi_1{}^n\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{H}\right)+\chi_2{}^n\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{H}\right)
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots (5)
$$

(1)～(5) 式から層要素の上面および下面における運動方程式を求めると下式となる[13]。

$$\{\tau_S{}^n\}_e=([A_S]^e\kappa^2+[G_S]^e-\omega^2[M_S]^e)\{\phi_S{}^n\}_e \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\{\tau_R{}^n\}_e=([A_R]^e\kappa^2+[B_R]^e\kappa+[G_R]^e-\omega^2[M_R]^e\{\phi_R{}^n\}_e \quad \cdots\cdots(7)$$

ここに,

$$[A_S]^e=\begin{bmatrix}\frac{\mu H}{3} & \frac{\mu H}{6}\\ \frac{\mu H}{6} & \frac{\mu H}{3}\end{bmatrix},\quad [G_S]^e=\begin{bmatrix}\frac{\mu}{H} & -\frac{\mu}{H}\\ -\frac{\mu}{H} & \frac{\mu}{H}\end{bmatrix},\quad [M_S]^e=\begin{bmatrix}\frac{\rho H}{3} & \frac{\rho H}{6}\\ \frac{\rho H}{6} & \frac{\rho H}{3}\end{bmatrix}$$

$$\{\tau_S{}^n\}_e=\begin{Bmatrix}\tau_{12}{}^n+\tau_{10}{}^n\\ \tau_{22}{}^n+\tau_{20}{}^n\end{Bmatrix},\quad \{\phi_S{}^n\}_e=\begin{Bmatrix}\phi_1{}^n+\psi_1{}^n\\ \phi_2{}^n+\psi_2{}^n\end{Bmatrix}$$

$$[A_R]^e=\begin{bmatrix}\frac{(\lambda+2\mu)H}{3} & 0 & \frac{(\lambda+2\mu)H}{6} & 0\\ 0 & \frac{\mu H}{3} & 0 & \frac{\mu H}{6}\\ \frac{(\lambda+2\mu)H}{6} & 0 & \frac{(\lambda+2\mu)H}{3} & 0\\ 0 & \frac{\mu H}{6} & 0 & \frac{\mu H}{3}\end{bmatrix},\quad [B_R]^e=\begin{bmatrix}0 & -\frac{\lambda-\mu}{2} & 0 & \frac{\lambda+\mu}{2}\\ -\frac{\lambda-\mu}{2} & 0 & -\frac{\lambda+\mu}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\lambda+\mu}{2} & 0 & \frac{\lambda-\mu}{2}\\ \frac{\lambda+\mu}{2} & 0 & \frac{\lambda-\mu}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$[G_R]^e=\begin{bmatrix}\frac{\mu}{H} & 0 & -\frac{\mu}{H} & 0\\ 0 & \frac{\lambda+2\mu}{H} & 0 & -\frac{\lambda+2\mu}{H}\\ -\frac{\mu}{H} & 0 & \frac{\mu}{H} & 0\\ 0 & -\frac{\lambda+2\mu}{H} & 0 & \frac{\lambda+2\mu}{H}\end{bmatrix},\quad [M_R]^e=\begin{bmatrix}\frac{\rho H}{3} & 0 & \frac{\rho H}{6} & 0\\ 0 & \frac{\rho H}{3} & 0 & \frac{\rho H}{6}\\ \frac{\rho H}{6} & 0 & \frac{\rho H}{3} & 0\\ 0 & \frac{\rho H}{6} & 0 & \frac{\rho H}{3}\end{bmatrix}$$

$$\{\tau_R{}^n\}_e=\begin{Bmatrix}\tau_{12}{}^n-\tau_{10}{}^n\\ \sigma_1{}^n\\ \tau_{22}{}^n-\tau_{20}{}^n\\ \sigma_2{}^n\end{Bmatrix},\quad \{\phi_R{}^n\}_e=\begin{Bmatrix}\phi_1{}^n-\psi_1{}^n\\ \chi_1{}^n\\ \phi_2{}^n-\psi_2{}^n\\ \chi_2{}^n\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(8)$$

および,

$$\sigma_1{}^n=-\left[\kappa\lambda(\phi^n-\psi^n)+(\lambda+2\mu)\frac{\mathrm{d}\chi^n}{\mathrm{d}z}\right]_1$$

$$\sigma_2{}^n=\left[\kappa\lambda(\phi^n-\psi^n)+(\lambda+2\mu)\frac{\mathrm{d}\chi^n}{\mathrm{d}z}\right]_2 \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\tau_{12}{}^n=-\mu\left(\frac{\mathrm{d}\phi^n}{\mathrm{d}z}-\frac{\kappa}{2}\chi^n\right)_1,\qquad \tau_{10}{}^n=-\mu\left(\frac{\mathrm{d}\psi^n}{\mathrm{d}z}+\frac{\kappa}{2}\chi^n\right)_1$$

$$\tau_{22}{}^n=\mu\left(\frac{\mathrm{d}\phi^n}{\mathrm{d}z}-\frac{\kappa}{2}\chi^n\right)_2,\qquad \tau_{20}{}^n=\mu\left(\frac{\mathrm{d}\psi^n}{\mathrm{d}z}+\frac{\kappa}{2}\chi^n\right)_2$$

各層に対する運動方程式（6）式および（7）式を地盤の系全体に拡張すると次のようになる。ただし，Block O の領域では自由表面および層要素間に外力が働らかないから外力の項 $\{\tau_S{}^n\}$ および $\{\tau_R{}^n\}$ は零となる。

$$([A_S]\kappa^2+[G_S]-\omega^2[M_S])\{\phi_S{}^n\}=\{0\} \quad \cdots\cdots(10)$$

$$([A_R]\kappa^2+[B_R]\kappa+[G_R]-\omega^2[M_R])\{\phi_R{}^n\}=\{0\} \quad \cdots\cdots(11)$$

ここに,

$$\{\phi_S{}^n\}=(\phi_1{}^n+\psi_1{}^n,\ \phi_2{}^n+\psi_2{}^n,\ldots,\ \phi_L{}^n+\psi_L{}^n)^T \quad \cdots\cdots(12)$$

$$\{\phi_R{}^n\}=(\phi_1{}^n-\psi_1{}^n,\ \chi_1{}^n,\ \phi_2{}^n-\psi_2{}^n,\ \chi_2{}^n,\ldots,\ \phi_L{}^n-\psi_L{}^n,\ \chi_L{}^n)^T$$

ただし，(12) 式の添字 1, 2,…, L は層の境界番号を示す。また，マトリックス $[A_S]$, $[G_S]$… 等は層要素のマトリックス $[A_S]^e$, $[G_S]^e$,… 等に **Fig. 3** の合成法を適用して組立てる。上の (10) 式および (11) 式が層地盤の κ に関する固有値方程式である。地盤に Voigt 型の減衰を考慮するときには，Lamé の常数 λ, μ に対する粘性常数 λ', μ' を導入し，(8) 式の λ, μ の代りに $\lambda+\lambda'\frac{\partial}{\partial t}$, $\mu+\mu'\frac{\partial}{\partial t}$，あるいは，steady-state な振動に対しては，$\lambda+i\omega\lambda'$, $\mu+i\omega\mu'$ とすればよい。(10) 式および (11) 式で得られた根のうち，この問題に適合する解は実根の場合は $\kappa>0$，複素根の場合は $\mathrm{Im}(\kappa)<0$ である。

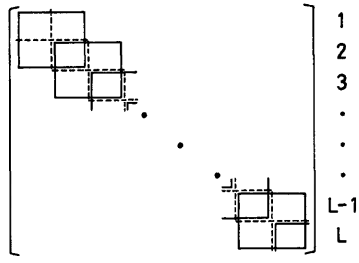


Fig. 3. Construction of coefficient matrix.

(10), (11) 式の κ に対する係数は Fourier 級数の展開の項 n に無関係なので，それらの固有値および固有ベクトルはすべての n に共通となる。

2.2 座標変換および境界条件

ここでは2つの局所円筒座標を考える。すなわち，**Fig. 1** で Block I の薄層の円筒中心を原点とする (r_I, θ_I, z_I) 座標と Block II の円筒中心を原点とする $(r_{II}, \theta_{II}, z_{II})$ 座標を導入する。すると，Block O における応力波は Block I の基礎から生ずる応力波 $\{u_{rI}(r_I, \theta_I, z_I), u_{\theta I}(r_I, \theta_I, z_I), u_{zI}(r_I, \theta_I, z_I)\}$ と Block II の基礎から生ずる応力波 $\{u_{rII}(r_{II}, \theta_{II}, z_{II}), u_{\theta II}(r_{II}, \theta_{II}, z_{II}), u_{zII}(r_{II}, \theta_{II}, z_{II})\}$ との和として表わされる。ここに，

$$u_{rI}(r_I, \theta_I, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\{\phi_I{}^nH_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_I)+\psi_I{}^nH_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_I)\}\cos n\theta_I$$

$$u_{\theta I}(r_I, \theta_I, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\{\phi_I{}^nH_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_I)-\psi_I{}^nH_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_I)\}\sin n\theta_I \quad \cdots\cdots(13)$$

$$u_{zI}(r_I, \theta_I, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\chi_I{}^nH_n{}^{(2)}(\kappa r_I)\cos n\theta_I$$

および，

$$u_{rII}(r_{II}, \theta_{II}, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\{\phi_{II}{}^nH_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})+\psi_{II}{}^nH_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})\}\cos n\theta_{II}$$

$$u_{\theta II}(r_{II}, \theta_{II}, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\{\phi_{II}{}^nH_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})-\psi_{II}{}^nH_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})\}\sin n\theta_{II} \quad \cdots\cdots(14)$$

$$u_{zII}(r_{II}, \theta_{II}, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{II}{}^nH_n{}^{(2)}(\kappa r_{II})\cos n\theta_{II}$$

$$z\equiv z_I=z_{II}$$

ところで，「基礎およびその下の土柱 (Block I および Block II) の水平断面は常に円形を保持する」という仮定から定まる各基礎周辺における境界条件を満足させるためには，それぞれ (r_I, θ_I, z_I) 座標および $(r_{II}, \theta_{II}, z_{II})$ 座標で表わされている (13) 式および (14) 式を $(r_{II}, \theta_{II}, z_{II})$ 座標および (r_I, θ_I, z_I) 座標で表現し直し，2つの基礎から出る応力波の和を同一の座標系で表わしておくことが必要となる。以下において，$H_m{}^{(2)}(\kappa r)$ および $J_m(\kappa r)$ はそれぞれ m 次の第2種 Hankel 関数および m 次の Bessel 関数であり，係数 ε_m は

$$\varepsilon_m=\begin{cases}1 & m=0\\ 2 & m\neq 0\end{cases} \quad \cdots\cdots(15)$$

を表わす。

(13) 式で表わされる $u_{rI}(r_I, \theta_I, z)$, $u_{\theta I}(r_I, \theta_I, z)$ および $u_{zI}(r_I, \theta_I, z)$ を Bessel 関数の加法定理[15] を用いて **Fig. 4** で示される X, Y, Z 成分（ただし，Z 軸は紙面に垂直）に分解，合成すると，

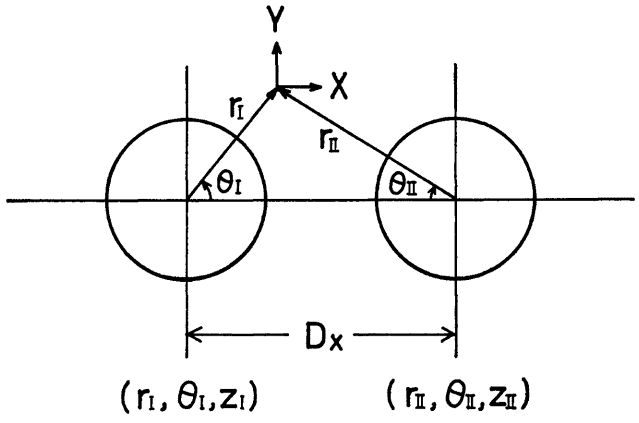


Fig. 4. Coordinate systems.

$$u_{xI}=u_{rI}\cos\theta_I-u_{\theta I}\sin\theta_I$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_I{}^n\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_I)\cos(n+1)\theta_I+\sum_{n=0}^{\infty}\psi_I{}^n\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_I)\cos(n-1)\theta_I$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_I{}^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n+1+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_m(\kappa r_{II})\cos m\theta_{II}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\psi_I{}^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n-1+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_m(\kappa r_{II})\cos m\theta_{II}\qquad(r_{II}<D_x)$$

$$u_{yI}=u_{rI}\sin\theta_I+u_{\theta I}\cos\theta_I$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_I{}^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n+1+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_m(\kappa r_{II})\sin m\theta_{II}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\psi_I{}^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n-1+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_m(\kappa r_{II})\sin m\theta_{II}\qquad(r_{II}<D_x)$$

上の u_{xI}, u_{yI} を (r_{II}, θ_{II}, z) 座標の成分に分解，合成すると，

$$u_{rI}(r_{II}, \theta_{II}, z)=-u_{xI}\cos\theta_{II}+u_{yI}\sin\theta_{II}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\phi_I{}^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n+1+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_m(\kappa r_{II})\cos(m+1)\theta_{II}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\psi_I{}^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n-1+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_m(\kappa r_{II})\cos(m-1)\theta_{II}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\phi_I{}^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_{m-1}(\kappa r_{II})\cos m\theta_{II}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\psi_I{}^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_{m+1}(\kappa r_{II})\cos m\theta_{II}$$

$$=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\phi_I{}^n\{\mathrm{H}_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_{m-1}(\kappa r_{II})+(-1)^{m+1}\mathrm{H}_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_{m+1}(\kappa r_{II})\}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\psi_I{}^n\{\mathrm{H}_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_{m+1}(\kappa r_{II})+(-1)^{m-1}\mathrm{H}_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\mathrm{J}_{m-1}(\kappa r_{II})\}\Big]\cos m\theta_{II}$$

$$=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{4}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_I{}^n-\psi_I{}^n)\{\mathrm{H}_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^m\mathrm{H}_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{\mathrm{J}_{m-1}(\kappa r_{II})-\mathrm{J}_{m+1}(\kappa r_{II})\}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_I{}^n+\psi_I{}^n)\{\mathrm{H}_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)-(-1)^m\mathrm{H}_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{\mathrm{J}_{m-1}(\kappa r_{II})+\mathrm{J}_{m+1}(\kappa r_{II})\}\Big]$$

$$\cdot\cos m\theta_{II}\cdots\cdots(16)$$

同様にして，

$$u_{\theta I}(r_{II},\theta_{II},z)=u_{XI}\sin\theta_{II}+u_{YI}\cos\theta_{II}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{4}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_I{}^n-\psi_I{}^n)\{H_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^mH_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{m-1}(\kappa r_{II})+J_{m+1}(\kappa r_{II})\}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_I{}^n+\psi_I{}^n)\{H_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)-(-1)^mH_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{m-1}(\kappa r_{II})-J_{m+1}(\kappa r_{II})\}\Big]$$
$$\cdot\sin m\theta_{II}\cdots\cdots(17)$$

$$u_{zI}(r_{II},\theta_{II},z)=\sum_{n=0}^{\infty}\chi_I{}^nH_n{}^{(2)}(\kappa r_I)\cos n\theta_I$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\chi_I{}^n\{H_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^mH_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}J_m(\kappa r_{II})\cos m\theta_{II}\cdots\cdots(18)$$

さらに，Block II から生ずる $u_{rII}(r_{II},\theta_{II},z)$, $u_{\theta II}(r_{\theta II},\theta_{II},z)$, $u_{zII}(r_{II},\theta_{II},z)$ を (r_I,θ_I,z) 座標で表わすと，

$$u_{rII}(r_I,\theta_I,z)=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{4}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_{II}{}^n-\psi_{II}{}^n)\{H_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)$$
$$+(-1)^mH_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{m-1}(\kappa r_I)-J_{m+1}(\kappa r_I)\}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_{II}{}^n+\psi_{II}{}^n)\{H_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)-(-1)^mH_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{m-1}(\kappa r_I)+J_{m+1}(\kappa r_I)\}\Big]$$
$$\cdot\cos m\theta_I\cdots\cdots(19)$$

$$u_{\theta II}(r_I,\theta_I,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{4}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_{II}{}^n-\psi_{II}{}^n)\{H_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)$$
$$+(-1)^mH_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{m-1}(\kappa r_I)+J_{m+1}(\kappa r_I)\}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_{II}{}^n+\psi_{II}{}^n)\{H_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)-(-1)^mH_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{m-1}(\kappa r_I)-J_{m+1}(\kappa r_I)\}\Big]$$
$$\cdot\sin m\theta_I\cdots\cdots(20)$$

$$u_{zII}(r_I,\theta_I,z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{II}{}^n\{H_{n+m}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^mH_{n-m}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}J_m(\kappa r_I)\cos m\theta_I$$
$$\cdots\cdots(21)$$

したがって，(13) 式および (14) 式の変位の和を (r_I,θ_I,z) 座標および (r_{II},θ_{II},z) 座標で表わすことができる。ここで，

$$u_r(r_I,\theta_I,z)=u_{rI}(r_I,\theta_I,z)+u_{rII}(r_I,\theta_I,z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}v_{rI}{}^n\cos n\theta_I$$
$$u_\theta(r_I,\theta_I,z)=u_{\theta I}(r_I,\theta_I,z)+u_{\theta II}(r_I,\theta_I,z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}v_{\theta I}{}^n\sin n\theta_I\cdots\cdots(22)$$
$$u_z(r_I,\theta_I,z)=u_{zI}(r_I,\theta_I,z)+u_{zII}(r_I,\theta_I,z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}v_{zI}{}^n\cos n\theta_I$$

および

$$u_r(r_{II},\theta_{II},z)=u_{rI}(r_{II},\theta_{II},z)+u_{rII}(r_{II},\theta_{II},z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}v_{rII}{}^n\cos n\theta_{II}$$
$$u_\theta(r_{II},\theta_{II},z)=u_{\theta I}(r_{II},\theta_{II},z)+u_{\theta II}(r_{II},\theta_{II},z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}v_{\theta II}{}^n\sin n\theta_{II}\cdots\cdots(23)$$
$$u_z(r_{II},\theta_{II},z)=u_{zI}(r_{II},\theta_{II},z)+u_{zII}(r_{II},\theta_{II},z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}v_{zII}{}^n\cos n\theta_{II}$$

とすると，各モードに対する変位 $v_{rI}{}^n$, $v_{\theta I}{}^n$, $v_{zI}{}^n$, $v_{rII}{}^n$, $v_{\theta II}{}^n$ および $v_{zII}{}^n$ は下式となる。

$$v_{rI}{}^n=\frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_I)-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_I)\}(\phi_I{}^n-\psi_I{}^n)+\frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_I)+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_I)\}(\phi_I{}^n+\psi_I{}^n)$$
$$+\frac{\varepsilon_n}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{n+1}(\kappa r_I)-J_{n-1}(\kappa r_I)\}(\phi_{II}{}^m-\psi_{II}{}^m)$$
$$-\frac{\varepsilon_n}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)-(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{n+1}(\kappa r_I)+J_{n-1}(\kappa r_I)\}(\phi_{II}{}^m+\psi_{II}{}^m)$$
$$(r_I<D_x)\cdots\cdots(24)$$

$$v_{\theta I}{}^n=\frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_I)+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_I)\}(\phi_I{}^n-\psi_I{}^n)+\frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_I)-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_I)\}(\phi_I{}^n+\psi_I{}^n)$$
$$+\frac{\varepsilon_n}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{n+1}(\kappa r_I)+J_{n-1}(\kappa r_I)\}(\phi_{II}{}^m-\psi_{II}{}^m)$$
$$-\frac{\varepsilon_n}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)-(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{n+1}(\kappa r_I)-J_{n-1}(\kappa r_I)\}(\phi_{II}{}^m+\psi_{II}{}^m)$$
$$(r_I<D_x)\cdots\cdots(25)$$

$$v_{zI}{}^n=H_n{}^{(2)}(\kappa r_I)\chi_I{}^n+\frac{\varepsilon_n}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}J_n(\kappa r_I)\chi_{II}{}^m$$
$$(r_I<D_x)\cdots\cdots(26)$$

$$v_{rII}{}^n=\frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})\}(\phi_{II}{}^n-\psi_{II}{}^n)+\frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})$$
$$+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})\}(\phi_{II}{}^n+\psi_{II}{}^n)$$
$$+\frac{\varepsilon_n}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{n+1}(\kappa r_{II})-J_{n-1}(\kappa r_{II})\}(\phi_I{}^m-\psi_I{}^m)$$
$$-\frac{\varepsilon_n}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)-(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{n+1}(\kappa r_{II})+J_{n-1}(\kappa r_{II})\}(\phi_I{}^m+\psi_I{}^m)$$
$$(r_{II}<D_x)\cdots\cdots(27)$$

$$v_{\theta II}{}^n=\frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})\}(\phi_{II}{}^n-\psi_{II}{}^n)+\frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})$$
$$-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa r_{II})\}(\phi_{II}{}^n+\psi_{II}{}^n)$$
$$+\frac{\varepsilon_n}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{n+1}(\kappa r_{II})+J_{n-1}(\kappa r_{II})\}(\phi_I{}^m-\psi_I{}^m)$$
$$-\frac{\varepsilon_n}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)-(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}\{J_{n+1}(\kappa r_{II})-J_{n-1}(\kappa r_{II})\}(\phi_I{}^m+\psi_I{}^m)$$
$$(r_{II}<D_x)\cdots\cdots(28)$$

$$v_{zII}{}^n=H_n{}^{(2)}(\kappa r_{II})\chi_{II}{}^n+\frac{\varepsilon_n}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa D_x)+(-1)^nH_{m-n}{}^{(2)}(\kappa D_x)\}J_n(\kappa r_{II})\chi_I{}^m$$
$$(r_{II}<D_x)\cdots\cdots(29)$$

ここで，Hankel 関数の性質を用いると

$$H_n{}^{(2)}(z)-(-1)^nH_{-n}{}^{(2)}(z)=0$$

となるから，(24)～(29) 式中の $(\phi_I{}^0+\psi_I{}^0)$ および $(\phi_{II}{}^0+\psi_{II}{}^0)$ の係数は常に零となる。

ところで，「基礎およびその下の土柱（Block I および Block II）の水平断面は常に円形を保持している」という仮定から，Block I および Block II と Block O との境界面（$r_I=R_I$ および $r_{II}=R_{II}$）では円形のモード n が $n\geqq 2$ に対して次の境界条件が成り立つ。

$$\begin{matrix} v_{rI}{}^n|_{r_I=R_I}=0, & v_{\theta I}{}^n|_{r_I=R_I}=0, & v_{zI}{}^n|_{r_I=R_I}=0 \\ v_{rII}{}^n|_{r_{II}=R_{II}}=0, & v_{\theta II}{}^n|_{r_{II}=R_{II}}=0, & v_{zII}{}^n|_{r_{II}=R_{II}}=0 \end{matrix} \quad n\geqq 2 \qquad \cdots\cdots(30)$$

また，$n=0$ に対しては，

$$v_{rI}{}^0|_{r_I=R_I}=0, \quad v_{rII}{}^0|_{r_{II}=R_{II}}=0 \qquad \cdots\cdots(31)$$

さらに，$n=1$ に対しては $v_{rI}{}^1$ と $v_{\theta I}{}^1$ および $v_{rII}{}^1$ と $v_{\theta II}{}^1$ とがそれぞれ符号は異なるが絶対値が等しくなる。すなわち，

$$v_{rI}{}^1|_{r_I=R_I}=-v_{\theta I}{}^1|_{r_I=R_I}, \quad v_{rII}{}^1|_{r_{II}=R_{II}}=-v_{\theta II}{}^1|_{r_{II}=R_{II}} \qquad \cdots\cdots(32)$$

となる。

(24)～(29) 式で示される各モードに対する変位 $v_{rI}{}^n, v_{\theta I}{}^n, v_{zI}{}^n, v_{rII}{}^n, v_{\theta II}{}^n$ および $v_{zII}{}^n$ は薄層地盤の固有ベクトルで表わされているので，各固有ベクトルに対して weight（重み）を掛ける必要がある。薄層地盤の固有値に対する重み $s_{KRl}{}^n, s_{KSl}{}^n$ および $s_{KRL+l}{}^n$ ($K=I, II$, $n=0, 1,\cdots, N$, $l=1, 2,\cdots, L$, R: (11) 式の固有値に対応，S: (10) 式の固有値に対応) を固有ベクトルに掛けて変位成分 $v_{rI}{}^n, v_{\theta I}{}^n, v_{zI}{}^n, v_{rII}{}^n, v_{\theta II}{}^n, v_{zII}{}^n$ を表わすと次式となる。

$$\begin{Bmatrix} v_I^0 \\ v_I^1 \\ v_I^2 \\ \vdots \\ v_I^N \\ \hdashline v_{II}^0 \\ v_{II}^1 \\ v_{II}^2 \\ \vdots \\ v_{II}^N \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:cccc} H_{\phi I}^0 & & & 0 & J_{\phi I}^{00} & J_{\phi I}^{01} & J_{\phi I}^{02} & \cdots & J_{\phi I}^{0N} \\ & H_{\phi I}^1 & & & J_{\phi I}^{10} & J_{\phi I}^{11} & J_{\phi I}^{12} & \cdots & J_{\phi I}^{1N} \\ & & H_{\phi I}^2 & & J_{\phi I}^{20} & J_{\phi I}^{21} & J_{\phi I}^{22} & \cdots & J_{\phi I}^{2N} \\ & & & \ddots & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & & & H_{\phi I}^N & J_{\phi I}^{N0} & J_{\phi I}^{N1} & J_{\phi I}^{N2} & \cdots & J_{\phi I}^{NN} \\ \hdashline J_{\phi II}^{00} & J_{\phi II}^{01} & J_{\phi II}^{02} & \cdots & J_{\phi II}^{0N} & H_{\phi II}^0 & & & 0 \\ J_{\phi II}^{10} & J_{\phi II}^{11} & J_{\phi II}^{12} & \cdots & J_{\phi II}^{1N} & & H_{\phi II}^1 & & \\ J_{\phi II}^{20} & J_{\phi II}^{21} & J_{\phi II}^{22} & \cdots & J_{\phi II}^{2N} & & & H_{\phi II}^2 & \\ & & \cdots\cdots & & & 0 & & \ddots & \\ J_{\phi II}^{N0} & J_{\phi II}^{N1} & J_{\phi II}^{N2} & \cdots & J_{\phi II}^{NN} & & & & H_{\phi II}^N \end{array}\right] \begin{Bmatrix} s_I^0 \\ s_I^1 \\ s_I^2 \\ \vdots \\ s_I^N \\ s_{II}^0 \\ s_{II}^1 \\ s_{II}^2 \\ \vdots \\ s_{II}^N \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots (33)$$

ここに，

$$\{v_K^0\} = (v_{rK1}^0, v_{rK2}^0, \ldots, v_{rKL}^0, v_{zK1}^0, v_{zK2}^0, \ldots, v_{zKL}^0)^T$$
$$\{s_K^0\} = (s_{KR1}^0, s_{KR2}^0, \ldots, s_{KRL}^0, s_{KRL+1}^0, s_{KRL+2}^0, \ldots, s_{KRL+L}^0)^T \quad K=I, II \cdots\cdots (34)$$

および

$$\left.\begin{aligned} \{v_K^n\} &= (v_{rK1}^n, \ldots, v_{rKL}^n, v_{\theta K1}^n, \ldots, v_{\theta KL}^n, v_{zK1}^n, \ldots, v_{zKL}^n)^T \\ \{s_K^n\} &= (s_{KR1}^n, \ldots, s_{KRL}^n, s_{KS1}^n, \ldots, s_{KSL}^n, s_{KRL+1}^n, \ldots, s_{KRL+L}^n)^T \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} K=I, II, \\ n=1, 2, \ldots, N \end{array} \cdots (35)$$

さらに，$H_{\phi K}^n, J_{\phi K}^n$ $(K=I, II,\ n, m=0, 1, \ldots, N)$ は (24)～(29) 式の κ に固有値方程式 (10)，(11) 式の固有値 κ_S, κ_R を，またそれに対応する固有ベクトルを (24)～(29) 式の各項 $(\phi_K^n+\psi_K^n)$，$(\phi_K^n-\psi_K^n)$ および χ_K^n に代入し，各固有値に対して Hankel 関数あるいは Bessel 関数と固有ベクトルから構成されるベクトルを横に並べて作られるマトリックスである。すなわち，

$$H_{\phi K}^n = \begin{bmatrix} \phi_{K11}^n H_{K11}^n & \phi_{K22}^n H_{K12}^n & \phi_{K13}^n H_{K13}^n \\ \phi_{K11}^n H_{K21}^n & \phi_{K22}^n H_{K22}^n & \phi_{K13}^n H_{K23}^n \\ \phi_{K31}^n H_{K31}^n & [0] & \phi_{K33}^n H_{K33}^n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} K=I, II, \\ n=0, 1, \ldots, N \end{array} \cdots\cdots (36)$$

ここに，

$$\phi_{K11}^n = \begin{bmatrix} (\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)_{R1} & (\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)_{R2} & \cdots & (\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)_{RL} \\ (\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n)_{R1} & (\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n)_{R2} & \cdots & (\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n)_{RL} \\ & \cdots\cdots & & \\ (\phi_{KL}^n-\psi_{KL}^n)_{R1} & (\phi_{KL}^n-\psi_{KL}^n)_{R2} & \cdots & (\phi_{KL}^n-\psi_{KL}^n)_{RL} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{K31}^n = \begin{bmatrix} (\chi_{K1}^n)_{R1} & (\chi_{K1}^n)_{R2} & \cdots & (\chi_{K1}^n)_{RL} \\ (\chi_{K2}^n)_{R1} & (\chi_{K2}^n)_{R2} & \cdots & (\chi_{K2}^n)_{RL} \\ & \cdots\cdots & & \\ (\chi_{KL}^n)_{R1} & (\chi_{KL}^n)_{R2} & \cdots & (\chi_{KL}^n)_{RL} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{K13}^n = \begin{bmatrix} (\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)_{RL+1} & (\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)_{RL+2} & \cdots & (\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)_{RL+L} \\ (\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n)_{RL+1} & (\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n)_{RL+2} & \cdots & (\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n)_{RL+L} \\ & \cdots\cdots & & \\ (\phi_{KL}^n-\psi_{KL}^n)_{RL+1} & (\phi_{KL}^n-\psi_{KL}^n)_{RL+2} & \cdots & (\phi_{KL}^n-\psi_{KL}^n)_{RL+L} \end{bmatrix} \cdots\cdots (37)$$

$$\phi_{K33}^n = \begin{bmatrix} (\chi_{K1}^n)_{RL+1} & (\chi_{K1}^n)_{RL+2} & \cdots & (\chi_{K1}^n)_{RL+L} \\ (\chi_{K2}^n)_{RL+1} & (\chi_{K2}^n)_{RL+2} & \cdots & (\chi_{K2}^n)_{RL+L} \\ & \cdots\cdots & & \\ (\chi_{KL}^n)_{RL+1} & (\chi_{KL}^n)_{RL+2} & \cdots & (\chi_{KL}^n)_{RL+L} \end{bmatrix}$$

$$\phi_{K22}^n = \begin{bmatrix} (\phi_{K1}^n+\psi_{K1}^n)_{S1} & (\phi_{K1}^n+\psi_{K1}^n)_{S2} & \cdots & (\phi_{K1}^n+\psi_{K1}^n)_{SL} \\ (\phi_{K2}^n+\psi_{K2}^n)_{S1} & (\phi_{K2}^n+\psi_{K2}^n)_{S2} & \cdots & (\phi_{K2}^n+\psi_{K2}^n)_{SL} \\ & \cdots\cdots & & \\ (\phi_{KL}^n+\psi_{KL}^n)_{S1} & (\phi_{KL}^n+\psi_{KL}^n)_{S2} & \cdots & (\phi_{KL}^n+\psi_{KL}^n)_{SL} \end{bmatrix}$$

$$H_{K11}{}^{n}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{R1}r_K)-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{R1}r_K)\} & & 0 \\ & \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{R2}r_K)-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{R2}r_K)\} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{RL}r_K)-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{RL}r_K)\} \end{bmatrix}$$

$$H_{K21}{}^{n}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{R1}r_K)+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{R1}r_K)\} & & 0 \\ & \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{R2}r_K)+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{R2}r_K)\} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{RL}r_K)+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{RL}r_K)\} \end{bmatrix}$$

$$H_{K31}{}^{n}=\begin{bmatrix} H_n{}^{(2)}(\kappa_{R1}r_K) & & 0 \\ & H_n{}^{(2)}(\kappa_{R2}r_K) & \\ & & \ddots \\ 0 & & H_n{}^{(2)}(\kappa_{RL}r_K) \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

$$H_{K12}{}^{n}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{S1}r_K)+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{S1}r_K)\} & & 0 \\ & \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{S2}r_K)+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{S2}r_K)\} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{SL}r_K)+H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{SL}r_K)\} \end{bmatrix}$$

$$H_{K22}{}^{n}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{S1}r_K)-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{S1}r_K)\} & & 0 \\ & \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{S2}r_K)-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{S2}r_K)\} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \frac{1}{2}\{H_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_{SL}r_K)-H_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_{SL}r_K)\} \end{bmatrix}$$

$H_{K13}{}^{n}$, $H_{K23}{}^{n}$ および $H_{K33}{}^{n}$ はそれぞれ $H_{K11}{}^{n}$, $H_{K21}{}^{n}$ および $H_{K31}{}^{n}$ において κ_{Rl} $(l=1, 2,\ldots, L)$ の代わりに，κ_{RL+l} と置き換えたマトリックスである。

さらに，

$$J_{\phi K}{}^{nm}=\begin{bmatrix} \phi_{K11}{}^{m}J_{K11}{}^{n}H_{R1}{}^{nm} & \phi_{K22}{}^{m}J_{K12}{}^{n}H_{S}{}^{nm} & \phi_{K13}{}^{m}J_{K13}{}^{n}H_{R2}{}^{nm} \\ \phi_{K11}{}^{m}J_{K21}{}^{n}H_{R1}{}^{nm} & \phi_{K22}{}^{m}J_{K22}{}^{n}H_{S}{}^{nm} & \phi_{K13}{}^{m}J_{K23}{}^{n}H_{R2}{}^{nm} \\ \phi_{K31}{}^{m}J_{K31}{}^{n}H_{R1}{}^{nm} & [0] & \phi_{K33}{}^{m}J_{K33}{}^{n}H_{R2}{}^{nm} \end{bmatrix}$$

$$K=I,\ II,\quad n,\ m=0,\ 1,\ldots,\ N \qquad \cdots\cdots(39)$$

ここに，

$$H_{R1}{}^{nm}=\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{R1}D_x)+(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{R1}D_x)\} & & 0 \\ & \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{R2}D_x)+(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{R2}D_x)\} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{RL}D_x)+(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{RL}D_x)\} \end{bmatrix}$$

$$H_{S}{}^{nm}=\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{S1}D_x)-(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{S1}D_x)\} & & 0 \\ & \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{S2}D_x)-(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{S2}D_x)\} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{SL}D_x)-(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{SL}D_x)\} \end{bmatrix}$$

$$H_{R2}{}^{nm}=\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{RL+1}D_x)+(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{RL+1}D_x)\} & & 0 \\ & \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{RL+2}D_x)+(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{RL+2}D_x)\} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \frac{\varepsilon_n}{2}\{H_{m+n}{}^{(2)}(\kappa_{RL+L}D_x)+(-1)^{n}H_{m-n}{}^{(2)}(\kappa_{RL+L}D_x)\} \end{bmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

また，$J_{Kij}{}^{n}$ $(i, j=1, 2, 3)$ は $H_{Kij}{}^{n}$ における第2種 Hankel 関数を Bessel 関数に置き換えて得られる関数

である。ここで，Hankel 関数を展開したときの項 n の上限 N は基礎の周囲で地盤の変位が円形を保つように十分大きな整数である。

ついで，「水平方向加振の場合，基礎の上下方向の振動を無視する」という仮定，すなわち，

$$v_{zI}{}^0|_{rI=R_I}=0,\qquad v_{zII}{}^0|_{rII=RII}=0 \qquad \cdots\cdots(41)$$

および境界条件（30），（31）式を（33）式に代入し，$\{v_I{}^1\}$ および $\{v_{II}{}^1\}$ を含む式を除くと次の関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} H_{\phi I}{}^0 & & & 0 & J_{\phi I}{}^{00} & J_{\phi I}{}^{02} & \cdots & J_{\phi I}{}^{0N} \\ & H_{\phi I}{}^2 & & & J_{\phi I}{}^{20} & J_{\phi I}{}^{22} & \cdots & J_{\phi I}{}^{2N} \\ & & \ddots & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & & & H_{\phi I}{}^N & J_{\phi I}{}^{N0} & J_{\phi I}{}^{N2} & \cdots & J_{\phi I}{}^{NN} \\ \hline J_{\phi II}{}^{00} & J_{\phi II}{}^{02} & \cdots & J_{\phi II}{}^{0N} & H_{\phi II}{}^0 & & & 0 \\ J_{\phi II}{}^{20} & J_{\phi II}{}^{22} & \cdots & J_{\phi II}{}^{2N} & & H_{\phi II}{}^2 & & \\ & \cdots\cdots & & & & & \ddots & \\ J_{\phi II}{}^{N0} & J_{\phi II}{}^{N2} & \cdots & J_{\phi II}{}^{NN} & 0 & & & H_{\phi II}{}^N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_I{}^0 \\ s_I{}^2 \\ \vdots \\ s_I{}^N \\ s_{II}{}^0 \\ s_{II}{}^2 \\ \vdots \\ s_{II}{}^N \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} J_{\phi I}{}^{01}\, s_{II}{}^1 \\ J_{\phi I}{}^{21}\, s_{II}{}^1 \\ \vdots \\ J_{\phi I}{}^{N1}\, s_{II}{}^1 \\ J_{\phi II}{}^{01}\, s_I{}^1 \\ J_{\phi II}{}^{21}\, s_I{}^1 \\ \vdots \\ J_{\phi II}{}^{N1}\, s_I{}^1 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(42)$$

一方，（33）式の $\{v_I{}^1\}$ および $\{v_{II}{}^1\}$ を含む式のみを取出すと次式となる。

$$\begin{bmatrix} H_{\phi I}{}^1 & J_{\phi I}{}^{11} \\ J_{\phi II}{}^{11} & H_{\phi II}{}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_I{}^1 \\ s_{II}{}^1 \end{Bmatrix} + \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{\phi I}{}^{10} & J_{\phi I}{}^{12} & \cdots & J_{\phi I}{}^{1N} \\ \hline J_{\phi II}{}^{10} & J_{\phi II}{}^{12} & \cdots & J_{\phi II}{}^{1N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} s_I{}^0 \\ s_I{}^2 \\ \vdots \\ s_I{}^N \\ s_{II}{}^0 \\ s_{II}{}^2 \\ \vdots \\ s_{II}{}^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_I{}^1 \\ v_{II}{}^1 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(43)$$

（42）式の $s_I{}^0, s_I{}^2, \ldots, s_I{}^N, s_{II}{}^0, s_{II}{}^2, \ldots, s_{II}{}^N$ を $s_I{}^1$ および $s_{II}{}^1$ に関して解くと，

$$\{\tilde{s}\}=[H]\{s^1\} \qquad \cdots\cdots(44)$$

ここに，

$$\underset{(6LN-2L)\times 1}{\{\tilde{s}\}}=(s_I{}^0, s_I{}^2, \ldots, s_I{}^N, s_{II}{}^0, s_{II}{}^2, \ldots, s_{II}{}^N)^T$$

$$\underset{6L\times 1}{\{s^1\}}=(s_I{}^1, s_{II}{}^1)^T$$

$$\underset{(6LN-2L)\times 6L}{[H]}=-\begin{bmatrix} H_{\phi I}{}^0 & & & 0 & J_{\phi I}{}^{00} & J_{\phi I}{}^{02} & \cdots & J_{\phi I}{}^{0N} \\ & H_{\phi I}{}^2 & & & J_{\phi I}{}^{20} & J_{\phi I}{}^{22} & \cdots & J_{\phi I}{}^{2N} \\ & & \ddots & & & \cdots\cdots & & \\ 0 & & & H_{\phi I}{}^N & J_{\phi I}{}^{N0} & J_{\phi I}{}^{N2} & \cdots & J_{\phi I}{}^{NN} \\ \hline J_{\phi II}{}^{00} & J_{\phi II}{}^{02} & \cdots & J_{\phi II}{}^{0N} & H_{\phi II}{}^0 & & & 0 \\ J_{\phi II}{}^{20} & J_{\phi II}{}^{22} & \cdots & J_{\phi II}{}^{2N} & & H_{\phi II}{}^2 & & \\ & \cdots\cdots & & & & & \ddots & \\ J_{\phi II}{}^{N0} & J_{\phi II}{}^{N2} & \cdots & J_{\phi II}{}^{NN} & 0 & & & H_{\phi II}{}^N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [0] & J_{\phi I}{}^{01} \\ [0] & J_{\phi I}{}^{21} \\ \vdots & \vdots \\ [0] & J_{\phi I}{}^{N1} \\ \hline J_{\phi II}{}^{01} & [0] \\ J_{\phi II}{}^{21} & [0] \\ \vdots & \vdots \\ J_{\phi II}{}^{N1} & [0] \end{bmatrix}$$

$$\underset{(6LN-2L)\times(6LN-2L)}{\qquad\qquad}\qquad\qquad \underset{(6LN-2L)\times 6L}{\qquad\qquad} \qquad \cdots\cdots(45)$$

（44）式を（43）式に代入して，$(s_I{}^1, s_{II}{}^1)^T$ と $(v_I{}^1, v_{II}{}^1)^T$ との関係式を求めると下式となる。

$$([X]+[T][H])\{s^1\}=\{v^1\} \qquad \cdots\cdots(46)$$

ここに，

$$[X]=\begin{bmatrix} H_{\phi I}{}^{1} & J_{\phi I}{}^{11} \\ J_{\phi II}{}^{11} & H_{\phi II}{}^{1} \end{bmatrix},\quad \{s^1\}=\begin{Bmatrix} s_I{}^{1} \\ s_{II}{}^{1} \end{Bmatrix},\quad \{v^1\}=\begin{Bmatrix} v_I{}^{1} \\ v_{II}{}^{1} \end{Bmatrix}$$

$$[T]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{\phi I}{}^{10} & J_{\phi I}{}^{12} & \cdots & J_{\phi I}{}^{1N} \\ J_{\phi II}{}^{10} & J_{\phi II}{}^{12} & \cdots & J_{\phi II}{}^{1N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(47)$$

したがって，

$$\{s^1\}=([X]+[T][H])^{-1}\{v^1\} \qquad \cdots\cdots(48)$$

2.3 円筒基礎—弾性体境界面の応力

Block I および Block II の円筒基礎周辺における応力 $\{\sigma_{rI}, \tau_{r\theta I}, \tau_{rzI}\}$ および $\{\sigma_{rII}, \tau_{r\theta II}, \tau_{rzII}\}$ を対称性を考慮して Fourier 級数に展開すると下式となる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rK} \\ \tau_{r\theta K} \\ \tau_{rzK} \end{Bmatrix}_{R_K} =-\sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} \cos n\theta_K & & 0 \\ & \sin n\theta_K & \\ 0 & & \cos n\theta_K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_{rK}{}^{n} \\ p_{\theta K}{}^{n} \\ p_{zK}{}^{n} \end{Bmatrix} \quad K=I,\ II \qquad \cdots\cdots(49)$$

ここで，(4) 式の関係を用いると $p_{rK}{}^{n}$, $p_{\theta K}{}^{n}$, $p_{zK}{}^{n}$ は下式となる。ここに，$K=I, II$。

$$\begin{aligned} p_{rK}{}^{n}&=-\Big[\lambda\Big\{\frac{1}{r_K}\frac{\partial}{\partial r_K}(r_K v_{rK}{}^{n})+n\frac{v_{\theta K}{}^{n}}{r_K}+\frac{\partial v_{zK}{}^{n}}{\partial z}\Big\}+2\mu\frac{\partial v_{rK}{}^{n}}{\partial r_K}\Big]_{rK=R_K} \\ &=\frac{\mu}{R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa R_K)\}(\phi_K{}^{n}+\psi_K{}^{n}) \\ &\quad+\frac{\mu}{R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa R_K)\}(\phi_K{}^{n}-\psi_K{}^{n}) \\ &\quad-\lambda\frac{\mathrm{d}\chi_K{}^{n}}{\mathrm{d}z_K}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa R_K)-(\lambda+2\mu)\kappa\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa R_K)(\phi_K{}^{n}-\psi_K{}^{n}) \qquad \cdots\cdots(50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{\theta K}{}^{n}&=-\mu\Big(\frac{\partial v_{\theta K}{}^{n}}{\partial r_K}-\frac{v_{\theta K}{}^{n}}{r_K}-\frac{n v_{rK}{}^{n}}{r_K}\Big)_{rK=R_K} \\ &=-\mu\kappa\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa R_K)(\phi_K{}^{n}+\psi_K{}^{n}) \\ &\quad+\frac{\mu}{R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa R_K)\}(\phi_K{}^{n}+\psi_K{}^{n}) \\ &\quad+\frac{\mu}{R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa R_K)\}(\phi_K{}^{n}-\psi_K{}^{n}) \qquad \cdots\cdots(51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{zK}{}^{n}&=-\mu\Big(\frac{\partial v_{rK}{}^{n}}{\partial z}+\frac{\partial v_{zK}{}^{n}}{\partial r_K}\Big)_{rK=R_K} \\ &=-\frac{\mu}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_K}(\phi_K{}^{n}+\psi_K{}^{n})\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa R_K)+\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa R_K)\} \\ &\quad-\frac{\mu}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_K}(\phi_K{}^{n}-\psi_K{}^{n})\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa R_K)-\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa R_K)\} \\ &\quad+\frac{\mu}{2}\kappa\chi_K{}^{n}\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa R_K)-\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa R_K)\} \qquad \cdots\cdots(52) \end{aligned}$$

(50)～(52) 式に対して再び (5) 式を代入し，仮想仕事の原理を用いて，層要素の Block I および Block II ($K=I, II$) における上下縁に作用する分布力を求めると次のようになる (**Fig. 5**)。

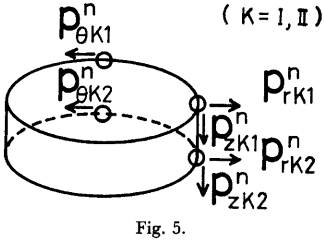


Fig. 5.

$$
\begin{aligned}
p_{rK1}{}^{n}=&\frac{\mu H}{3R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K1}{}^{n}-\psi_{K1}{}^{n})\\
&+\frac{\lambda}{2}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\chi_{K1}{}^{n}\\
&+\frac{\mu H}{3R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K1}{}^{n}+\psi_{K1}{}^{n})\\
&+\frac{\mu H}{6R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K2}{}^{n}-\psi_{K2}{}^{n})\\
&-\frac{\lambda}{2}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\chi_{K2}{}^{n}\\
&+\frac{\mu H}{6R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K2}{}^{n}+\psi_{K2}{}^{n})\\
&-\kappa_R\frac{(\lambda+2\mu)H}{3}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa_R R_K)(\phi_{K1}{}^{n}-\psi_{K1}{}^{n})\\
&-\kappa_R\frac{(\lambda+2\mu)H}{6}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa_R R_K)(\phi_{K2}{}^{n}-\psi_{K2}{}^{n})
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(53)
$$

$$
\begin{aligned}
p_{\theta K1}{}^{n}=&\frac{\mu H}{3R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K1}{}^{n}-\psi_{K1}{}^{n})\\
&+\frac{\mu H}{3R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K1}{}^{n}+\psi_{K1}{}^{n})\\
&+\frac{\mu H}{6R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K2}{}^{n}-\psi_{K2}{}^{n})\\
&+\frac{\mu H}{6R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K2}{}^{n}+\psi_{K2}{}^{n})\\
&-\kappa_S\frac{\mu H}{3}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa_S R_K)(\phi_{K1}{}^{n}+\psi_{K1}{}^{n})-\kappa_S\frac{\mu H}{6}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa_S R_K)(\phi_{K2}{}^{n}+\psi_{K2}{}^{n})
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(54)
$$

$$
\begin{aligned}
p_{zK1}{}^{n}=&\frac{\mu}{4}\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)-\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K1}{}^{n}-\psi_{K1}{}^{n})\\
&+\frac{\mu}{4}\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)+\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K1}{}^{n}+\psi_{K1}{}^{n})\\
&-\frac{\mu}{4}\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)-\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K2}{}^{n}-\psi_{K2}{}^{n})\\
&-\frac{\mu}{4}\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)+\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K2}{}^{n}+\psi_{K2}{}^{n})\\
&+\kappa_R\frac{\mu H}{6}\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)-\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}\chi_{K1}{}^{n}\\
&+\kappa_R\frac{\mu H}{12}\{\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)-\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}\chi_{K2}{}^{n}
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(55)
$$

$$
\begin{aligned}
p_{rK2}{}^{n}=&\frac{\mu H}{6R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K1}{}^{n}-\psi_{K1}{}^{n})\\
&+\frac{\lambda}{2}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\chi_{K1}{}^{n}\\
&+\frac{\mu H}{6R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K1}{}^{n}+\psi_{K1}{}^{n})\\
&+\frac{\mu H}{3R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K2}{}^{n}-\psi_{K2}{}^{n})\\
&-\frac{\lambda}{2}\mathrm{H}_n{}^{(2)}(\kappa_R R_K)\chi_{K2}{}^{n}\\
&+\frac{\mu H}{3R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}{}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K2}{}^{n}+\psi_{K2}{}^{n})
\end{aligned}
$$

$$-\kappa_R\frac{(\lambda+2\mu)H}{6}\mathrm{H}_n^{(2)}(\kappa_R R_K)(\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)$$

$$-\kappa_R\frac{(\lambda+2\mu)H}{3}\mathrm{H}_n^{(2)}(\kappa_R R_K)(\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n) \quad \cdots\cdots(56)$$

$$p_{\theta K2}^n=\frac{\mu H}{6R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_R R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)$$

$$+\frac{\mu H}{6R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_S R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K1}^n+\psi_{K1}^n)$$

$$+\frac{\mu H}{3R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_R R_K)-(n-1)\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n)$$

$$+\frac{\mu H}{3R_K}\{(n+1)\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_S R_K)+(n-1)\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K2}^n+\psi_{K2}^n)$$

$$-\kappa_S\frac{\mu H}{6}\mathrm{H}_n^{(2)}(\kappa_S R_K)(\phi_{K1}^n+\psi_{K1}^n)-\kappa_S\frac{\mu H}{3}\mathrm{H}_n^{(2)}(\kappa_S R_K)(\phi_{K2}^n+\psi_{K2}^n) \quad \cdots\cdots(57)$$

$$p_{zK2}^n=\frac{\mu}{4}\{\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_R R_K)-\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n)$$

$$+\frac{\mu}{4}\{\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_S R_K)+\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K1}^n+\psi_{K1}^n)$$

$$-\frac{\mu}{4}\{\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_R R_K)-\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}(\phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n)$$

$$-\frac{\mu}{4}\{\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_S R_K)+\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_S R_K)\}(\phi_{K2}^n+\psi_{K2}^n)$$

$$+\kappa_R\frac{\mu H}{12}\{\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_R R_K)-\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}\chi_{K1}^n$$

$$+\kappa_R\frac{\mu H}{6}\{\mathrm{H}_{n+1}^{(2)}(\kappa_R R_K)-\mathrm{H}_{n-1}^{(2)}(\kappa_R R_K)\}\chi_{K2}^n \quad \cdots\cdots(58)$$

以上の（53）～（58）式をマトリックス表示すると下式となる。

$$\begin{Bmatrix} p_{rK1}^n \\ p_{\theta K1}^n \\ p_{zK1}^n \\ p_{rK2}^n \\ p_{\theta K2}^n \\ p_{zK2}^n \end{Bmatrix}_\kappa=([d_K]_\kappa^e+\kappa[e_K]_\kappa^e)\begin{Bmatrix} \phi_{K1}^n-\psi_{K1}^n \\ \phi_{K1}^n+\psi_{K1}^n \\ \chi_{K1}^n \\ \phi_{K2}^n-\psi_{K2}^n \\ \phi_{K3}^n+\psi_{K2}^n \\ \chi_{K2}^n \end{Bmatrix}_\kappa \quad \cdots\cdots(59)$$

（59）式中のマトリックス $[d_K]_\kappa^e$ および $[e_K]_\kappa^e$ は（53）～（58）式の各係数を要素として組立てられる。

一方，円筒基礎周辺（$r_K=R_K$，$K=I, II$）と各層の境界面との交点における系全体としての応力を

$$\{p_K^n\}=(p_{rK1}^n, p_{rK2}^n,\cdots, p_{rKL}^n, p_{\theta K1}^n, p_{\theta K2}^n,\cdots, p_{\theta KL}^n, p_{zK1}^n, p_{zK2}^n,\cdots, p_{zKL}^n)^T \quad \cdots(60)$$

と表わし，さらに，（59）式の右辺を

$$\{\bar{e}_K^n\}_\kappa=[e_K^n]_\kappa\{\phi_K\}_\kappa$$
$$\{\bar{d}_K^n\}_\kappa=[d_K^n]_\kappa\{\phi_K\}_\kappa \quad \cdots\cdots(61)$$

ここに，$\{\phi_K\}_\kappa=(\phi_{K1}-\psi_{K1}, \phi_{K1}+\psi_{K1}, \chi_{K1},\cdots, \phi_{KL}-\psi_{KL}, \phi_{KL}+\psi_{KL}, \chi_{KL})_\kappa^T$

と置いて（59）式を全系に拡張する。すなわち，（10），（11）式のすべての固有値 κ に対して（61）式を求め，それらを横に並べて $[\bar{e}_K^n]$，$[\bar{d}_K^n]$ をつくると任意の応力分布 $(p_I^n, p_{II}^n)^T$ は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} p_I^n \\ p_{II}^n \end{Bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} \bar{e}_I^n & 0 \\ 0 & \bar{e}_{II}^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{d}_I^n & 0 \\ 0 & \bar{d}_{II}^n \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} s_I^n \\ s_{II}^n \end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots(62)$$

ところで，第 l 層の境界面で円筒基礎（$K=I, II$）に作用する力およびモーメントは次のようになる。

$$p_{zKl}=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\{(p_{rKl}^n\cos n\theta_K)\cdot\cos\theta_K-(p_{\theta Kl}^n\sin n\theta_K)\cdot\sin\theta_K\}R_K\mathrm{d}\theta_K$$
$$=\pi R_K(p_{rKl}^1-p_{\theta Kl}^1) \quad \cdots\cdots(63)$$

$$p_{zKl}=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(p_{zKl}{}^{n}\cos n\theta_K)\cdot R_K\mathrm{d}\theta_K$$
$$=2\pi R_K p_{zKl}{}^{0} \qquad \cdots\cdots(64)$$

$$m_{yKl}=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(p_{zKl}{}^{n}\cos n\theta_K)\cdot R_K\cos\theta_K\cdot R_K\mathrm{d}\theta_K$$
$$=\pi R_K{}^{2}p_{zKl}{}^{1} \qquad \cdots\cdots(65)$$

ここで，上下方向の振動 $v_{zKl}{}^{0}$ が小さく無視できるとすると（64）式は不用となる。したがって，円筒基礎に作用する力およびモーメントは（63）式および（65）式となるので（62）式は $n=1$ のみを考慮すればよい。すなわち，

$$\{p^1\}=([\bar{e}][\kappa]+[\bar{d}])\{s^1\} \qquad \cdots\cdots(66)$$

ここに，

$$[\kappa]=\begin{bmatrix}\kappa & 0\\ 0 & \kappa\end{bmatrix}:\ (10),\ (11)\ 式のすべての固有値を対角線上に並べて作るマトリックス$$
$$\{p^1\}=\begin{Bmatrix}p_I{}^{1}\\ p_{II}{}^{1}\end{Bmatrix},\quad [\bar{e}]=\begin{bmatrix}\bar{e}_I{}^{1} & 0\\ 0 & \bar{e}_{II}{}^{1}\end{bmatrix},\quad [\bar{d}]=\begin{bmatrix}d_I{}^{1} & 0\\ 0 & d_{II}{}^{1}\end{bmatrix},\quad \{s^1\}=\begin{Bmatrix}s_I{}^{1}\\ s_{II}{}^{1}\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(67)$$

（66）式に（48）式を代入すると $\{p^1\}$ と $\{v^1\}$ との関係が求まる。

$$\{p^1\}=([\bar{e}][\kappa]+[\bar{d}])([X]+[T][H])^{-1}\{v^1\}\equiv[Y]\{v^1\} \qquad \cdots\cdots(68)$$

さらに，（32）式の関係を考慮して円筒基礎周辺に働く力およびモーメント $\{p\}$ は次のように表わされる。

$$\{p\}=\pi[R][S]^{T}[Y][S]\{V\}\equiv[P]\{V\} \qquad \cdots\cdots(69)$$

ここに，

$$\{p\}=(p_{xI1},\cdots,p_{xIL},\ m_{yI1},\cdots,m_{yIL},\ p_{xII1},\cdots,p_{xIIL},\ m_{yII1},\cdots,m_{yIIL})^{T}$$
$$\{V\}=(v_{rI1},\cdots,v_{rIL},\ v_{zI1},\cdots,v_{zIL},\ v_{rII1},\cdots,v_{rIIL},\ v_{zII1},\cdots,v_{zIIL})^{T}$$
$$v_{rKl}\equiv v_{rKl}{}^{1}|_{r_K=R_K},\qquad v_{zKl}\equiv v_{zKl}{}^{1}|_{r_K=R_K} \qquad \cdots\cdots(70)$$

$$[S]_{4L\times 6L}=\left[\begin{array}{cc|c} I_L & 0_L & \\ -I_L & 0_L & 0\\ 0_L & I_L & \\ \hline & & \begin{matrix} I_L & 0_L\\ -I_L & 0_L\\ 0_L & I_L\end{matrix}\\ 0 & & \end{array}\right]\qquad [R]_{4L\times 4L}=\left[\begin{array}{cc|c} R_I & 0 & \\ \ddots & & 0\\ 0 & R_I & \\ \hline & & \begin{matrix} R_{II} & 0\\ \ddots & \\ 0 & R_{II}\end{matrix}\\ 0 & & \end{array}\right]$$

I_L：$L\times L$ の単位マトリックス

O_L：$L\times L$ の零マトリックス

2.4 円筒基礎の運動方程式

円筒基礎（Block I, Block II）の各要素に Timoshenko Beam を適用する。ここでは，円筒基礎を薄い層に分割しているため，円筒のたわみ振動において断面の回転角をも考慮することが必要となる。かかる場合の運動方程式は次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\kappa_t GA\left(\frac{\partial v^1}{\partial z}+\frac{w^1}{R}\right)\right]=\rho A\frac{\partial^2 v^1}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{EI}{R}\frac{\partial w^1}{\partial z}\right)-\kappa_t GA\left(\frac{\partial v^1}{\partial z}+\frac{w^1}{R}\right)=\frac{\rho I}{R}\frac{\partial^2 w^1}{\partial t^2} \qquad \cdots\cdots(71)$$

ここに，A, I は断面積および慣性モーメント，R は半径，ρ は密度，E, G は Young 係数および剪断剛性，κ_t は形状に対する係数で円形の場合は $\kappa_t=0.85$ である。ここでも各要素内での変位は直線的に変化するものと仮定する。すなわち，

$$v^1=V_1{}^1\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{H}\right)+V_2{}^1\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{H}\right)$$
$$w^1=W_1{}^1\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{H}\right)+W_2{}^1\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{H}\right) \qquad \cdots\cdots(72)$$

とし，(71) 式を各要素の上，下面における運動方程式に表わすと次式となる[13]。

$$\{q\}_e=[F]^e\{V\}_e-\omega^2[M]^e\{V\}_e \qquad \cdots\cdots(73)$$

ここに，

$$\{q\}_e=(P_1 \quad M_1/R \quad P_2 \quad M_2/R)^T$$
$$\{V\}_e=(V_1{}^1 \quad W_1{}^1 \quad V_2{}^1 \quad W_2{}^1)^T$$

$$[F]^e=\begin{bmatrix} \frac{\kappa_t GA}{H} & -\frac{\kappa_t GA}{2R} & -\frac{\kappa_t GA}{H} & -\frac{\kappa_t GA}{2R} \\ -\frac{\kappa_t GA}{2R} & \frac{EI}{R^2H}+\frac{\kappa_t GAH}{3R^2} & \frac{\kappa_t GA}{2R} & -\frac{EI}{R^2H}+\frac{\kappa_t GAH}{6R^2} \\ -\frac{\kappa_t GA}{H} & \frac{\kappa_t GA}{2R} & \frac{\kappa_t GA}{H} & \frac{\kappa_t GA}{2R} \\ -\frac{\kappa_t GA}{2R} & -\frac{EI}{R^2H}+\frac{\kappa_t GAH}{6R^2} & \frac{\kappa_t GA}{2R} & \frac{EI}{R^2H}+\frac{\kappa_t GAH}{3R^2} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(74)$$

$$[M]^e=\begin{bmatrix} \frac{\rho AH}{3} & 0 & \frac{\rho AH}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\rho IH}{3R^2} & 0 & \frac{\rho IH}{6R^2} \\ \frac{\rho AH}{6} & 0 & \frac{\rho AH}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\rho IH}{6R^2} & 0 & \frac{\rho IH}{3R^2} \end{bmatrix}$$

および

$$-\kappa_t GA\left[\left(\frac{dv^1}{dz}\right)_1+\frac{W_1{}^1}{R}\right]=P_1 \qquad \kappa_t GA\left[\left(\frac{dv^1}{dz}\right)_2+\frac{W_2{}^1}{R}\right]=P_2$$
$$-\frac{EI}{R}\left(\frac{dw^1}{dz}\right)_1=M_1 \qquad \frac{EI}{R}\left(\frac{dw^1}{dz}\right)_2=M_2 \qquad \cdots\cdots(75)$$

結局，円筒基礎の運動方程式は（73）式を全系に拡張した式と（69）式の和となる。すなわち，

$$([F]+[P]-\omega^2[M])\{V\}=\{Q\} \qquad \cdots\cdots(76)$$

ここに，$[F]$, $[M]$ は (74) 式の各要素に対する $[F]^e$, $[M]^e$ を **Fig. 3** のようにして全系に拡張した剛性マトリックスおよび質量マトリックス。また，$[P]$ は（69）式に示されており，$\{V\}$ は $V_{Kl}{}^1=v_{rKl}$, $W_{Kl}{}^1=v_{zKl}$, ($K=I, II$, $l=1, 2, \cdots, L$) と対応づけると（70）式で表わされる。なお，$\{Q\}$ は外乱ベクトルである。

3. 数値解析例および考察

前節では根入れのある2個の円筒構造物が連成する場合の運動方程式を有限要素法と波動論とを併用した解法で誘導した。ここでは（76）式で示される連成構造物の連立方程式を数値的に解くことにより，円筒構造物の振動特性に及ぼす隣接構造物の影響について検討を加える。

3.1 解析モデルおよびパラメータ

解析モデルは **Fig. 6** に示すように厚さ一様な粘弾性層（層厚 D）と剛基盤から成る層地盤内に深さ D_{eK} ($K=I, II$) まで根入れされ，地上部分の高さが H_K($K=I, II$) である2個の相等しい円筒構造物(Block I および Block II) が距離 D_x だけ離れて建っているとする。外力は Block I 構造物（以下では加振構造物と呼ぶ）の地表面位置で2個の構造物の並んでいる方向に Harmonic な水平加振力 $P_H e^{i\omega_0 t}$ が働くとする。ここに，

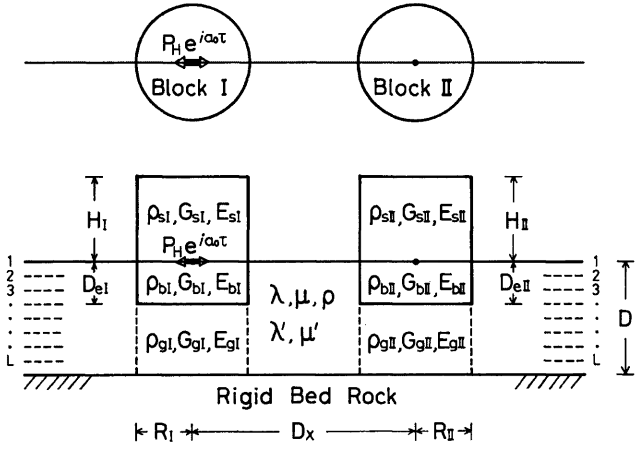


Fig. 6. Two-structures-soil system considered.

Table 1. Values of parameters for CASE-A model.

Soil Media	Basement	Under Ground
$\nu=0.25$	$\rho_{bK}/\rho=1.8$	$\rho_{gK}/\rho=1.0$
$\eta_P=\eta_S=0.1$	$G_{bK}/\mu=500$	$G_{gK}/\mu=1.0$
$d=2$	$E_{bK}/\mu=1300$	$E_{gK}/\mu=2.5$
	$h=0,\quad K=I,\ II$	

Table 2. Values of parameters for CASE-B model.

Soil Media	Upper Structure	Basement	Under Ground
$\nu=0.25$	$\rho_{sK}/\rho=0.25$	$\rho_{bK}/\rho=0.75$	$\rho_{gK}/\rho=1.0$
$\eta_P=\eta_S=0.1$	$G_{sK}/\mu=60$	$G_{bK}/\mu=180$	$G_{gK}/\mu=1.0$
$d=2$	$E_{sK}/\mu=135$	$E_{bK}/\mu=405$	$E_{gK}/\mu=2.5$
$L=8$	$x=4,\quad K=I,\ II$		

$a_0=\dfrac{R_0}{V_S}\omega=R_0\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}\omega$：入力円振動数 ω の無次元量

$\tau=\dfrac{V_S}{R_0}t$：無次元時間，　R_0：長さの規準量　……(77)

P_H：水平加振力の振幅，　$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$：虚数単位

地盤常数としては λ, μ を Lamé の常数，ρ を密度，λ', μ' を λ, μ に対する粘性常数とすると，地盤のポアソン比 ν，ヤング係数 E，S 波 P 波の速度 V_S, V_P，S 波と P 波の速度比 n および S 波 P 波に対応する粘性係数 η_S, η_P とは下の関係がある。

$$\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},\quad E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$V_S=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},\quad V_P=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad n^2=\left(\frac{V_S}{V_P}\right)^2=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \qquad \cdots\cdots(78)$$

$$\eta_S=\frac{V_S}{R_0}\frac{\mu'}{\mu},\quad \eta_P=\frac{V_S}{R_0}\frac{\lambda'+2\mu'}{\lambda+2\mu}=n^2\left(2+\frac{\lambda'}{\mu'}\right)\eta_S$$

第 K 番目の構造物（$K=I, II$）は地上部分（添字：s），根入れ部分（添字：b）および円形土柱（添字：g）と3つの性質の異なる部分から構成されるとし，それぞれの部分に対し，密度を ρ_{sK}, ρ_{bK}, ρ_{gK}, 剪断剛性を G_{sK}, G_{bK}, G_{gK} およびヤング係数を E_{sK}, E_{bK}, E_{gK} とする。さらに，円筒の半径を $R_K(K=I, II)$ とする。ここで，2個の円筒構造物は相等しいとするため，各常数はその添字 K の I と II とでは同じ値をとる。また，相等しい半径を R_0 とおき（$R_I=R_{II}\equiv R_0$），これを長さの規準量として次の無次元パラメータを定義する。

$$\begin{aligned} &h=H_I/R_0=H_{II}/R_0 &&: \text{上部構造の無次元高さ}\\ &e=D_{eI}/R_0=D_{eII}/R_0 &&: \text{構造物の無次元根入れ深さ}\\ &d=D/R_0 &&: \text{粘弾性層地盤の無次元層厚}\\ &x=D_x/R_0 &&: \text{2個の構造物間の無次元距離} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(79)$$

(76) 式の解 $\{V\}$ は連成系各部の複素変位応答 $\{U\}=\{V\}\cdot\cos\theta_K\cdot e^{i a_0 \tau}$ を表わす。ここに，

$$\begin{aligned} \{V\}=&(V_{IT}{}^l, W_{IT}{}^l, V_{I1}{}^l, W_{I1}{}^l,\ldots, V_{IL}{}^l, W_{IL}{}^l,\\ &V_{IIT}{}^l, W_{IIT}{}^l, V_{II1}{}^l, W_{II1}{}^l,\ldots, V_{IIL}{}^l, W_{IIL}{}^l)^T \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(80)$$

$$\begin{aligned} \{U\}=&(U_I{}^T, \phi_I{}^T R_0, U_I{}^1, \phi_I{}^1 R_0,\ldots, U_I{}^L, \phi_I{}^L R_0,\\ &U_{II}{}^T, \phi_{II}{}^T R_0, U_{II}{}^1, \phi_{II}{}^1 R_0,\ldots, U_{II}{}^L, \phi_{II}{}^L R_0)^T \end{aligned}$$

したがって，ここではその結果を無次元化した力一変位伝達特性 $\frac{U_K{}^l}{P_H} R_0\mu=f_{K1}{}^l+if_{K2}{}^l$ の形で表わすか，または絶対値をとり，変位振幅特性 $A_K{}^l$ と位相特性 $\vartheta_K{}^l$ の形で表わす。ここに，$K(=I$: 加振構造物，II: 受振構造物）は構造物の番号を，l（$=T, 1, 2,\ldots, L$）は構造物頂部または層番号を示す。$f_{K1}{}^l, f_{K2}{}^l$ と $A_K{}^l$, $\vartheta_K{}^l$ との間には次の関係式が成り立つ。

$$\frac{U_K{}^l}{P_H} R_0\mu=f_{K1}{}^l+if_{K2}{}^l=\sqrt{f_{K1}{}^{l2}+f_{K2}{}^{l2}}\, e^{-\tan^{-1}(f_{K2}{}^l/f_{K1}{}^l)}\equiv A_K{}^l e^{-\vartheta_K{}^l}$$

ゆえに，

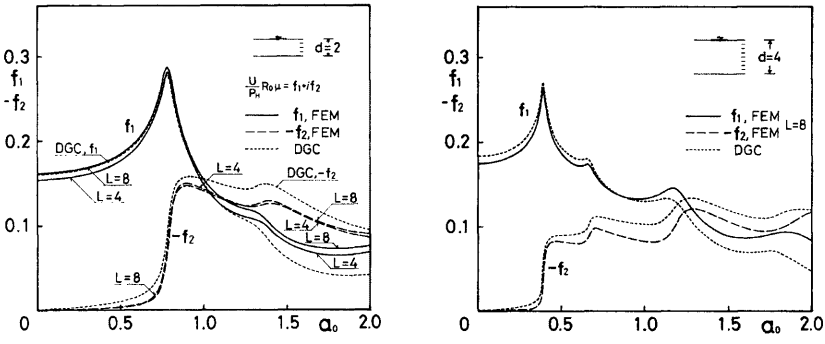
$$A_K{}^l=\sqrt{f_{K1}{}^{l2}+f_{K2}{}^{l2}},\quad \vartheta_K{}^l=-\tan^{-1}\left(\frac{f_{K2}{}^l}{f_{K1}{}^l}\right) \qquad \cdots\cdots(81)$$

数値解析例として CASE-A と CASE-B の2つの構造物連成モデルを考える。ここで，CASE-A は剛性の高いコンクリート基礎が地盤内に埋込まれている場合，CASE-B は地下室を持つ構造物を想定する。そして，CASE-B の上部構造の高さ h としては，$h=0, 1, 2, 4$ の場合を例示する。上部構造の解法は円筒基礎を上部へ延長して上部構造を一層とみなし，(76) 式の有限要素法をそのまま適用する。地盤の分割は等間隔とし，その分割数を L で表わす。数値計算に用いた CASE-A, CASE-B に対する地盤ならびに構造物のパラメータを **Table 1** および **Table 2** に示す。

3.2 Dynamical Ground Compliance との比較

ここでは，解の信憑性を検討する目的で，本報で誘導した有限要素法（以下では FEM と呼ぶ）による解と，層地盤を連続体とみなし，波動論から直接解いた Dynamical Ground Compliance[3]（以下では DGC と呼ぶ）とを比較する。**Fig. 7** は基礎や構造物を考えず，成層地盤のみがあるとし，その地表面を水平方向に加振したときの加振領域における無次元力一変位伝達特性 $\left(\frac{U}{P_H} R_0\mu=f_1+if_2\right)$ を無次元振動数 a_0 に対して示したグラフである。実線および破線は FEM による伝達特性の実数部 f_1 および虚数部 $-f_2$ であり，点線は DGC による値の実数部 f_1 と虚数部 $-f_2$ を示す。FEM の解析モデルは CASE-A の特殊な場合で，Block I のみを考え，その基礎の部分を地盤に置き換えたモデル，すなわち，根入れ深さ $e=0$ とし，円形土柱の地盤係数を周囲の地盤（Block O）のそれと一致させた場合に対応する。DGC の解析モデルは剛基盤上に厚さ一様で等質等方な粘弾性層が覆っているとし，加振領域は正方形，加振状態は加振方向の剪断力が一様に分布するものと仮定する。さらに，その変位応答は加振領域での平均変位を採用する。

Fig. 7 (a) は層厚 $d=2$, **Fig. 7 (b)** は $d=4$ に対する伝達特性を示す。FEM による解法では層の分割数 L が問題となろう。**Fig. 7 (a)**，すなわち，$d=2$ では $L=4$ と $L=8$ の場合を同時に示し，層の分割数によ



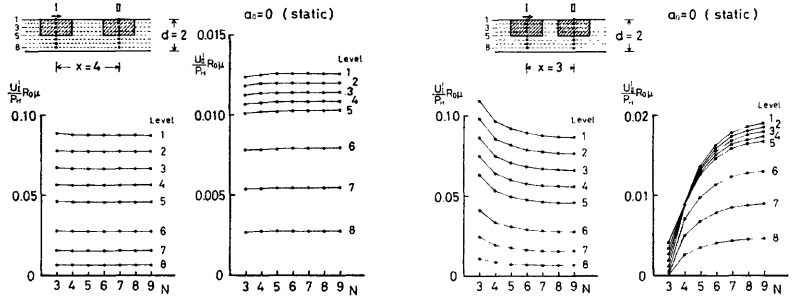
(a) $d=2$　　(b) $d=4$

Fig. 7. Comparison of FEM and DGC.

る相違をみることができる。虚数部（$-f_2$: 破線）では $L=4$ と $L=8$ とであまり差異はみられないが，実数部（f_1: 実線）では $L=4$ の方が $L=8$ の場合より全振動数域（$0 \leq a_0 \leq 2.0$）にわたり小さく出ている。FEM による解と DGC による解とを比べると，虚数部 $-f_2$ では DGC による解の方が，FEM による解より総じて大きい。しかし，実数部では振動数の低い範囲で両者はほぼ等しいが，高振動数になると DGC による解の方が小さくなっている。$L=12$に対する振動特性は全振動数域（$0 \leq a_0 \leq 2.0$）にわたりほとんど $L=8$ の特性に重なるため，図示するのは省略する。$L=12$の特性は実数部では $L=8$ の場合より約1％ほど全体に大きいが虚数部はほとんど一致しており，工学的には層数を $L=8$ として十分な精度があるといえる。**Fig. 7 (b)**，すなわち，$d=4$ では層の分割数は $L=8$ の場合のみである。FEM と DGC とによる解を比較すると，ここでも $d=2$ と同様な性状を示すが，その傾向は $L=8$ よりも $L=4$ に近い。これは，$d=4$ において分割数 $L=8$ としたときの層の分割間隔は $d=2$ では $L=4$ の間隔に相当しており，分割数よりも分割間隔により解の精度が決まってくることに対応している。FEM の解析モデルと DGC のモデルとでは仮定に若干の差があることを考慮すると，両者は定性的，定量的によく合っており，FEM による解法の信頼できることが示された。

3.3 連成系の振動特性

2個の円筒基礎連成系に対する解の誘導過程で，座標変換に伴ない Hankel 関数の無限次数への展開

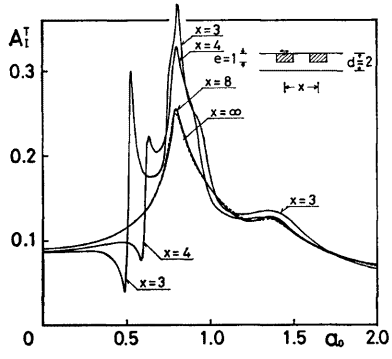


(a) $x=4$　　(b) $x=3$

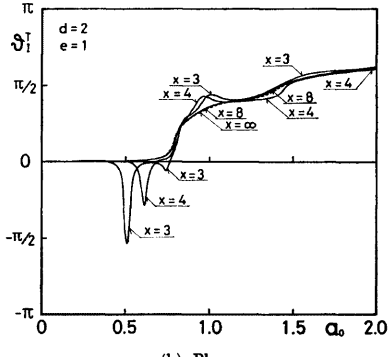
Fig. 8. Accuracy for order of expansion N.

〔(24)～(29) 式〕がなされている。振動特性の数値計算に際して，無限展開を何次の項 N まで採用すれば十分な精度が得られるかを示すのが **Fig. 8** である。このグラフは解析モデル CASE-A ($d=2, L=8$) の static な加力 ($a_0=0$) に対する変位 $\frac{U_K^l}{P_H} R_0\mu$ ($l=1, 2, \cdots, 8$: 層位置，$K=I, II$: 基礎番号) を，展開の項数 N を横軸にとって示すもので，**Fig. 8** の (a) は基礎間距離 $x=4$, (b) は $x=3$ の場合である。この N は円筒が変形するときの円周における波の数に対応するもので，$N=0$ は法線方向の変形を，$N=1$ は平行移動を表わす。解の収束は $x=4$ では5次 ($N=5$) まで採れば十分であるが，$x=3$ では $N=9$ でもまだ完全に解は収束したとは言い切れなく，殊に，受振基礎 (Block II) では収束状態が悪い。これは，基礎の加振による基礎周辺地盤の変位は基礎に近い所では距離により著しく変化するが，基礎から遠ざかるに従がい緩やかになるため，隣りの基礎が接近するほど円筒基礎周辺の変形を円形に保つには高次の項まで評価することが要求されるからである。以下の計算例では展開項の次数を $x=3$ のときは $N=9$ (計算機の容量の都合上)，$x\geq 4$ では $N=6$ (CASE-A) または $N=5$ (CASE-B) とする。

Figs. 9 (a), (b) は連成系モデル CASE-A における加振基礎 (Block I) 上端の振幅特性 A_I^T および位相特性 ϑ_I^T，**Figs. 10** (a), (b) は同じモデルの受振基礎 (Block II) 上端の振幅特性 A_{II}^T と位相特性 ϑ_{II}^T であ

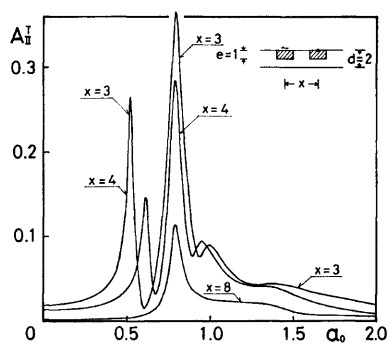


(a) Amplitude

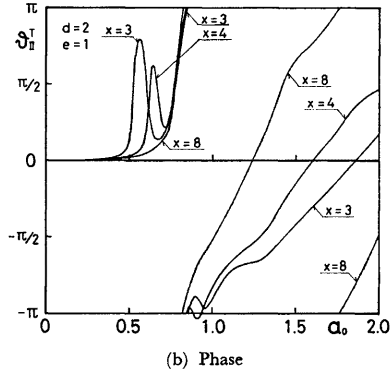


(b) Phase

Fig. 9. Dynamic characteristics of active foundation for CASE-A model.



(a) Amplitude

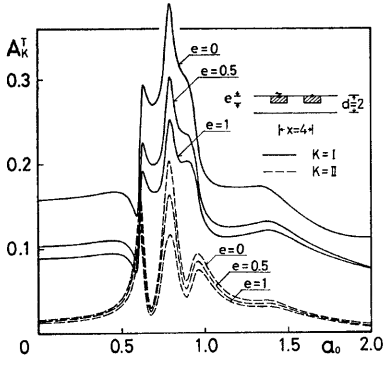


(b) Phase

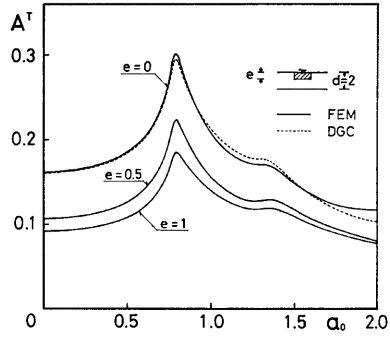
Fig. 10. Dynamic characteristics of passive foundation for CASE-A model.

り，横軸に無次元振動数 a_0 をとっている。図中の x は基礎間距離を示すパラメータであり，ここで $x=\infty$ とは受振基礎（Block II）が無限遠にある，すなわち加振基礎が単独に存在する状態であり，その振動特性を点線で示す。振幅特性 A_I^T は $a_0 \fallingdotseq 0.8$ ですべての x に対して山となっている。1次元重複反射理論から減衰のない厚さ d の層地盤（$\eta_P=\eta_S=0$）における剪断波の1次固有振動数は $\pi/2d$ であるから，層厚 $d=2$ の場合 $a_0=0.785$ がそれに対応する。$a_0=1.35$ 近傍での振幅特性 A_I^T の山は縦波に対する1次の共振である。加振基礎の振幅特性 A_I^T〔**Fig. 9 (a)**〕は基礎間距離 $x=8$ のとき単独基礎（点線）とあまり差はないが，$x=4, 3$ と近づくにつれ，層地盤の固有振動数近傍で差が現われ，殊に，剪断1次の固有振動数近傍では隣接基礎の影響が顕著に出る。加振基礎の位相特性 ϑ_I^T〔**Fig. 9 (b)**〕も隣接基礎の影響は $x=8$ まで離れるとほとんど見受けられないが，$x=3$では $a_0=0.5$ 近傍で，$x=4$ では $a_0=0.6$ 近傍で位相特性が負，すなわち加振力に対する応答の位相が進むという目立った現象が現われ，さらに，この振動数近傍では振幅特性 A_I^T, A_{II}^T は振動数の少しの変動に対しても大きく変わる。

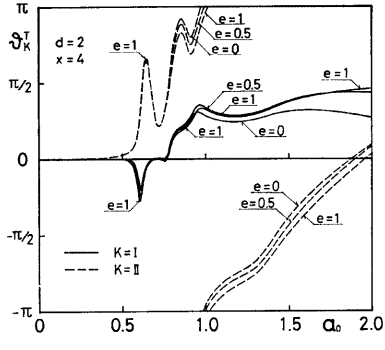
Figs. 11～18 は解析モデル CASE-B に対する振動特性（振幅および位相）を根入れ深さ e をパラメータとして示したもので，図の (a) は加振構造物（実線：Block I）および受振構造物（破線：Block II）の頂部



(a) Amplitude

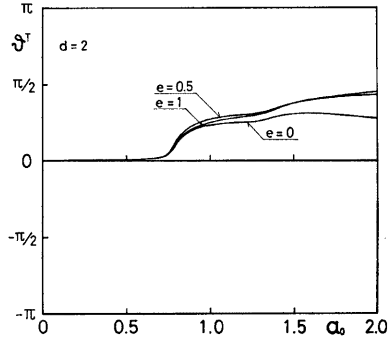


(a) Amplitude



(b) Phase

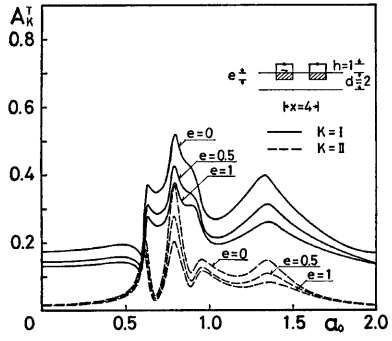
Fig. 11. Dynamic characteristics of coupled structures, CASE-B, $h=0$.



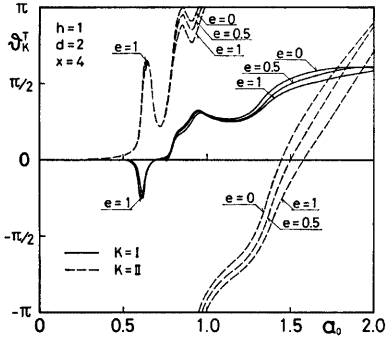
(b) Phase

Fig. 12. Dynamic characteristics of single structure, CASE-B, $h=0$.

における振幅特性 $A_K{}^T$ ($K=I, II$) を表わし，(b) は位相特性 $\vartheta_K{}^T$ を示す。**Figs. 11, 12** は，それぞれ上部構造高さ $h=0$ の連成および単独構造物における振動特性（振幅および位相特性）を示す。ここで，$h=0$ とは上部構造が無く，基礎の上端が丁度地表面と一致するまで根入れされた状態である。この場合，根入れ深さ e が小さくなるにつれ，加振，受振基礎〔**Fig. 11** (a)〕および単独基礎〔**Fig. 12** (a)〕の各振幅特性は大きくなるが，振動数に関する定性的な傾向は変わらない。ここで，$e=0$ とは基礎の部分がなく，一様な層地盤の表面を水平加振したときの加振領域（Block I）および受振領域（Block II）の振幅特性および位相特性に相当する。したがって，**Fig. 11** と **Fig. 12** の $e=0$ に対する振幅，位相特性は，解析する地盤モデルは同一で，ただ，前者は加振領域から距離 $x=4$ のところに半径 1.0 の仮想土柱が地表面から底まで埋込まれており，その側面の水平断面が常に円形を保持するとしているため，その拘束の影響が **Fig. 11** と **Fig. 12** の差として現われているのである。また，**Fig. 12** (a) の点線は DGC による解法で得られた振幅特性を示す。**Figs. 13, 14** は，それぞれ構造物高さ $h=1$ の連成および単独構造物における振動特性であり，この場合も $h=0$ と同様，e が小さくなるにつれ振幅特性は大きくなるが，振動数に関する定性的な特性は変わらない。連成構造物〔$x=4$, **Fig. 13**〕と単独構造物〔**Fig. 14**〕の振動特性を比べると，加振構造物の振幅特性および

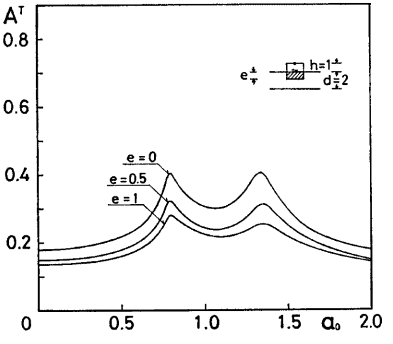


(a) Amplitude

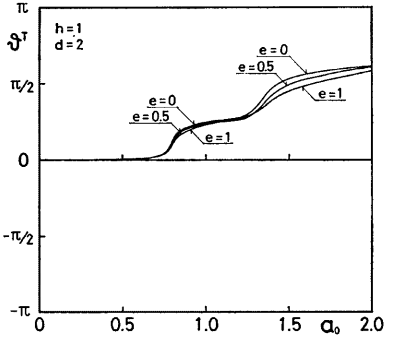


(b) Phase

Fig. 13. Dynamic characteristics of coupled structures, CASE-B, $h=1$.

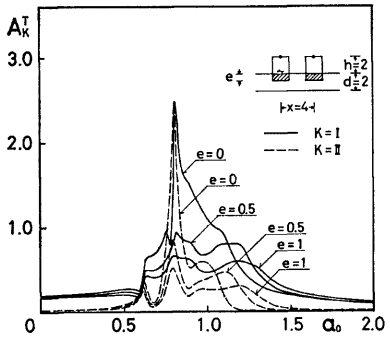


(a) Amplitude

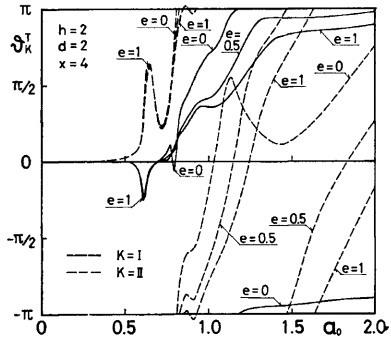


(b) Phase

Fig. 14. Dynamic characteristics of single structure, CASE-B, $h=1$.

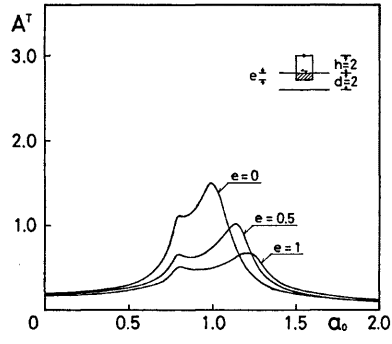


(a) Amplitude

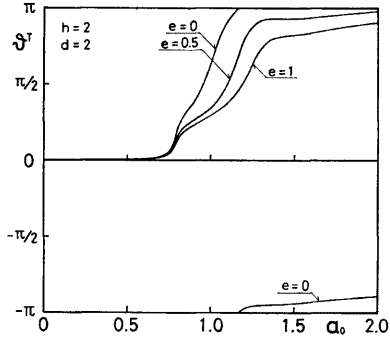


(b) Phase

Fig. 15. Dynamic characteristics of coupled structures, CASE-B, $h=2$.



(a) Amplitude

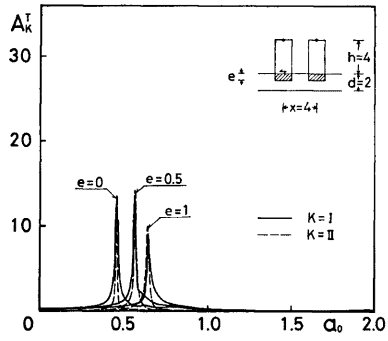


(b) Phase

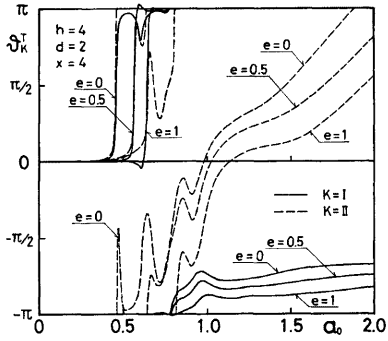
Fig. 16. Dynamic characteristics of single structure, CASE-B, $h=2$.

位相特性は層地盤の1次固有振動数を挟んだ $0.4 \leq a_0 \leq 1.2$ の振動数域で2つのグラフは異なっており，隣接構造物による影響の現われることがわかる。$h=2$〔**Figs. 15, 16**〕と構造物が高くなると根入れ深さ e により振動特性の振動数に関する性状が異なる。これは連成構造物〔**Fig. 15**〕に限らず，単独構造物〔**Fig. 16**〕についても言えることで，構造物が高くなると振動特性に与える根入れの影響は大きくなり，その上，構造物同士の連成が加わると根入れの影響はより一層顕著なものとなる。構造物が $h=4$〔**Figs. 17, 18**〕と更に高くなると，上部構造物の振動が大きく現われ，基礎のみの振動特性〔**Figs. 11, 12**〕に現われた連成による特徴が薄れる。すなわち，$a_0=0.4$ から1.2の振動数域でみられた円形土柱の拘束による振動特性の変化や $a_0=0.6$ 近傍での位相の進みが観察され難くなる。構造物の基礎が深く根入れされると，上部構造の転倒（回転）が地盤により拘束され，系の共振振動数は高くなる。この傾向を **Figs. 17 (a), 18 (a)** は示している。隣接構造物との連成による効果は加振構造物の振幅特性を1/2～1/3に減少させるが，受振構造物の共振振幅を増加させ，$e=0.5, 1$ では加振構造物の共振振幅よりも大きくさせる。ところが，共振振動数に与える構造物連成の影響は少なく，$e=1$ で共振振動数が連成により僅かに低くなる程度である。

Figs. 19 (a)～(d) は解析モデル CASE-B, $h=1$ に対する加振，受振構造物の深さ方向に沿った振動モー

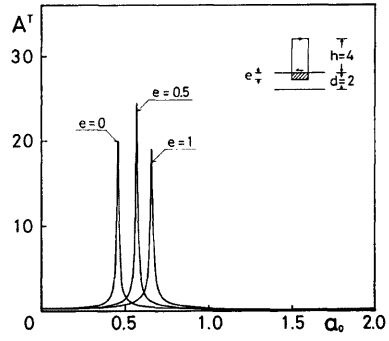


(a) Amplitude

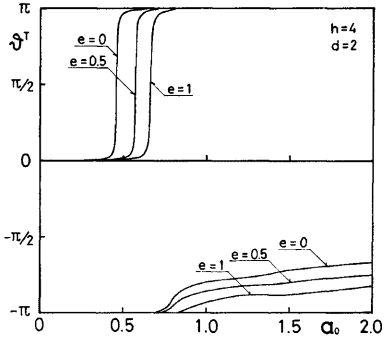


(b) Phase

Fig. 17. Dynamic characteristics of coupled structures, CASE-B, $h=4$.



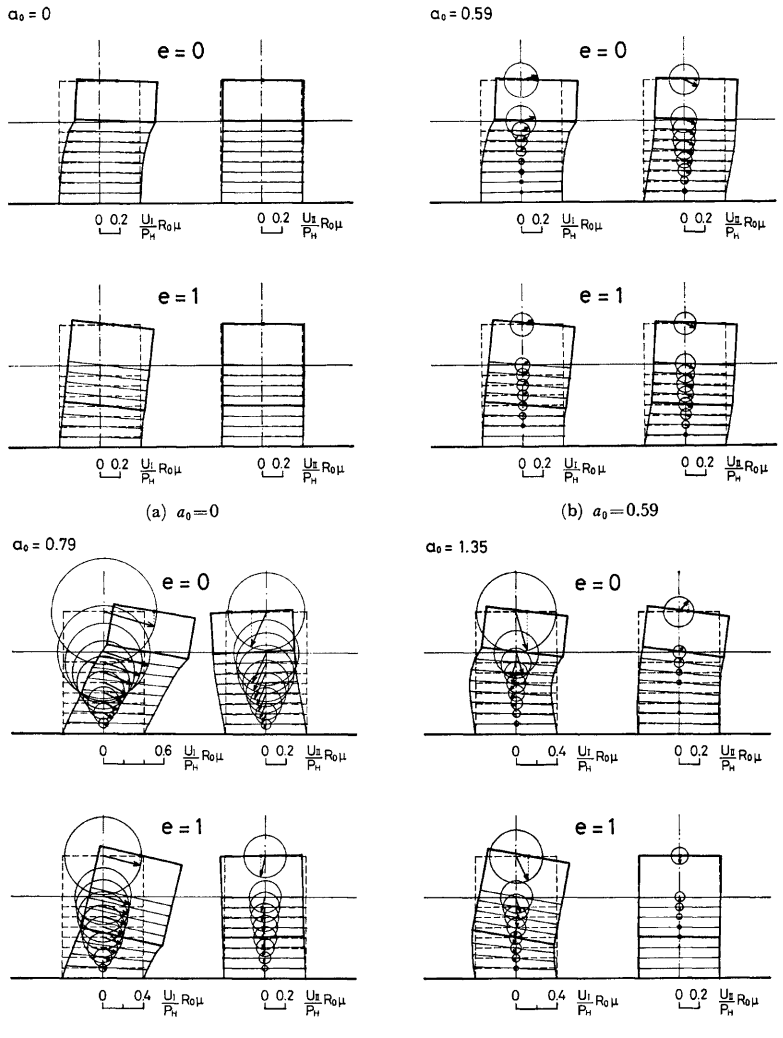
(a) Amplitude



(b) Phase

Fig. 18. Dynamic characteristics of single structure, CASE-B, $h=4$.

ドを示す。この連成モデルは **Fig. 13** で扱かったモデルと同じである。ここでは，(**a**) $a_0=0$; static, (**b**) $a_0=0.59$; 振幅特性が極小値をつける，(**c**) $a_0=0.79$; 層地盤の剪断1次固有振動数，および (**d**) $a_0=1.35$; 層地盤の縦波1次固有振動数，に対する振動モードで，根入れ深さ $e=0$ と $e=1$ の場合を示す。加振方法も **Fig. 13** と同様で，加振構造物の地表面レベルで水平方向に加振する。図中の円内に記された矢印の水平軸からの角度が位相であり，時刻と共に反時計まわりに回転し，1周期で1回転する。各振動数毎の4つのモードのうち，上2つは根入れ深さ $e=0$，下2つは $e=1$ の場合で，左は加振構造物 (Block I)，右は受振構造物 (Block II) の振動モードを表わす。根入れが無い場合 ($e=0$) には加振構造物下の土柱が地表面まであるため，土柱の剪断変形が目立つが，根入れがある ($e=1$) と，構造物（上部構造物および根入れ部）の剛性を地盤に比べ相当高くとっているため構造物は剛体としての挙動を示すにすぎず，剪断変形は土柱の部分だけで少ない。しかし，回転成分は構造物高さ $h=1$ の場合，一般に $e=0$ よりも $e=1$ と根入れされている方が大きく出ている。ついで，深さ方向に沿っての位相のずれをみる。層地盤の剪断1次固有振動数近傍かそれより低い振動数域に限ると，加振構造物においては上部構造および基礎の部分ではほとんど同位相であるのが，土柱部分では下の層ほど位相は大きくずれる。しかし，受振構造物における土柱部分の位相は各層がほとんど同じである。ところが，先の振動数より高いところ ($a_0=1.35$) では，加振・受振構造物共土



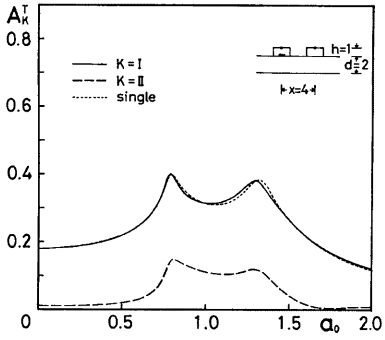
(a) $a_0=0$　(b) $a_0=0.59$

(c) $a_0=0.79$　(d) $a_0=1.35$

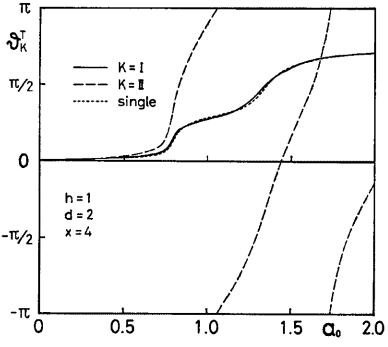
Fig. 19. Vibrational modes along vertical direction.

柱部分は下にいくほど位相のずれが大きくなり，さらに加振構造物の剛性の高い上部構造および基礎の部分でさえ位相のずれがみられる。これより構造物の回転中心が時刻と共に移動していることがわかる。

Figs. 20, 21 は Dynamical Ground Compliance を地盤の動特性とし，2つの剛体構造物（距離 $x=4$）における連成振動の解析から得られた（a）振幅特性および（b）位相特性を示すグラフである。ここで，**Fig.**

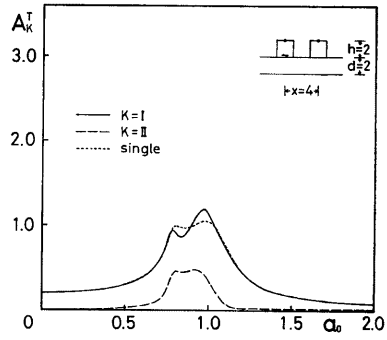


(a) Amplitude

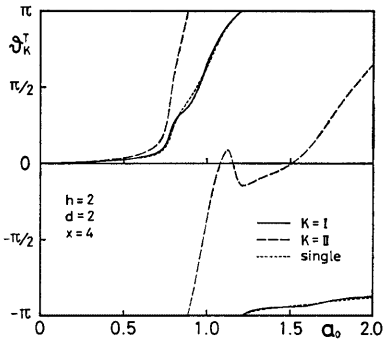


(b) Phase

Fig. 20. Dynamic characteristics of coupled structures by means of DGC, $h=1$.



(a) Amplitude



(b) Phase

Fig. 21. Dynamic characteristics of coupled structures by means of DGC, $h=2$.

20 は構造物高さ $h=1$, **Fig. 21** は $h=2$ の場合で，実線は加振構造物，破線は受振構造物，また点線は単独構造物のそれぞれ頂部における振幅特性と位相特性を表わす。Dynamical Ground Compliance は地表面の正方形領域を加振するとして求めているので，ここの振動特性は構造物が地表面にじかに接して建っている状態（$e=0$）に相当する。すなわち，**Fig. 20** の振幅および位相特性は FEM の解法による **Figs. 13, 14** の $e=0$ の場合に，**Fig. 21** は **Figs. 15, 16** の $e=0$ に対応する。ただし，**Figs. 13～16** で扱かった FEM による上部構造モデルは剛体でなく，剪断剛性を 60μ（μ は地盤の剪断剛性），ヤング係数 135μ，質量 0.25ρ（ρ は地盤の密度）の円筒構造物としており，**Figs. 20, 21** の剛体モデル（剛性無限大，質量 $0.25\rho\times\pi/4$）とは少々異なっている。FEM による振幅特性，位相特性と DGC によるそれらとを比較すると，単独構造物では殆んど似た特性を示しているのに対し，連成構造物では層地盤の剪断1次固有振動数を挟む $a_0=0.4$ から 1.2 の振動数域で差異がみられる。これは FEM による解法では構造物下の土柱部分が常に円形を保持しながら挙動すると仮定したためで，土柱部分が円形を保つような基礎地盤に支えられた構造であれば FEM による解となり，逆に，土柱部分で円形を保持せず，かつ，構造物底面でも地盤がすべりを起こし拘束されなければ DGC による解となるものと思われる。

4. ま と め

一般に，建築構造物は広い敷地内に孤立して建てられていることは稀で，その周囲に他の構造物が近接して建っており，地震時には隣接構造物と連成する場合が多い。また，建築物は構造上，基礎や地下室等その一部分が地中に埋設されている。土木構造物に見られる堤防やトンネル等の長い構造物では，2次元問題としての解析で十分なものも多いであろうが，建築構造物は長さが限られており，3次元問題としての解析を必要とするものがほとんどである。これらの条件を満たすモデルとして，ここでは2個の根入れのある円筒形構造物が相互に連成する場合の振動特性を3次元的な扱いで解析した。解析方法としては，根入れのある連成構造物の3次元的解析を波動論のみで行なうには困難があるため，地盤－基礎を薄層に分割して水平方向には波動論を，鉛直方向には有限要素法を適用し，さらに，2つの構造物の連成に関しては各構造物に対し局所座標系を設定し，座標変換によりそれらを接続する方法を用いた。

以下に根入れ構造物相互の連成がその振動特性に及ぼす影響についてまとめる。

（1） 構造物の振動特性に及ぼす隣接構造物の影響は構造物が接近すればする程当然大きく現われるが，構造物半径の8倍まで離れると隣りの構造物の影響はほとんど無い。

（2） 埋設構造物のみの場合や上部構造が低く軽い場合には，構造物同士が連成すると層地盤の剪断1次固有振動数近傍で隣接構造物の影響を非常によく受け，共振振幅は構造物間の連成により増幅される。基礎下の土柱断面が常に円形を保持するならば，根入れの効果は，振幅特性，位相特性の定性的な性状にはあまり変化を与えないが，定量的には根入れが深いほど振幅特性は小さくなる。

（3） しかし，Dynamical Ground Compliance を地盤の動特性とし，根入れがなく，かつ，基礎下の地盤に拘束を与えない構造物同士の連成による影響と根入れ構造物のそれとを比較すると，層地盤の剪断1次固有振動数近傍で隣接構造物による影響に顕著な差異がみられ，基礎下地盤の拘束条件により構造物の振動特性に及ぼす連成効果は異なったものとなる。

（4） 上部構造が高くなると，加振構造物の共振振幅は構造物同士の連成による影響を受け相当低減されることがある。また，根入れが深くなるほど地盤による構造物の固定度が増すため，共振振動数は高くなる。

以上は構造物が steady-state な振動をする場合の隣接構造物の影響を検討したものであるが，これらの結果から，市街地でみられるような近接した構造物群は地震を受けると周囲の建物と連成して，それらが単独に孤立しているときの応答とは異なった挙動をするものと考えてよいだろう。したがって，構造物の耐震設計においては，構造物間の連成による影響は見逃せない要素となるものと思われる。

なお，本研究は昭和52年度科学研究費補助金〔総合研究（A）〕の一部を使用して行なったものである。最後に，数値計算は京都大学大型計算機センターの FACOM M-190 を利用したことを付記する。

参 考 文 献

1） 小堀鐸二・南井良一郎・日下部馨：弾性地盤上の剛体系の連成振動について，日本建築学会近畿支部研究報告集，構造・材料・施工，昭和46年5月，pp. 13-16.

2） Kobori, T.: Random Vibrations of Structure-Foundation Interaction System, Proc. of the 3rd U. S.-Japan Joint Seminar on Stochastic Methods in Dynamical Problems, 1971.

3） Kobori, T., R. Minai and K. Kusakabe: Dynamical Characteristics of Soil-Structure Cross-Interaction System, The Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., Vol. 22, Feb., 1973, pp. 111-151.

4） Kobori, T. and R. Minai: Dynamical Interaction of Multiple Structural Systems on a Soil Medium, Proc., of the 5th World Conference on Earthquake Engineering, Session 6A, June, 1973.

5） 小堀鐸二・南井良一郎・日下部馨：粘弾性層地盤上の構造物群の振動特性，関東地震50周年記念地震工学シンポジウム，1973年8月，pp. 195-202.

6） 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木 有・日下部馨：起振機試験による 基礎構造の振動特性――（その2）隣接基礎の影響について――，京都大学防災研究所年報，第17号 B，昭和49年4月，pp. 139-156.
7） Kobori, T., R. Minai and K. Kusakabe: Dynamical Cross-Interaction between Two Foundations, Proc. of the 6th World Conference on Earthquake Engineering, Session 4, Jan., 1977, pp. 31-36.
8） Warburton, G. B., J. D. Richardson and J. J. Webster: Forced Vibrations of Two Masses on an Elastic Half-Space, Journal of Appl. Mech., Vol. 37, No. 1, 1971, pp. 148-156.
9） Lee, T. H. and D. A. Wesley: Soil-Structure Interaction of Nuclear Reactor Structures Considering through Soil Coupling between Adjacent Structures, Nuclear Engineering and Design, Vol. 24, 1973, pp. 374-387.
10） MacCalden, P. B. and R. B. Matthiesen: Coupled Response of Two Foundations, Proc. of the 5th World Conference on Earthquake Engineering, Session 5A, June, 1973.
11） Luco, J. E. and L. Contesse: Dynamic Structure-Soil-Structure Interaction, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 63, No. 4, August, 1973, pp. 1289-1303.
12） Wong, H. L. and M. D. Trifunac: Two-Dimensional Antiplane Building-Soil-Building Interaction for Two or More Buildings and for Incident Plane SH Waves, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 65, No. 6, December, 1975, pp. 1863-1885.
13） 田治見宏：有限要素法による動的相互作用の解析，文部省科学研究費自然災害特別研究研究成果，No. A-50-4, 海岸埋立地域の地盤動特性と震害対策，代表者 梅村魁，1975，pp. 65-82.
14） 田治見宏・下村幸男：3次元薄層要素による建物－地盤系の動的解析，日本建築学会論文報告集，第243号，昭和51年5月，pp. 41-51.
15） 森口繁一・宇田川銈久・一松 信：数学公式 III ――特殊函数――，岩波全書，1960.