

ヤング図形の極限形状とゆらぎにまつわる漸近的組合せ論

洞 彰人 Akihito Hora^{*1}

(岡山大学 Okayama University)

はじめに

よく知られているように, Young グラフ (Young 束) は, 対称群の既約表現の誘導と制限の分岐則を記述する. あらゆる分岐則 (あるいは分解) にはそれぞれ確率論が付随していると少々楽観的に考えてみれば, このきわめて良質の分岐構造の中にももしろい確率論がない訳はない. 本講演では, Young グラフに沿ってランダムに成長する図形 (ダイアグラム) をいろいろと異なる倍率のメガネで観察したときの様子について, サーベイを行った. この方面における私の貢献はささやかなものなので, それには拘泥せず, 主としてロシアの人々による結果の紹介を中心にお話した. 本稿はその流れにしたがっているが, 講演では少し触れただけの話題も, 第3節として加えた. 用語の説明が不十分かもしれず, 証明にもあまり言及していないが, 案内パンフレットのような感じで気軽に一瞥していただくと幸いである. また, 図が手書きのもので見苦しく, 文献も全く不十分で, 引用が的確でない箇所が多々あることもどうか御容赦願いたい.

謝辞 興味深い研究会にお誘いくださり, 勉強と講演の機会を与えてくださった岡田聡一氏, 五味靖氏に感謝します. 本講演のプランを作成するにあたって, [IO] がたいへん役に立ちました. 未脱稿のプレプリント [IO] をくださった G. Olshanski 教授に感謝します.

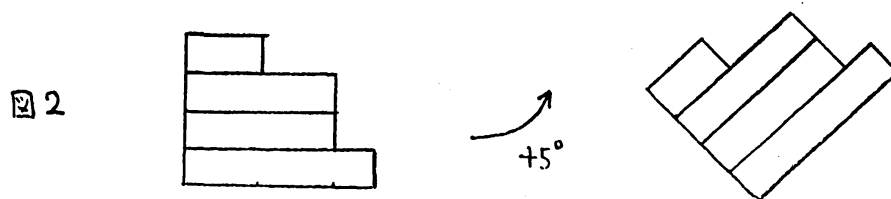
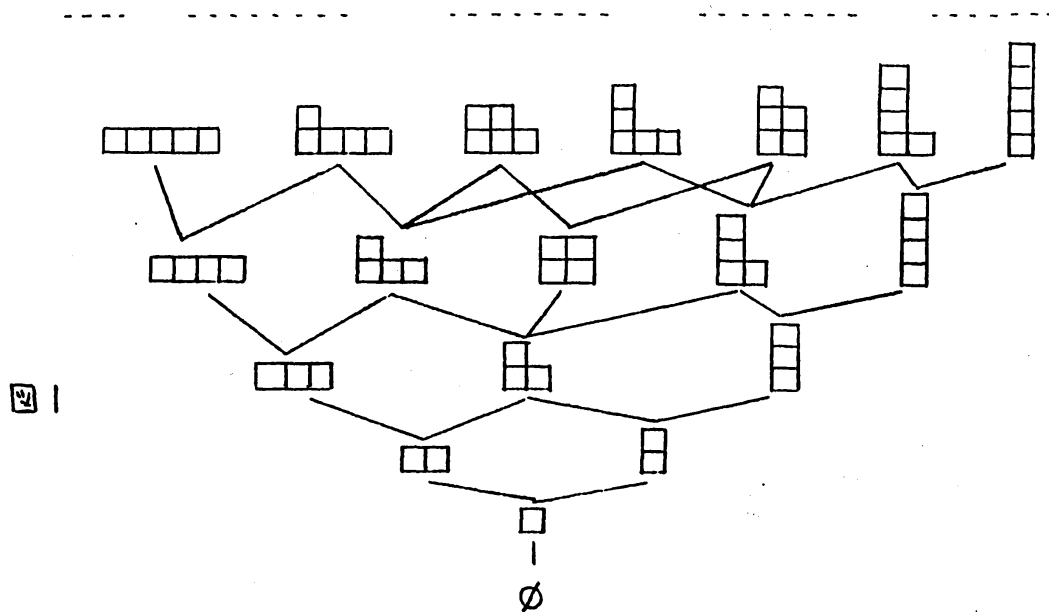
1 概 観

次ページの図1のように, 空図形 $\emptyset$ から始まってセルをどんどん積み重ねて Young グラフを作る. このグラフの無限の彼方における漸近挙動をスケーリング極限を通して読み取るのが, 本稿のテーマである.

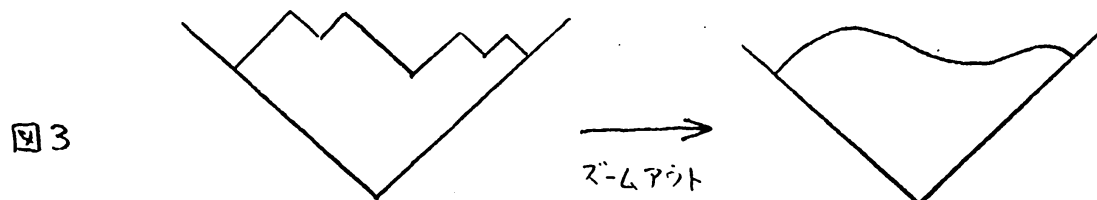
まず, Young 図形の記述の仕方に関する注意から始めよう. 成長する Young 図形の形状を定量的に捉えるには, その境界 (界面) に着目すると便利である. 境界を関数で表す

^{*1} hora@ems.okayama-u.ac.jp

ために、図2のように45度回転した状態で表示する。ある人はこれをロシア式と呼ぶ。Young図形に入れるべき座標については後述する。



さて、元々のスケールでは、Young図形の境界のギザギザが見えているのだが、セルの数をどんどん増やすと同時にズームアウトすると、粗視化されてなだらかになる(図3)。ズームアウトの倍率が異なれば、当然違った世界が見えるであろう。どのように違う状況が現れるか、そしてそれにもかかわらず共通の性質があるとすれば、それは何か、というようなことを見ていきたい。

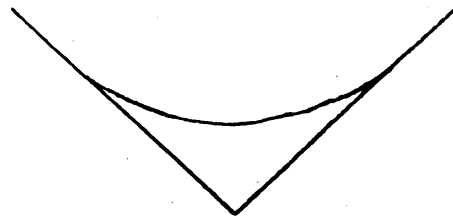


本稿では、セルの数 n に対する 2 種類のスケール: $1/n$ と $1/\sqrt{n}$ の場合を議論する。

$1/\sqrt{n}$ -スコープ

図 3 において、縦横 $1/\sqrt{n}$ 倍のズームアウトをしながらセル数 n を無限大にもっていく。このとき、Young 図形の面積が一定に保たれる。後述する Plancherel 統計にしたがってセルを積んでいけば、圧倒的な確率で図 4 のような極限形状 (2.1 節の式 (1)) が現れる。Logan-Shepp と Vershik-Kerov が同時期に独立にこのことを示した。2.1 節参照。

図 4



極限形状のゆらぎ 図 4 の形状が観測されるような視点に立てば、それより小さなスケールは、元々のものを含めて、Young 図形のゆらぎを記述すると考えられる。このあたりは、ランダム行列の固有値分布のゆらぎと直接間接につながりを持ち、発展が目覚ましい。名前を挙げると、Borodin, Okounkov, Olshanski, Baik, Deift, Johansson, Tracy, Widom, 本稿では触れないが、界面モデルとしての解析も研究されている*2。第 2 節で、次の 3 つの域でのゆらぎの様子をそれぞれ論じる。

- Young 図形の中ほどで局所的に (2.2.1 節)
- Young 図形の端っこで局所的に (2.2.2 節)
- Young 図形全体を見渡して (2.2.3 節)

上 2 つは点過程により、3 つめは確率超過程 (あるいはランダム Fourier 級数) により記述される。

自由確率論との関わり Young 図形のこのスケール ($1/\sqrt{n}$) での粗視化が Voiculescu の自由確率論と深いつながりを持つことが、Kerov と Biane によって示された。2 つを結ぶ橋は、Jucys-Murphy 作用素である。対称群 $S(n)$ の既約表現の制限・誘導・テンソル積の既約分解において、 n が非常に大きいところでは、それぞれ特定の図形に近い既約成分がある意味で支配的な大きさを占める。これはまさに、大数の法則によってランダムさ

*2 半田賢司氏に教えていただいた。深謝。

が消えるのと同じ集中現象である。その特定の既約成分を取り出す方法が、自由確率論のいくつかの操作によって与えられる。この辺の背景を 3.1 節で少し述べる。

1/n-スコープ

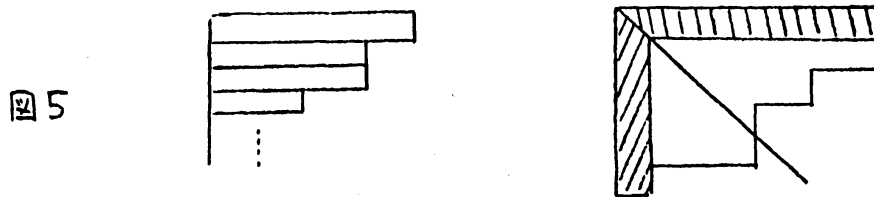
今度は、図 3 において、縦横 $1/n$ 倍のズームアウトをしながらセル数 n を無限大にもっていく。このスケーリング極限で生き残る Young 図形は、いわゆる Vershik-Kerov 条件で特徴づけられる。それは、無限対称群の (von Neumann の意味の) 指標をパラメトライズする (無限次元の) Thoma 単体の組合せ論的な意味づけを与える。Thoma 単体は Young グラフの Martin 境界と同一視され、無限対称群上の調和解析と Young グラフ上のポテンシャル論に発展する。名前を挙げると、Thoma, Vershik, Kerov, Olshanski, 平井, Borodin, 3.2 節で少し述べる。なお、この $1/n$ -スコープでは、さきほどの $1/\sqrt{n}$ -スコープで見た景色はすべて、無限対称群の正則表現のいわば無限小近傍に退化してしまっていて見えない*3。

Young 図形の座標

Young 図形を R 上の点配置または (Lipschitz 連続) 関数として扱うために、いくつかの座標を導入する。

(A) 行座標 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots)$: これは、図 5 のように Young 図形を配置したときの行の長さを並べたものである。 λ_i のかわりに $\lambda_i - i + (1/2) \in \mathbb{Z} + 1/2$ をとったものをシフト行座標と呼ぶ。

(B) Frobenius 座標 $\lambda = (a_1, \dots, a_d | b_1, \dots, b_d)$: ただし $d = d(\lambda)$ は対角線の長さで、 $a_i = \lambda_i - i + (1/2)$, $b_j = \lambda'_j - j + (1/2)$ ($i, j = 1, 2, \dots, d$)。ここに、 λ' は λ の転置図形。 $1/2 = \text{“1 セルの面積の半分”}$ で補正している点に注意。



Frobenius 座標とシフト行座標との相補関係は図 6 に見られるとおりである。

(C) 山谷座標 $\lambda = (x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n)$: ここに、 x_i, y_j はそれ

*3 10 年ほど前、雑談のおりに、橋爪道彦氏から「無限対称群の表現までいくと、対称群の表現のおもしろいところが結構抜け落ちていく ...」旨伺ったことがある。先生の御指摘には、このあたりの雰囲気も含まれていたのかもしれないと推測される。

ぞれ, 図 7 にあるように, Young 図形の界面の極小点と極大点の横座標である. この座標名は, 本稿だけの暫定的なもののご了解願いたい. 任意の Young 図形の山谷座標は

$$\sum_i x_i - \sum_j y_j = 0$$

をみたす. また, 山谷座標が整数値になる方が扱いやすいので, Young 図形のロシア式斜め表示ではセルの一边の長さは $\sqrt{2}$ に補正しておく.

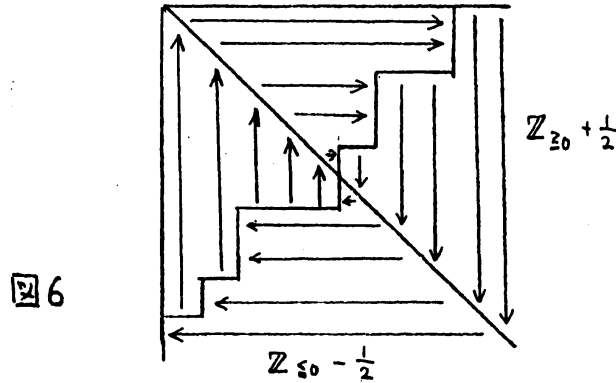


図 6

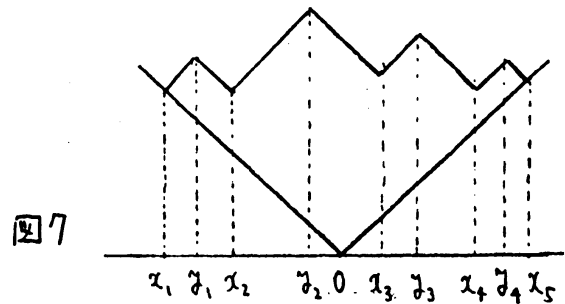


図 7

2 極限形状とそのゆらぎ

2.1 極限形状

Young 図形全体を $\mathbb{Y}$ で表す. $\lambda \in \mathbb{Y}$ のセルの数を $|\lambda|$ と書く. セル数で層化して

$$\mathbb{Y} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n, \quad \mathbb{Y}_n = \{\lambda \in \mathbb{Y} \mid |\lambda| = n\}, \quad \mathbb{Y}_0 = \{\emptyset\}$$

と書いておく. $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に対応する対称群 $S(n)$ の既約表現の次元を $\dim \lambda$ とする. $\emptyset$ から出発する Young グラフ上の道: $\emptyset \nearrow \lambda^{(1)} \nearrow \dots \nearrow \lambda^{(n)} \nearrow \dots$ ($\lambda^{(n)} \in \mathbb{Y}_n$) 全体を $\mathfrak{T}$ で表す. $\mathfrak{T}$ は Young 盤全体と思ってもよい. シリンダー集合から定まる自然な可測構造を $\mathfrak{T}$ に入れる. $\mathfrak{T}$ 上の測度についてはまた第 3.2 節で触れるが, ここでは Plancherel 測度の定義のみ述べる. $t \in \mathfrak{T}$ のレベル n にあたる Young 図形を $t(n)$ と書くことにする. シリンダー集合

$$\{t \in \mathfrak{T} \mid t(1) = \lambda^{(1)}, \dots, t(n) = \lambda^{(n)}\}$$

に値 $\dim \lambda^{(n)} / n!$ を割り当てると, $\dim$ が $\emptyset$ からの道の数に等しいことから, 無矛盾に $\mathfrak{T}$ 上の確率測度 M が定まる. また,

$$M_n(\lambda) = M(\{t \in \mathfrak{T} \mid t(n) = \lambda\}) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!} \quad (\lambda \in \mathbb{Y}_n)$$

によって $\mathbb{Y}_n$ 上の確率測度 M_n が定まる. これらをそれぞれ $\mathfrak{T}$, $\mathbb{Y}_n$ 上の Plancherel 測度と呼ぶ. $\mathbb{Y}_n$ を $S(n)$ の双対と思えば, Fourier 解析の言葉づかいと同じである.

Young 図形をその境界から定まる Lipschitz 連続な関数として捉え, より広いクラス

$$\mathbb{D} = \{\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid |\omega(x_1) - \omega(x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \omega(x) = |x| \text{ for large } |x|\}$$

の中で考える. $\mathbb{D}$ の元を連続 (Young) 図形と呼ぶ. $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ を縦横 $1/\sqrt{n}$ 倍した $\mathbb{D}$ の元を $\bar{\lambda}$ と書く:

$$\lambda \in \mathbb{Y}_n \mapsto \bar{\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda(\sqrt{n}x) \in \mathbb{D}.$$

Logan-Shepp [LS] と Vershik-Kerov [VK1] が独立に, Young 図形の極限形状が

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2} \right) & (|x| \leq 2) \\ |x| & (|x| > 2) \end{cases} \in \mathbb{D} \quad (1)$$

で与えられることを示した. ここでは, 次の形で述べておく.

定理 1 Plancherel 測度に関する確率収束の意味で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\bar{\lambda}(x) - \Omega(x)| = 0,$$

すなわち

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\{\lambda \in \mathbb{Y}_n \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |\bar{\lambda}(x) - \Omega(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

が成り立つ. □

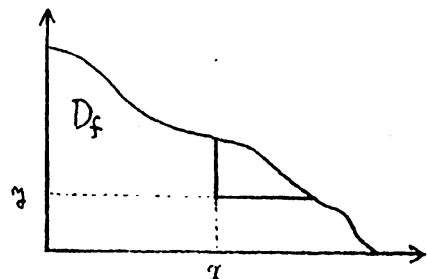
式 (1) の $\Omega(x)$ は, 変分問題の解として特徴づけられる (Stanley の問題). 図 8 のように, 連続図形を関数 $y = f(x)$ のグラフで表示しよう. 今考えているスケーリングでは, Young 図形の面積が一定に保たれるのであった. 中の領域 D_f 内の点 (x, y) において,

$$h_f(x, y) = f(x) - y + f^{-1}(y) - x$$

はフックの長さの連続版とみなせる. 既約表現の次元に関するフック公式から, Plancherel 測度ではかって最も尤もらしいのは, フックの積が最小の図形である. したがって, (対数をとれば) 次の変分問題になる:

$$\begin{aligned} & \langle \int \int_{D_f} dx dy = 1 \text{ のもとで} \\ & H(f) = \int \int_{D_f} \log h_f(x, y) dx dy \\ & \text{を最小化せよ} \rangle. \end{aligned}$$

図 8



講演では, Ivanov-Olshanski [IO] にしたがって 定理 1 の証明の概略および関連する方法を紹介した. 詳細は省略するが, Kerov-Olshanski [KO] によって導入された $\mathbb{Y}$ 上の多項式関数のなす代数 $\mathbf{A}$ において, 幾種類かの生成元の間の変換則を決めていく作業が主である.

$\lambda \in \mathbb{Y}$ の Frobenius 座標 $(a_1, \dots, a_d | b_1, \dots, b_d)$ を用いて

$$\Phi(z; \lambda) = \prod_{i=1}^d \frac{z + b_i}{z - a_i} \quad (z \in \mathbb{C})$$

と表される z の関数 $\Phi(z; \lambda)$ の Laurent 係数 (と 1) で生成される $\mathbb{R}$ 上の代数が $\mathbf{A}$ である. [IO] では, $\mathbf{A}$ の生成元として, 次の 3 つのものが論じられている.

$$p_k(\lambda) = \sum_{i=1}^d \{a_i^k - (-b_i)^k\} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$\bar{p}_k(\lambda) = \sum_{i=1}^m x_i^k - \sum_{i=1}^{m-1} y_i^k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$p_k^\#(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|^{\downarrow k} \chi_{(k, 1^{|\lambda|-k})}^\lambda / \dim \lambda & \text{if } |\lambda| \geq k \\ 0 & \text{if } |\lambda| < k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

(式中の記号の説明. 式 (2), (3) では, それぞれ Young 図形が Frobenius 座標, 山谷座標で表されている. 式 (4) 中では, χ^λ は λ に対応する既約指標, $(k, 1^{n-k})$ は $S(n)$ の中の k -サイクルのなす共役類, および $n^{\downarrow k} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$.)

式 (3) は Young 図形の形状を捉えるのに便利であり, 式 (4) は Plancherel 測度と相性が良い. 式 (2) はこの両者を取り持つ役割を果たす. 特に, $\mathbf{A}$ に導入されるフィルトレーションに関する主要項どうしの変換則が重要である. これらの変換則を用いて, まず少し弱い次の形の定理を示す.

定理 2 Plancherel 測度に関する確率収束の意味で

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (\bar{\lambda}(x) - \Omega(x)) x^k dx = 0$$

が成り立つ. □

定理 2 は, 局所凸線型位相空間の一般論を援用することによって, 定理 1 の形に精密化

2.2 極限形状のゆらぎ

$1/\sqrt{n}$ でズームアウトしてランダムな Young 図形の極限形状を捉えた。今度はそこから逆にズームインして、ゆらぎの性質をつかまえよう。講演では、主に Borodin-Okounkov-Olshanski [BOO] と Ivanov-Olshanski [IO] にしたがって、紹介を行った。まず、少しだけ確率論の用語を補充しておく。

今、状態空間 $\mathfrak{X}$ として $\mathbb{R}, [-1, 1] \setminus \{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} + 1/2$ などを考える。 $\mathfrak{X}$ の部分集合 X が $\mathfrak{X}$ の任意のコンパクト集合と有限の共通部分しかもたないとき、 X は (点) 配置と呼ばれる。コンパクト集合との交わりを数える関数によって、点配置全体には自然に可測構造が入る。ランダムな点配置を $\mathfrak{X}$ 上の点過程と呼ぶ。なお、ここでは多重点を持たない点過程のみ考えている。点過程の n -相関関数とは、

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \text{Prob}(\{X \subset \mathfrak{X} \mid X \text{ が } x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n \text{ と交わる}\})$$

で定まる $\mathfrak{X}^n$ 上の関数である。(Prob は確率を表す。) 特に $\mathfrak{X}$ が $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z} + 1/2$ のように離散的ならば、

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \text{Prob}(\{X \subset \mathfrak{X} \mid X \supset \{x_1, \dots, x_n\}\}) .$$

ある 2 変数関数 $\mathcal{K}(x, y)$ によって n -相関関数が

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det[\mathcal{K}(x_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,n}$$

というふうに行列式で表示されるような点過程を行列式 (点) 過程^{*4}と呼ぶ。行列式過程においては、あらゆる次数の相関関数、したがって点過程のすべての情報が、核 $\mathcal{K}(x, y)$ という 2 変数関数に凝縮されている。ランダム行列の GUE に現れるサイン核が最も有名である。 $\mathcal{K}$ を核にもつ積分作用素

$$(Kf)(x) = \int \mathcal{K}(x, y) f(y) dy$$

によって、点配置の間隙の分布、すなわち区間 J に点がない確率が

$$\text{Prob}(\{X \mid X \cap J = \emptyset\}) = \det(I - K|_J)$$

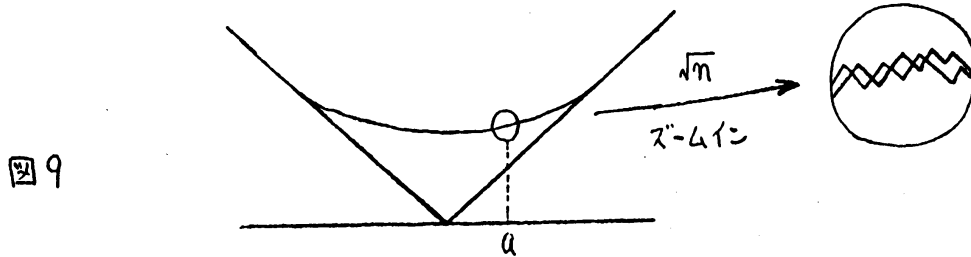
で与えられる。ただし、 $\cdot|_J$ は $L^2(J)$ に作用することを意味する。

以下本節で、視点を変えた 3 つの区域におけるゆらぎを見る。

^{*4} determinantal (point) process を直訳してみたが耳慣れないかもしれない。

2.2.1 中ほどでのゆらぎ

図9のように, 極限形状の両端からはちょっと離れた点に焦点を当て, $\sqrt{n}$ のオーダーでズームインしてみる. そうすると, Young 図形の元々のギザギザの界面がゆらいでいるのが見える (であろう). これらの Young 図形からできる点配置の確率的な性質を観察すれば, ゆらぎが定量的に記述できる.



$\lambda \in \mathbb{Y}$ の Frobenius 座標が $(a_1, \dots, a_d | b_1, \dots, b_d)$ のとき

$$\text{Fr}(\lambda) = \{-b_1, \dots, -b_d, a_d, \dots, a_1\}$$

という点配置を対応させる. Plancherel 測度 M_n ではかったこの点配置の相関関数 (ただし変数の順序は考慮外)

$$\rho(n, X) = M_n(\{\lambda | X \subset \text{Fr}(\lambda)\}) \quad (X \subset \mathbb{Z} + 1/2)$$

を考える. 図9の状況で $a \in \mathbb{R}$ の近くのゆらぎを見るには, 任意の $s \in \mathbb{N}$ に対して, s 点配置

$$X(n) = \{x_1(n), x_2(n), \dots, x_s(n)\} \text{ such that } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_i(n)}{\sqrt{n}} = a \quad (\forall i = 1, \dots, s)$$

の相関の漸近挙動: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, X(n))$ を調べればよい. さらに, マクロに見て離れた2点 $a < b \in \mathbb{R}$ での相関は, もう1つ点配置

$$Y(n) = \{y_1(n), y_2(n), \dots, y_{s'}(n)\} \text{ such that } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_i(n)}{\sqrt{n}} = b \quad (\forall i = 1, \dots, s')$$

をとって $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, X(n) \cup Y(n))$ を調べればわかる.

Borodin-Okounkov-Olshanski は次の結果を示した. (核の定義は定理の後に.)

定理 3 [BOO] 上の状況で, $d_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_j(n) - x_i(n)) < \infty$ ($i, j = 1, \dots, s$) とおく. $X(n)$ が 0 を跨がない, すなわち $\mathbb{Z}_{\geq 0} + 1/2$ または $\mathbb{Z}_{\leq 0} - 1/2$ のどちらかに含まれているとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, X(n)) = \det[S(d_{ij}, |a|)]_{i,j=1,\dots,s}$$

が成り立つ. $X(n)$ が 0 を跨ぐときは, 十分大きな n に対して $X(n)$ が正負同数の点から成るとすると (このとき必然的に $a = 0$),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, X(n)) = \det[\mathcal{D}(x, y)]_{x, y \in \lim X(n)}$$

が成り立つ.

また, マクロに離れた 2 点 a, b におけるゆらぎは独立である: すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, X(n) \cup Y(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, X(n)) \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, Y(n))$$

が成り立つ. □

上の定理中の $S(k, a)$ ($k \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}$) および $\mathcal{D}(x, y)$ ($x, y \in \mathbb{Z} + 1/2$) の定義は次のとおり. S は離散的サイン核と呼ばれるらしい.

$$S(k, a) = \frac{\sin(k \arccos(a/2))}{\pi k} \quad (k \in \mathbb{Z}, a \in [-2, 2]).$$

特に $k \in \mathbb{N}$ ならば, 第 2 種の Chebychev 多項式

$$U_{k-1}(\cos \theta) = \sin(k\theta) / \sin \theta \quad (k \geq 1)$$

を用いて

$$S(k, a) = \frac{\sqrt{4-a^2} U_{k-1}(a/2)}{2\pi k}$$

と書ける. 特に

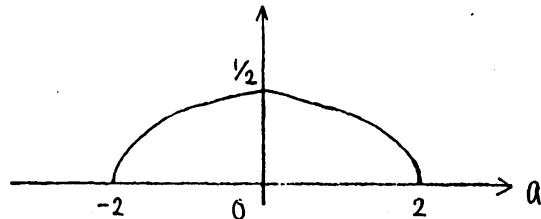
$$S(0, a) = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{a}{2}, \quad S(\infty, a) = 0.$$

$[-2, 2]$ の外側の a に対しては, 連続関数になるように定数のまま延長しておく. 一方

$$\mathcal{D}(x, y) = \begin{cases} S(x-y, 0) & \text{if } xy > 0 \\ \cos(\pi(x+y)/2) / \pi(x-y) & \text{if } xy < 0. \end{cases}$$

定理 3 において, たとえば $s = 1$ ならば分布の密度関数 $S(0, |a|)$ が得られる (図 10). また, 0 を跨いだ 2 点を考えて $\lim X(n) = \{-x, x\}$ となるとすると, 2-相関関数 $\det[\mathcal{D}(x, y)]$ は, 2 点間の距離に反比例している.

図 10



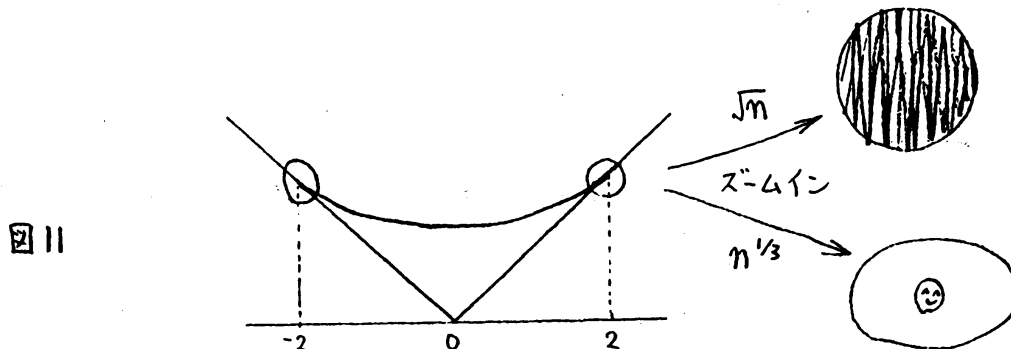
2.2.2 端でのゆらぎ

極限形状の端っこでの局所的なゆらぎは、多少のスケーリングの入り方を除けば、GUE と同じ挙動を示す。サイズ N のランダム行列の GUE では、

$$\left(\frac{\text{最大固有値}}{\sqrt{N}} - \sqrt{2} \right) \times \sqrt{2} N^{2/3}$$

の $N \rightarrow \infty$ での極限が Tracy-Widom の分布にしたがうのであった。

図 11 を見ていただきたい。極限形状の端 (横座標 ± 2) に焦点を当ててさっきと同じように $\sqrt{n}$ のオーダーでズームインすると、今度はゆらぎが激しすぎて何も見えない。実は、正しいズームインのオーダーは $n^{1/3}$ なのである。最初のスケールを基準にすれば、 $1/n^{1/6}$ -スコープということになる。



$\lambda \in \mathbb{Y}_n$ の行座標が $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ のとき

$$\bar{\lambda}_i = n^{1/3} \left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} - 2 \right), \quad \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2 \geq \dots)$$

とおき、Plancherel 測度を備えた確率空間 $(\mathbb{Y}_n, M_n)$ 上の確率変数 $\bar{\lambda}$ を考える。次の結果は、Borodin-Okounkov-Olshanski と Johansson による。

定理 4 [BOO], [J] 上の設定のもとに、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\bar{\lambda}$ が Airy アンサンブルに任意有限次元分布の意味で収束する。 $\square$

Airy アンサンブルの定義は次のとおり。微分方程式 $A'' - xA(x) = 0$ をみたす Airy 関数 $A(x)$ によって Airy 核

$$\mathcal{A}(x, y) = \frac{A(x)A'(y) - A(y)A'(x)}{x - y}$$

を定める。 k -相関関数が

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det[\mathcal{A}(x_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,k}$$

で与えられる R 上の行列式点過程, あるいはその点配置が与える R^∞ 値確率変数を Airy アンサンブルと呼ぶ.

極限形状の中ほどと端とでは, スケールは違うものの, 局所的なゆらぎは行列式点過程で記述された. 実は, 3.2 節で触れる $1/n$ -スコープの場合でも, 違う文脈で行列式点過程が現れる. これらの幾つかは, 実際にあるパラメータに関するスケーリング極限でつながっている.

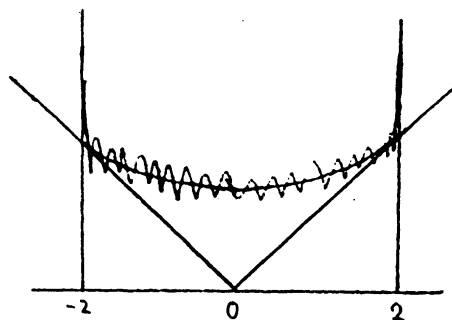
それぞれの確率空間 (Y_n, M_n) 上で別々に議論して $n \rightarrow \infty$ の極限をとるかわりに, グランドカノニカルアンサンブルとの類似で, セル数 n を制限せず, あるパラメータを含んだ形で n に沿う測度の重ね合せ (特にポアソン化) をまず考えて計算を実行し, そのパラメータについての漸近解析の手法によってもとの極限を再構成するという方法は, たいへん有効である. 具体的には, Bessel 関数などに対する漸近解析を行うことになり, Airy 関数もそこから出てくる. ランダム行列の GUE の場合は, 固有値分布が Hermite 多項式の Christoffel-Darboux 核を使って書け, Hermite 多項式に対する Plancherel-Rotach の漸近公式から Airy 関数が読み取れるのであった.

ランダムな Young 図形とランダム行列の直接的な結びつきについては, Okounkov によるものがある ([O]).

2.2.3 全サポートでのゆらぎ

極限形状の中ほどと端とではゆらぎのスケールが違うのであるが, 関数の枠を超えるのを許すと, 多少弱い形ながらも, トータルでのゆらぎを記述することができる. 極限形状 $\Omega(x)$ 全体を見て縦方向に元々のスケールを回復すべく $\sqrt{n}$ 倍する. そうすると端っこの方は激しくゆらいでいる. 図 12 参照. しかし実は, $\sqrt{n}\Omega(x)$ との差が Gauss 型の確率超過程として見える (!?).

図 12



このあたりは, Kerov [K1] に始まる中心極限定理の流れの中にあると言えよう. 2.1 節では, Y 上の多項式関数のなす代数 A の中で大数の法則にあたる議論を行った. 今度は,

この $\mathbb{A}$ の中での中心極限定理の議論の展開になる。

Kerov は [K1] において, $p_k^\sharp$ (2.1 節の式 (4)) たちの Plancherel 測度に関する中心極限定理を示した. 拙著 [Ho1] は, 代数的確率論の立場から Kerov のこの結果を見直し, 隣接作用素のことばで述べることによって, サイクルだけでなくすべての共役類に適用できる形に拡張したものである. Ivanov-Olshanski は [IO] において, この [K1] や [Ho1] の結果を再構成しながら, $\mathbb{A}$ の中での中心極限定理を考察し, 中心極限定理の 1 つの具現として, Young 図形の極限形状のゆらぎを確率超過程によって捉えうることを主張している. ついでながら, 拙著 [Ho2] はこの Kerov の結果の「非可換」拡張を与えたものである. 隣接作用素を互いに非可換な成分 (生成作用素と消滅作用素) に分解することによって, 高次モーメントを扱う際の組合せ論的な議論がずいぶん簡明になる. これは, われわれがもっと一般のグラフ上で展開してきた「量子分解」の考え方 (たとえば [HHO]) の適用である. さらに, 点過程との関連で言えば, 位置作用素の量子分解を通してできる相互作用 Fock 空間のいろいろな直交多項式アンサンブルの計算への応用を考えることは, たいへん興味深い問題である.

$\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に対して縦横 $1/\sqrt{n}$ 倍した図形を $\bar{\lambda}$ とし,

$$\Delta_\lambda^{(n)}(x) = \frac{\sqrt{n}}{2}(\bar{\lambda}(x) - \Omega(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

とおく. $U_k(x)$ を第 2 種 Chebychev 多項式とし, $u_k(x) = U_k(x/2)$ とおく. $\{u_k(x)\}$ は標準 Wigner 分布 (半円則) に関して正規直交系をなす:

$$\int_{-2}^2 u_k(x) u_j(x) \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} dx = \delta_{kj} \quad (k, j = 0, 1, 2, \dots).$$

定理 5 [IO] $\xi_1, \xi_2, \dots$ が標準正規分布にしたがう独立同分布列であるとする. $n \rightarrow \infty$ のとき, 任意の有限次元分布の収束の意味で

$$\left(\int_{\mathbb{R}} u_k(x) \Delta_\lambda^{(n)}(x) dx \right)_{k=1,2,\dots} \rightarrow \left(\frac{\xi_k}{\sqrt{k+1}} \right)_{k=1,2,\dots}$$

が成り立つ. (左辺は $(\mathbb{Y}_n, M_n)$ 上の確率変数列である.) □

厳密性を欠いた言いまわしであるが, この定理は次のことを示す. ランダム Fourier 級数

$$\Delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{k+1}} u_k(x) \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

を考える. (もちろん各点収束しない.) このとき $\langle u_k, \Delta \rangle = \xi_k / \sqrt{k+1}$ であるので, 定理 5 より, $n \rightarrow \infty$ のとき $\Delta^{(n)}$ が Δ に収束することが示唆され,

$$\bar{\lambda}(x) \sim \Omega(x) + \frac{2}{\sqrt{n}} \Delta(x)$$

と表される. このあたりは, いわゆる無限次元解析を使ってもっと洗練されるべきところであろう.

3 他の話題

講演ではほとんど立ち入れなかったが, 第 1 節で概観した他の話題 2 つについて本節で少し述べておく.

3.1 $1/\sqrt{n}$ -スコープと自由確率論

Voiculescu が創始した自由確率論の組合せ論的基盤は, 主として Speicher によって整備された. Kerov たちによる Young 図形の極限形状にまつわる解析の研究が, ランダム行列の影響を強く受けながら自由確率論と合流した. Biane による [B2] は, その大きな結実の 1 つであると言えよう.

自由確率論の種々の概念のうち, ここでは手っ取り早くキュムラントに関することだけ思い出しておく. 細部には立ち入らないが, 以下で扱う R 上の測度は, すべてモーメント問題が一意的に解けるものとする. R 上の確率測度 ν の Laplace (Fourier) 変換の対数の展開係数 $\kappa_n(\nu)$ を ν の n 次の (古典的な) キュムラントと言う:

$$\log \int_R e^{zx} \nu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n(\nu)}{n!} z^n \quad (z \in C).$$

ν の n 次モーメントを $M_n(\nu)$ で表す:

$$M_n(\nu) = \int_R x^n \nu(dx).$$

係数比較により, $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} M_n(\nu) &= \sum_{\rho \in Y_n} \frac{n!}{m_1(\rho)! \cdots m_n(\rho)! (1!)^{m_1(\rho)} \cdots (n!)^{m_n(\rho)}} \kappa_1(\nu)^{m_1(\rho)} \cdots \kappa_n(\nu)^{m_n(\rho)} \\ &= \sum_{\rho \in Y_n} \#(\{1, \dots, n\} \text{ の } \rho \text{ タイプの分割}) \kappa_1(\nu)^{m_1(\rho)} \cdots \kappa_n(\nu)^{m_n(\rho)} \end{aligned}$$

を得る. ただし, $m_j(\rho)$ は長さ j のブロック (行) の個数である. これを逆に解けば, キュムラントをモーメントの多項式で表示する式が得られる. 分割の取り方を制限して

$$\begin{aligned} M_n(\nu) &= \sum_{\rho \in \mathbb{Y}_n} \#(\{1, \dots, n\} \text{ の } \rho \text{ タイプの非交差分割}) R_1(\nu)^{m_1(\rho)} \dots R_n(\nu)^{m_n(\rho)} \\ &= \sum_{\rho \in \mathbb{Y}_n} \#(\{1, \dots, n\} \text{ の } \rho \text{ タイプの区間分割}) B_1(\nu)^{m_1(\rho)} \dots B_n(\nu)^{m_n(\rho)} \end{aligned}$$

を考えると, ν の n 次の自由キュムラント $R_n(\nu)$ と Boole キュムラント $B_n(\nu)$ を定めることができる. 分割を図 13 のように表したとき, 弧が交差しないのが非交差分割, 入れ子にもならないのが区間分割である.



ν のサポートがコンパクトのとき, ν の Cauchy 変換

$$G_\nu(z) = \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{z-x} \nu(dx) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n(\nu)}{z^{n+1}} \quad (z \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{R})$$

を逆に解く ($G_\nu^{-1}(w) = K_\nu(w)$) と, K_ν の係数として自由キュムラントが出る:

$$K_\nu(w) = \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\nu) w^{n-1}.$$

また, Boole キュムラントは

$$H_\nu(z) = \frac{1}{G_\nu(z)} = z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(\nu)}{z^{n-1}}$$

から出る. 古典的なキュムラントが測度の合成積を線型化するのと同じように, 自由キュムラント, Boole キュムラントにより線型化されるような測度の積がそれぞれ定義される. それらは, 適当な非可換確率空間における独立確率変数の和の分布になる.

Kerov [K2] にしたがって, $\lambda \in \mathbb{Y}$ に対して $\mathcal{R}$ 上の有限サポートの確率測度を次のように対応させる. z の有理式の部分分数分解:

$$\frac{(z-y_1) \cdots (z-y_{m-1})}{(z-x_1) \cdots (z-x_m)} = \sum_{i=1}^m \frac{\mu_i}{z-x_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{z-x_i} \frac{\prod_{j=1}^m (x_i - y_j)}{\prod_{j:j \neq i} (x_i - x_j)} \quad (5)$$

を考える. この両辺の Young 図形による意味づけを与えよう. $x_1 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < x_m$ を $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ の山谷座標とする. m 個の谷 $x_1, \dots, x_m$ にセルを 1 つ積んだ Young 図形

をそれぞれ $\Lambda_i \in \mathbb{Y}_{n+1}$ で表す. 既約表現の次数を与えるフック公式により,

$$\mu_i = \frac{\dim \Lambda_i}{(n+1) \dim \lambda} \quad (i = 1, \dots, m)$$

が成り立つ. 点 x_i に重み μ_i をのせた R 上の確率測度 m_λ を λ の推移測度と呼ぶ. 実は μ_i は, Plancherel 測度に付随する Young グラフ上の Markov 連鎖の λ から Λ_i への推移確率に他ならない. 式 (5) の右辺は m_λ の Cauchy 変換である. 式 (3) の $\tilde{p}_k$ を用いると, 式 (5) の左辺が

$$\frac{1}{z} \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{p}_k(\lambda)}{k} z^{-k}$$

と書き直せる. $\tilde{p}_k$ は連続図形 $\omega \in \mathbb{D}$ に対しても自然に定義が拡張される. したがって, $\omega \in \mathbb{D}$ に対しても, $\mathbb{Y}$ 上で成り立つ式をそのまま使って

$$\frac{1}{z} \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{p}_k[\omega]}{k} z^{-k} = \int_R \frac{1}{z-x} m_\omega(dx)$$

により, 推移測度 m_ω が定義される. そうすると, 極限形状 $\Omega \in \mathbb{D}$ の推移測度が標準 Wigner 分布になる.

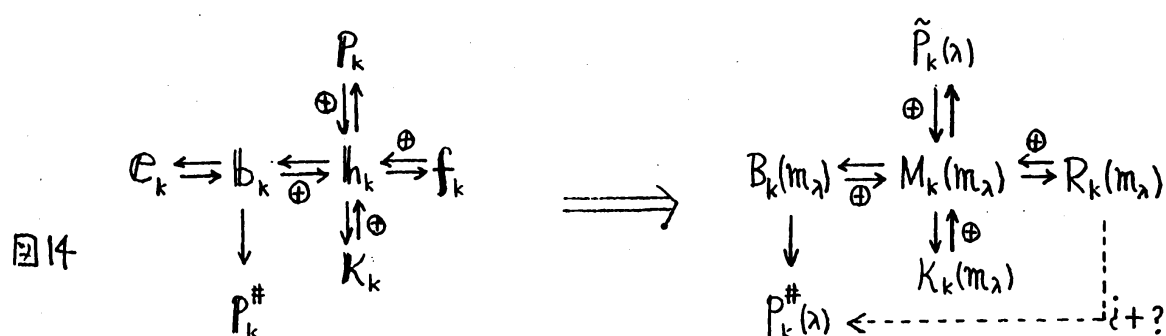
$S(n+1)$ の群環 $C[S(n+1)]$ 中の Jucys-Murphy 元 $J_n = (1 \ n+1) + (2 \ n+1) + \dots + (n \ n+1)$ を考える. $C[S(n+1)]$ から $C[S(n)]$ への直交射影を E_n とする. $S(n)$ の元は文字 $n+1$ を固定するものとして $S(n+1)$ に埋め込まれている. J_n は $S(n)$ の元と可換であるので, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $E_n(J_n^k)$ は $C[S(n)]$ の中心に属する. 山谷座標は J_n のスペクトル構造を記述するのに適している. さっきの記号 λ と Λ_i のもとで, Λ_i の表現空間の中に, J_n の作用の固有値 x_i に属する固有空間として λ の表現空間が入っている. Jucys-Murphy 作用素のスペクトル構造については, [TH] の §3.2 を見られるとよい. $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に対応する正規化された既約指標が与える $C[S(n)]$ の状態を $\tilde{\chi}^\lambda$ で表すと, Biane [B3] が示したように,

$$\tilde{\chi}^\lambda(E_n(J_n^k)) = \sum_{i=1}^m x_i^k \frac{\dim \Lambda_i}{(n+1) \dim \lambda} = M_k(m_\lambda) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

が成り立つ. これは, 対称群の既約指標の値と推移測度のモーメントを関係づける有用な公式である. $\tilde{\chi}^\lambda$ は $C[S(n)]$ の中心上で乗法的である (Fourier 変換での合成積と関数の積の保存). したがって, モーメント-キュムラント関係式によって $E_n(J_n^k)$ に対応するキュムラントを定めると, そのキュムラントも式 (6) と同じ形の関係式をみたす.

Young 図形の推移測度のモーメント-キュムラント関係式およびそれらと A の元 $\tilde{p}_k$, $p_k^\sharp$ などとの関係は, いろいろな対称式の間の関係式の特殊化とみなすことができる. 完全

対称式, Newton ベキ和, 基本対称式をそれぞれ h_k, p_k, e_k で表し, h_k と 3つのモーメント-キュムラント関係式で結ばれる k 次キュムラントをそれぞれ κ_k, f_k, b_k とする. 対称群の既約指標のサイクルでの値を与える Frobenius の公式より, $p_k^\#(\lambda)$ が $B_k(m_\lambda)$ を用いて表示できる. この関係式を対称式に持ち上げて $p_k^\#$ を定める. これらをまとめたのが図 14 である. 左から右へは, h_k を $M_k(m_\lambda)$ に特殊化することにより移行する. ここで, $M_1(m_\lambda) = 0, M_2(m_\lambda) = |\lambda|$ が成り立っている. 図 14 で, $\oplus$ は表示に現れる多変数多項式の係数がすべて非負であることを示す. 破線の向きの表示を与えるのが Kerov 多項式であり, その係数は非負であろうと予想されている (Kerov 予想). Kerov 多項式については, [B3] を参照.



式 (6) の左辺は $S(n+1)$ の Cayley グラフの幾何学的構造を通して非交差分割と密接に結びつく. そして右辺を自由キュムラント表示したものと比較されることにより, $n \rightarrow \infty$ での $S(n)$ の既約表現の挙動を調べる手がかりを与える. 詳しくは, Biane の論文 [B2], [B3] を参照されたい. このように測度のモーメント (およびキュムラント) を作用素のベキ乗を何らかの状態ではなかったものとして捉える考え方は, 代数的確率論でひろく用いられる. なお, Jucys-Murphy 元と自由確率論の関係は, すでに Biane [B1] により, $J_n/\sqrt{n}$ の真空状態に関する分布が Wigner 分布に収束するという事実で示されていた.

3.2 $1/n$ -スコープと無限対称群の表現

Young 図形を縦横に $1/n$ でズームアウトしながら $n \rightarrow \infty$ にもっていくと, 無限対称群 $S(\infty)$ の因子表現をパラメトライズする Thoma 単体が姿を現す. $\mathbb{Y}$ 上の関数で

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\Lambda: \lambda \nearrow \Lambda} \varphi(\Lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{Y})$$

をみたす φ を調和関数と呼ぶ. ただし, $\lambda \nearrow \Lambda$ は λ にセルを 1 つつけ加えて Λ ができることを示す. $\varphi(\emptyset) = 1$ のときに正規化されていると言う. パス空間 $\mathfrak{I}$ 上の測度 M について, $\emptyset$ から $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に至る長さ n のパスが定める $\mathfrak{I}$ のシリンダー集合での値が λ のみ

に依存するとき, M を中心測度と言う. $S(\infty)$ 上の共役類で一定値の関数も中心関数と呼ぶことにする. 次の3つの対象の集合は本質的に同一の構造を持っている:

- (ア) $S(\infty)$ 上の正規化された正定値中心関数
- (イ) $\mathfrak{T}$ 上の中心確率測度
- (ウ) $\mathbb{Y}$ 上の正規化された正值調和関数.

それぞれにおいて, 任意の元が端点集合上での重ね合せ (積分) で一意的に表現される.

(ア) の端点は $S(\infty)$ の因子表現がつくる II_1 型因子環のトレースであり, $S(\infty)$ の (von Neumann の意味の) 指標と呼ぶ. (イ) の端点をエルゴード的中心確率測度と言う. エルゴード性は $\mathfrak{T}$ の末尾可測集合^{*5}での 0-1 法則の成立と同等である. これらは, Young グラフの (組合せ論的) 次元関数 $d(\lambda, \mu)$ と次のように関係づけられる. ここで, $d(\lambda, \mu)$ は $\lambda \in \mathbb{Y}_m$ から $\mu \in \mathbb{Y}_n$ ($m < n$) に至るパスの数を表す. 特に, $d(\emptyset, \lambda) = \dim \lambda$. $\mathfrak{T}$ 上の確率変数 $\{d(\lambda, t(n))/d(\emptyset, t(n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ は, マルチンゲールの逆向き収束定理によりほとんど確実に収束する. M が $\mathfrak{T}$ 上のエルゴード的中心確率測度ならば, 対応する調和関数 φ が

$$\varphi(\lambda) = M(\emptyset \text{ から } \lambda \text{ に至るパスのシリンダー集合}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(\lambda, t(n))}{d(\emptyset, t(n))} \quad (M\text{-a.s. } t \in \mathfrak{T})$$

で与えられる ($\mathbb{Y}$ 上の Martin 核). 一方, Young 盤についての組合せ論的な考察によって $d(\lambda, \mu)/d(\emptyset, \mu)$ を拡張された Schur 関数 (定義は後述) と低次項で表す式が知られており, それから, Vershik-Kerov 条件:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t(n)_i}{n} = \alpha_i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t(n)'_i}{n} = \beta_i$$

をみたすパスに沿う極限のみ生き残ることがわかる. このパラメータの集合

$$\mathfrak{V} = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots) \mid \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq 1 \right\}$$

を **Thoma 単体**と呼び, Young グラフの Martin 境界と同一視する. このあたりの Young グラフ上のポテンシャル論の枠組については, [VK2], [K3] を参照されたい. Young グラフよりも一般の重み付きの辺をもつ分岐ダイアグラム (ネットワーク) 上でも, 次元関数や調和関数の定義を修正することにより同様の議論が可能である. [K3] を参照.

さて, 式 (2) と同じように, 拡張されたベキ和 p_n を

$$p_n(\alpha; \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n - \sum_{i=1}^{\infty} (-\beta_i)^n \quad (n \geq 2), \quad p_1(\alpha; \beta) = 1$$

^{*5} tail event

で定義し, 対称群の既約指標に関する Frobenius の公式と同じ関係式

$$p_\rho(\alpha; \beta) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \chi_\rho^\lambda s_\lambda(\alpha; \beta) \quad (\rho \in \mathbb{Y}_n) \quad (7)$$

によって, 拡張された Schur 関数を定める. ただし, 左辺で $p_\rho = p_{\rho_1} p_{\rho_2} \cdots$ と定めている. 前段の議論により, $\mathbb{Y}$ 上の正規化された正値調和関数 φ が

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathfrak{Y}} s_\lambda(\alpha; \beta) d\mu(\alpha; \beta) \quad (\lambda \in \mathbb{Y}) \quad (8)$$

と Thoma 単体上の Poisson 積分で表示される. また, $S(\infty)$ 上の正規化された正定値中心関数 χ は各 $S(n)$ 上では正規化された既約指標の凸結合で表され, その係数から $\mathbb{Y}$ 上の正値調和関数が生じる. したがって, 式 (7) と式 (8) より

$$\chi(\rho) = \int_{\mathfrak{Y}} p_\rho(\alpha; \beta) d\mu(\alpha; \beta) \quad (\rho \in \mathbb{Y}) \quad (9)$$

という分解ができる. 特に χ が端的であるときは, Thoma の公式に他ならない. このあたりのことも [K3] を参照. なお, Plancherel 測度はエルゴード的であって, 対応する調和関数, 指標はそれぞれ $s_\lambda(0; 0)$, $p_\rho(0; 0) = \delta_{\{e\}}(\rho)$ (正則表現の指標) である.

このように $S(\infty)$ の正則表現は因子表現で Thoma 単体の 1 点にしかないが, Kerov-Olshanski-Vershik は [KOV] において, 正則表現をコサイクルで修正することによって一般化された正則表現を導入した. それを分解した式 (9) あるいは (8) に現れる $\mathfrak{Y}$ 上のスペクトル測度 μ は興味深い性質を有していて, Borodin-Olshanski によって詳しく調べられた. [BO] を参照. そこでは, Thoma 単体上のスペクトル測度が行列式点過程の観点から解析されている.

平井は, Vershik-Kerov のものとは異なった組合せ論的考察に基づくスケーリング極限によって, $S(\infty)$ の von Neumann 指標を決定する手順を与えた. その方法は, $S(\infty)$ を越えて非 A 型の無限 Weyl 群を含む広いクラスの離散群に対して適用が可能である. [HH] を見られたい.

参考文献

- [B1] Biane, P.: Permutation model for semi-circular systems and quantum random walks, *Pacific J. Math.* **171**, 373–387 (1995).
- [B2] Biane, P.: Representations of symmetric groups and free probability, *Adv. Math.* **138**, 126–181 (1998).
- [B3] Biane, P.: Characters of symmetric groups and free cumulants, Preprint 2001.

- [BOO] Borodin,A., Okounkov,A., Olshanski,G.: Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups, *J. Amer. Math. Soc.* **13**, 481–515 (2000).
- [BO] Borodin,A., Olshanski,G.: Distributions on partitions, point processes, and the hypergeometric kernel, *Commun. Math. Phys.* **211**, 335–358 (2000).
- [HHO] Hashimoto,Y., Hora,A., Obata,N.: Central limit theorems for large graphs: Method of quantum decomposition, *J. Math. Phys.* **44**, 71–88 (2003).
- [HH] Hirai,T., Hirai,E.: Characters for the infinite Weyl groups of type B_∞/C_∞ and D_∞ , and for analogous groups, In: Obata et al. (eds.), *Noncommutativity, Infinite Dimensionality and Probability at the Crossroads*, World Scientific, 2003.
- [Ho1] Hora,A.: Central limit theorem for the adjacency operators on the infinite symmetric group, *Commun. Math. Phys.* **195**, 405–416 (1998).
- [Ho2] Hora,A.: A noncommutative version of Kerov’s Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group, Preprint 2001.
- [IO] Ivanov,V., Olshanski,G.: Kerov’s central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams, Preprint 2001.
- [J] Johansson,K.: Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, *Ann. Math.* **153**, 259–296 (2001).
- [K1] Kerov,S.: Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group, *C. R. Acad. Sci. Paris* **316**, Série I, 303–308 (1993).
- [K2] Kerov,S.V.: Transition probabilities for continual Young diagrams and the Markov moment problem, *Funct. Anal. Appl.* **27**, 104–117 (1993).
- [K3] Kerov,S.: The boundary of Young lattice and random Young tableaux, In: *DIMACS Series in Discrete Math. Theoret. Computer Sci.* **24**, Amer. Math. Soc. 1996, 133–158.
- [KO] Kerov,S., Olshanski,G.: Polynomial functions on the set of Young diagrams, *C. R. Acad. Sci. Paris* **319**, Série I, 121–126 (1994).
- [KOV] Kerov,S., Olshanski,G., Vershik,A.: Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation, *C. R. Acad. Sci. Paris* **316**, Série I, 773–778 (1993).
- [LS] Logan,B.F., Shepp,L.A.: A variational problem for random Young tableaux, *Adv. Math.* **26**, 206–222 (1977).
- [O] Okounkov,A.: Random matrices and random permutations, Preprint, math.CO/9903176.
- [TH] 寺田至, 原田耕一郎: 群論, 岩波講座現代数学の基礎, 岩波書店, 1997.
- [VK1] Vershik,A.M., Kerov,S.V.: Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux, *Soviet Math. Dokl.* **18**, 527–531 (1977).
- [VK2] Vershik,A.M., Kerov,S.V.: Asymptotic theory of characters of the symmetric group, *Funct. Anal. Appl.* **15**, 246–255 (1981).