

12

与えられた解析空間のコンパクト解析部分空間
全体の解析空間化 (Douadyの thèse)

東大理 浪川 幸彦

§ 0. 序

これは Douady の thèse: "Le Problèmes des Modules pour les sous-espaces Analytiques Compacts ~~dans~~ d'un Espace Analytiques Donnée" (Ann. Inst. Fourier. 1966 pp 1~98) の紹介である。百ページもある長いものなので、そのすべてを述べることはできない。問題とその解いてゆく方針のみを述べ、中間の証明は一切省くことにする。(実際個々の命題の証明はそれ程困難ではない) 又、Banach 解析空間の一般論が必要であるが、やはりスペースの都合で書けないので、一応有限次元(つまりふつうの解析空間)のアナロジーで考えて頂きたい。

§ 1. 問題とその所在

まず、問題をのべ、その問題といかにいいかえるかを見よ

う。そのやり方は問題をむしろ一般化させて解くという *Bourbakiism* の典型である。

(問題 A) X : 複素解析空間

$H(X)$: X のコンパクト部分解析空間

この時、 $H(X)$ に "うまい" 解析空間の構造が入るか？

ここで "うまい" とはどんな意味かは、置いておこう。

Def. S : もう一つの解析空間

$Y \subset S \times X$ が解析空間 S でパラメトライズされた X のコンパクト部分空間の族 (S -p.p. 族と呼ぶ) $\iff Y \in S \times X \rightarrow S$ から導びかれた S 上のファイバー空間とみて、 Y は S 上固有射 (proper) かつ平坦 (flat)。

すると、問題 A は次の様に一般化される。

(問題 B) $(\mathcal{A}_n)$: 複素解析空間の圏

$(\mathcal{S}et)$: 集合の圏

$\Phi_0: (\mathcal{A}_n) \longrightarrow (\mathcal{S}et)$

$S \longmapsto \{S\text{-p.p. 族 全体}\}$

なる関手が表現可能か？

つまり $H(X) \in (\mathcal{A}_n)$ と $H(X)$ -p.p. 族 $Y \subset H(X) \times X$ が存在して、任意の S -p.p. 族 $Z \subset S \times X$ に対して S から

$H(X)$ の morphism f が一意的存在して $Z = (f^0)(Y)$ となる。

この問題をさらに一般化しよう。

Def. $\mathcal{F} : S \times X$ 上の層が S 上固有的 (proper) $\iff \text{Supp } \mathcal{F} \rightarrow S$ (射影) が固有的。

(問題 C) $\mathcal{E} : X$ 上の解析的連接層

$$\pi : S \times X \rightarrow X$$

$$\Phi : (A_n) \longrightarrow (\text{Set})$$

$$\downarrow$$

$$S \longmapsto \{ \pi^* \mathcal{E} \text{ の } S\text{-平坦かつ } S\text{-固有的な連接層} \}$$

$$f : S \rightarrow S' \longmapsto \{ (f \times 1_X)^* \mathcal{E} \} \quad \text{商層}$$

なる反変関手が表現可能か？

こゝで $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$ とすれば問題になる。

この問題は解析空間の範囲ではうまくとけない。そこで Douady は Banach 解析空間への圏をひろげて解いた。つまり次の二つの問題を与けたのである

(Ban) : Banach 解析空間の圏

こゝでは S -解平坦 (anaplat) なる概念が、解析空間における連接的かつ S -平坦の ~~概念~~ ^{概念} にあたる。(正確な定義は後出)

(問題 D) $X, \mathcal{E}$ は問題 C と同じとする。

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{F} : (\text{Ban}) \longrightarrow (\text{Set})$$

$$S \longmapsto \{ \pi^* \mathcal{E} \text{ の } S\text{-解平坦かつ } S\text{-固有的商層 (} S\text{-app 層 と呼ぶ)} \}$$

$$f: S \rightarrow S' \longmapsto (f \times I_X)^*$$

が、表現可能であるか。

つまり、 $H(\mathcal{E}) \in (\text{Ban})$ と $H(\mathcal{E})\text{-app 層 } \mathcal{R}$ があって、

次の性質を満たす。

$$\forall S \in (\text{Ban}), \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{F}(S) \Rightarrow \exists_1 f: S \rightarrow H(\mathcal{E})$$

$$\text{s.t. } \mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}$$

$$\textcircled{2} \quad H(\mathcal{E}) \in (\text{An}) ?$$

$S \in (\text{An})$ なら $\mathcal{F}(S) = \mathcal{F}(S)$ である。従って An が肯定的な S は、 An が肯定的になる。

§2. 良性近傍 (Voisinage privilégié)

Def. $K \subset \mathbb{C}^n$ が柱状集合 (polycylindre)

$$\iff K = K_1 \times \cdots \times K_n, \quad K_i \text{ は } \mathbb{C} \text{ のコンパクト凸集合}$$

(柱状空間)

U : K を小さく $\mathbb{C}^n$ の開集合

$\mathcal{F}$: U 上の解析的連接層 以下固定する。

$\mathcal{O}$: U 上の正則函数の芽の作る層

$$\mathcal{F}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{\substack{V \supset K \\ \text{open}}} \mathcal{F}(V) \quad (= H^0(K, \mathcal{F}) \text{ とかくこともある})$$

$$\mathcal{C}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \{ K \text{ が } S \subset \mathbb{C} \text{ への連続関数} \}$$

$$B(K) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}(K)} \text{ in } \mathcal{C}(K) \quad (\text{Banach 空間として})$$

$$(\equiv \{ K \text{ 上連続かつ } K \text{ で解析的な } \mathbb{C} \text{ 値関数 if } K \neq \emptyset \})$$

この $B(K)$ が重要な役割を果す。向 D への拡張したのも、 $B(K)$ を用いるがゆえなのである。だが、なぜ $B(K)$ がうまい性質を持つかはこゝでは十分述べることはできない。

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \quad (\mathcal{L}_i = \mathcal{O}^{\otimes i}) \quad (1)$$

を $\mathcal{F}$ の $\mathbb{U}$ 上の分解とする。

Prop. 1 K を柱状集合とすれば

$$0 \longrightarrow H^0(K, \mathcal{L}_p) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^0(K, \mathcal{L}_0) \longrightarrow H^0(K, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \quad (2)$$

は直完全 (Banach $\mathcal{O}$ -加群として直完全 Banach 空間の直列列としては split する) //

$$B(K; \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} B(K) \underset{\mathcal{O}(K)}{\otimes} \mathcal{F}(K)$$

$$B(K; \mathcal{O}^r) = B(K)^r \text{ だが } S \text{ Banach 空間。} B(K; \mathcal{F}) \text{ には (2)}$$

を用いて $\text{coker}(B(K; \mathcal{L}_1) \rightarrow B(K; \mathcal{L}_0))$ なる位相を入れる。

Def. 1 柱状集合 K が $\mathcal{F}$ -良性 ($\mathcal{F}$ -privilegié)

$\iff$ (1) のような分解が存在して、次の列が直完全になる。

$$0 \longrightarrow B(K; \mathcal{L}_p) \longrightarrow \cdots \longrightarrow B(K; \mathcal{L}_0) \longrightarrow B(K; \mathcal{L}_0) \cdots (3)$$

Prop. 2 柱状集合 K が $\mathcal{F}$ -良性

$\Rightarrow$ 1) $B(K; \mathcal{F})$ は Hausdorff Banach space

2) 任意の (1) の様な分解に対して, (3) は恒等式なり。 //

基本的な性質として

Prop. 3 $\mathcal{F}, \mathcal{F}', \mathcal{F}''$ を U 上の解析的連接層と $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$
(完全)

K を U に含まれる柱状集合

1) K が $\mathcal{F}'$ -, $\mathcal{F}''$ -良性 $\Rightarrow K$ は $\mathcal{F}$ -良性

K が $\mathcal{F}$ -, $\mathcal{F}''$ -良性 $\Rightarrow K$ は $\mathcal{F}'$ -良性

2) Δ の条件のもとで

$0 \rightarrow B(K; \mathcal{F}') \rightarrow B(K; \mathcal{F}) \rightarrow B(K; \mathcal{F}'') \rightarrow 0$ (完全) //

Def. 2 $\alpha \in U$ をとる。柱状集合 K が α の $\mathcal{F}$ -良性近傍

$\iff$ a) K は α の近傍

b) K は $\mathcal{F}$ -良性

c) $B(K; \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha$ は単射。 //

以後重要となる基本定理は次のものである。

Theo. I U を $\mathbb{C}^n$ 内の開集合。

$\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$ を U 上の解析的連接層。

$\forall \alpha \in U, \exists K \subset U : \alpha$ の $\mathcal{F}_i$ -良性近傍 ($i=1, \dots, k$ 同時)

§ 3. 解平坦層 (faisceau anaplat)

解析空間 X を以下図式する。

$S \in (Ban)$ π と π' を π から π' への morphism

$$\begin{array}{ccc} \pi_S: X & \longrightarrow & S \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & (s, x) \end{array}$$

を定義する。さうな $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_{S \times X}$ -加群層としたとき、

$$\mathcal{F}(s) = \pi_S^* \mathcal{F} \quad (s \in S)$$

と定めた。

Def. 3 $S \in (Ban)$, $U \subset \mathbb{C}^n$ 開集合。

$\mathcal{F}: \mathcal{O}_{S \times U}$ -加群層が S -解平坦 (S -anaplat)

$\Leftrightarrow \forall (s, x) \in S \times U$ に対し, (s, x) の近傍で有限分解

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

があって, しかも

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_p(s) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{L}_0(s) \rightarrow \mathcal{F}(s) \rightarrow 0 //$$

Def. 3' $S \in (Ban)$ $X \in (An)$

$\mathcal{F}: \mathcal{O}_{S \times X}$ -加群層が S -解平坦

$\Leftrightarrow \forall (s, x) \in S \times X$ に対し, $\forall x \in X$ に対し, $\mathcal{F}_x$ (chart)

$$x \in X' \xrightarrow{\varphi} U \subset \mathbb{C}^n$$

があって, $(I \times \varphi)_* \mathcal{F}$ は S' -解平坦。 //

Prop. 4. 特ん $S' \in (An) \subset (Ban)$ のときは

$\mathcal{F}$ が S' -解平坦 $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ が連続的かつ S' -平坦 //

$\mathcal{F}$ は S' をパラメータ空間とみて, 層の変形と考えられる。
解平坦とは, 言うパラメータについて, 分解までこめて解析的

に变形することとを意味する。解平坦層と弱良性質とを結びつける次の著しい性質がある。

Prop. 5 $S \in (\text{Ban.})$, $U \in \mathbb{C}^n$ 内の開集合, $K \in U$ 内の柱状集合とする。予を $S \times U$ 上の層とする。

予が弱解平坦 $\Rightarrow S' = \{s \in S; K \text{ が } \text{予}(s) \text{-良性質}\}$ は S の開集合 //

§ 4. グラスマン多様体

Theo-Def. 4 E を Banach 空間とする。 E の直部分空間全体を $\mathcal{Y}(E)$ と書くと、 $\mathcal{Y}(E)$ は次に述べる様に、自然に Banach 多様体になる。この構造をもつ $\mathcal{Y}(E)$ を E の Grassmann 多様体と呼ぶ。

構造は $F \in \mathcal{Y}(E)$ ^{を含む} の元 G を、 $F \oplus G \cong E$ とする時

$$U_G = \{F'; F' \oplus G \cong E\} \ni F'$$

$\downarrow$

$$L(F, G)$$

$\downarrow$

$\ni F' \subset F \times G$ をグラスとする写像。 //

Def. 5. A を Banach 代数, E を Banach A -加群とする。

$\mathcal{Y}_A(E) = \{E \text{ の直 } A\text{-部分加群}\}$ (直 A -部分加群とは、 A -部分加群であって、 Banach 空間としては直交補空間をもつもの) //

Prop. 5. $\mathcal{Y}_A(E)$ は $\mathcal{Y}(E)$ の部分解析空間である。

§5. $\Upsilon_K(\mathcal{E})$

S : Banach 解析空間,

$U: \mathbb{C}^n$ 内の開集合, $\pi: S \times U \longrightarrow U$ 射影

$\mathcal{E}: U$ 上の連接層 $\mathcal{E}_S = \pi^* \mathcal{E}$

$K \subset U$: $\mathcal{E}$ -良好性柱状集合

Def. 6 $\Upsilon_K(\mathcal{E}) = \{B(K; \mathcal{E}) \text{ の部分 } B(K) \text{ 加群で直有限分解を} \\ \text{持つもの} \} \subset \Upsilon_{B(K)}(B(K; \mathcal{E}))$

$= \{B(K; \mathcal{E}) \text{ の直商で直有限分解を持つもの} \}$

$\Upsilon_K(\mathcal{E})$ は $\Upsilon_{B(K)}(B(K; \mathcal{E}))$ の開集合になる。(自明ではない)

この $\Upsilon_K(\mathcal{E})$ が $\mathcal{D}$ をとく, つまり $H(\mathcal{E})$ を作る事柄となる重要な役割を果たす。それは次の二つの命題からわかる。

Prop-def. 7. $\mathcal{F} = \mathcal{E}_S / \mathcal{F}^\vee$; $\mathcal{E}_S$ の S -解平坦な商層。

$S_1 = \{s \in S; K \text{ は } \mathcal{F}(s) \text{-良好性}\} \dots S \text{ の開集合}$

$$\begin{array}{ccc} \beta_K(\mathcal{F}): & S_1 & \longrightarrow \Upsilon_K(\mathcal{E}) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & S & \longrightarrow B(K; \mathcal{F}(s)) \end{array}$$

は morphism である。

さらに, これは S について函手的である。つまり morphism

$h: S' \rightarrow S$ があると $S'_1 = h^{-1}(S_1)$, であり, $\mathcal{F}' = (h \times 1_U)^* \mathcal{F}$

とすると $\beta_K(\mathcal{F}') = \beta_K(\mathcal{F}) \circ h //$

Prop. 8. 逆は morphism $f: S \rightarrow \Upsilon_K(\mathcal{E})$ に対し, $\mathcal{E}_S|_{S \times K}$ の S -解平坦な商層 $\mathcal{F}$ を次の性質を満たすように対応させることがで

える。

1) (函子性) $h: S' \rightarrow S$ morphism

$$f: S \rightarrow \mathcal{Y}_K(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{F}$$

$$\Rightarrow f \circ h: S' \rightarrow \mathcal{Y}_K(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{F}' = (h \times I_K)^* \mathcal{F}$$

故に $I_{\mathcal{Y}_K(\mathcal{E})}$ に対応する層を $\mathcal{R}$ とかけば

$$f: S \rightarrow \mathcal{Y}_K(\mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{F} = (f \times I_K)^* \mathcal{R}$$

$$2) (\beta_K(\mathcal{F}) \times I_K)^* \mathcal{R} = \mathcal{F}|_{S_1 \times K}$$

3) K' を K 内の $\mathcal{E}$ -良好性状態集合とする

$$p_0: B(K) \rightarrow B(K')$$

$$p_1: B(K, \mathcal{E}) \rightarrow B(K'; \mathcal{E})$$

制限

$$p_*: \mathcal{Y}_K(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{Y}_{K'}(\mathcal{E}) \quad : p_0, p_1 \text{ から自然に def. される morphism (これが定義される morphism になることは自明ではない)}$$

$$\beta_{K'}(\mathcal{R}) := \mathcal{Y}_1(\subset \mathcal{Y}_K(\mathcal{E})) \rightarrow \mathcal{Y}_{K'}(\mathcal{E})$$

$$\Rightarrow \beta_{K'}(\mathcal{R}) = p_*|_{\mathcal{Y}} //$$

性質 2), 3) は prop. 8 の対応が $\alpha \mapsto \alpha$ ね $\mathcal{F} \mapsto \beta_K(\mathcal{F})$ なる対応の逆になっていることを示している。あとは左い左い上の形式的性質を用いて、“はりあわせ”を行ってゆくのみである。

§ 6. § 31 (Cuirasse)

X : (有限次) 解析空間

$$X \supset X' \xrightarrow{\varphi} U \subset \mathbb{C}^n \quad X \text{ の札}$$

$$K \subset U \quad \text{柱状集合}$$

$\mathcal{F}$: X 上の解析的連接層.

Notation. K が $\mathcal{F}$ -良性 $\iff K$ が $\varphi_* \mathcal{F}$ -良性

$$B(K, \mathcal{F}) = B(K, \varphi_* \mathcal{F}), \quad \gamma_K(\mathcal{F}) = \gamma_K(\varphi_* \mathcal{F}) \quad \text{etc.}$$

さて、前節で与えられた局所的な対応定理を用いて、はじめにあげた問題をとくため、次の概念を用いる。

Def. 8 X のよい (cuirasse) M

$$\iff M = ((\varphi_i)_{i \in I}, (K_i)_{i \in I}, (V_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i,j \in I \times I}, (K_{ij\alpha})_{\alpha \in A_{ij}}, L)$$

i) $(\varphi_i)_{i \in I}$: 有限コ の札, $\varphi_i: X_i \rightarrow U_i \subset \mathbb{C}^{n_i}$

ii) $K_i \subset U_i$ 柱状集合

iii) $V_i \subset \varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) \subset X_i$ V_i : compact 集合

iv) $\varphi_{ij}: X_{ij} = X_i \cap X_j \rightarrow U_{ij} \subset \mathbb{C}^{n_{ij}}$ 札

v) $K_{ij\alpha} \subset U_{ij}$ 有限コ の柱状集合 の後で

$$\varphi_i^{-1}(\mathring{K}_i) \cap \varphi_j^{-1}(\mathring{K}_j) \supset \bigcup_{\alpha \in A_{ij}} \varphi_{ij}^{-1}(\mathring{K}_{ij\alpha}) \supset V_i \cap V_j$$

vi) L : 閉集合 $L \cup \bigcup_{i \in I} \mathring{V}_i = X$

Def. 9 M が $\mathcal{F}$ について単良性 $\iff K_i, K_{ij\alpha}$ が $\mathcal{F}$ -良性

• M が $\mathcal{F}$ について良性 $\iff K_i, K_{ij\alpha}$ が $\mathcal{F}$ -良性

$$\text{かつ } \text{Supp } \mathcal{F} \cap L = \emptyset$$

Def. $\mathcal{F}$ が E の連接的商層とする。

M が $(E, \mathcal{F})$ -良性 $\iff M$ は E -準良性かつ $\mathcal{F}$ -良性. //

次の命題が基本的である。

Prop. 9 $\mathcal{F}$: E の連接的商層で、台がコンパクトなもの。

$\implies (E, \mathcal{F})$ -良性な $\mathcal{F}$ が必ず存在する。//

Prop. 10 S : Banach 解析空間。

$\mathcal{F}$: E_S (cf §5) の商層で、 S -解平坦かつ S -固有的。

M : X の $\mathcal{F}$ の

$\implies \{s \in S; M \text{ は } (E, \mathcal{F}(s))\text{-良性}\} \text{ は } S \text{ の開集合。} //$

これはいつでも $\mathcal{F}$ の命題から、容易にえられる。

§ 6. 空間 (H)

M を E -準良性な $\mathcal{F}$ とする。

$\mathcal{R}_i \in \mathcal{R}_k(E) \times \mathcal{F}_i^{-1}(K_i)$ 上定義される $E_{\mathcal{R}_i(E)}$ の一般化商層 ($\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$)

$$\mathcal{V}_i = \{s \in \mathcal{R}_k(E); \text{ i) } \forall j \in I, \forall \alpha \in A_{ij} \quad K_{ij\alpha} \text{ は } \mathcal{R}_i(s)\text{-良性} \\ \text{ii) } \text{Supp } \mathcal{R}_i(s) \cap L \cap V_i = \emptyset\}$$

これは $\mathcal{R}_k(E)$ の open set.

$$\mathcal{V}_{ij\alpha} = \mathcal{V}_{K_{ij\alpha}}(E)$$

$$\mathcal{P}'_{ij\alpha} = \beta_{K_{ij\alpha}}(\mathcal{R}_i) / \mathcal{V}_i \quad : \quad \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_{ij\alpha}$$

$$\mathcal{P}''_{ij\alpha} = \mathcal{P}'_{j i \alpha}$$

とする。

$$p' : \prod_{\downarrow} \mathcal{Y}_i \longrightarrow \prod_{\downarrow} \mathcal{Y}_{ij\alpha} \\ (s_i) \longmapsto (s_{ij\alpha} = p'_{ij\alpha}(s_i))$$

$$p'' : \prod_{\downarrow} \mathcal{Y}_i \longrightarrow \prod_{\downarrow} \mathcal{Y}_{ij\alpha} \\ (s_i) \longmapsto (s_{ij\alpha} = p''_{ij\alpha}(s_j)) \quad \text{と 33.}$$

$$\text{Def. 9} \quad \Theta = \text{Ker}((p', p'') : \prod \mathcal{Y}_i \rightrightarrows \prod \mathcal{Y}_{ij\alpha}) //$$

S : Banach 解析空間.

$\mathcal{F}$: E_S の S -解平面かつ S -固有的商層 (S -ap. p. 層)

$$S_1 = \{s \in S; M \text{ は } (E, \mathcal{F}(s))\text{-良性}\}$$

このとき $\beta_{k_i}(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow \mathcal{Y}_i$ が定義される。 ($\beta_{k_i}(\mathcal{F})$ の像が $\mathcal{Y}_i$ に入ることは容易にわかる)

$$\text{Def. 10} \quad \beta_M(\mathcal{F}) = \prod \beta_{k_i}(\mathcal{F}) : S_1 \rightarrow \Theta //$$

(Θ に β_M の像が入ることは $p'_{ij\alpha} \circ \beta_{k_i}(\mathcal{F}) = \beta_{k_{ij\alpha}}(\mathcal{F})$ よりわかる)

この $\beta_M(\mathcal{F})$ は、可逆性をもつ。つまり $S' \xrightarrow{\mathcal{H}} S$ isomorphism
で、 $\mathcal{F}' = (\mathcal{H} \times 1_X)^* \mathcal{F}$ とすれば $S'_1 = \mathcal{H}^{-1}(S_1)$ かつ

$$\beta_M(\mathcal{F}') = \beta_M(\mathcal{F}) \circ \mathcal{H} : S'_1 \rightarrow \Theta$$

である。

さて、 $p_i : \Theta \rightarrow \mathcal{Y}_i$ 射影とす。

$$\widetilde{\mathcal{R}}_i = (p_i \times 1_{\mathcal{Q}_i(\mathcal{K}_i)})^* \mathcal{R}_i \quad \text{且} \quad p_{ij\alpha} = p'_{ij\alpha} \circ p_i$$

$$\text{とすれば} \quad \widetilde{\mathcal{R}}_i \downarrow_{\mathcal{Q}_i(\mathcal{K}_i)} (\mathcal{K}_{ij\alpha}) = (p_{ij\alpha} \times 1)^* \mathcal{R}_{ij\alpha} \quad \text{。}$$

だが S 、 $\tilde{\mathcal{R}}_i$ ははりあわせることができて、 $\Theta \times X^E$ の $E\Theta$ の商層 $\tilde{\mathcal{R}} \ni \subset$ する。

Prop. 11. $\mathcal{F} : E_S$ の S -解平坦かつ S -固有的な商層 (S -app) 層

$$\Rightarrow (\beta_M(\mathcal{F}) \times I_X)^* \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{F}|_{S \times X}$$

(prop. 8 の S あきらかである。)

§ 8. $H_M(E)$

上記 $(\beta_M(\mathcal{F}) \times I_X)^* \tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{F}|_{S \times X}$ は $\mathcal{F} \mapsto \beta_M(\mathcal{F})$ なる "injective" な対応を与えることはわかった。しかし、逆もつづけることは明らかでない (なすべきなのである)。そこで

Prop. 12 S と $\mathcal{F}$ は前節と同じとする

$$\theta = \beta_M(\tilde{\mathcal{R}}) : \Theta_1 \longrightarrow \Theta$$

とすれば $\text{Im}(\beta_M(\mathcal{F})) \subset \Theta_1$ であり

$$\text{かつ } \theta \circ \beta_M(\mathcal{F}) = \beta_M(\mathcal{F}) //$$

なる性質をみるべからず。

Def. 11 $H_M(E) = \text{Ker} \{ (I, \theta) : \Theta_1 \Rightarrow \Theta \}$

$$\iota : H_M(E) \longrightarrow \Theta \quad (\text{自然な単射})$$

$$\mathcal{R}_M = (\iota \times I_X)^* \tilde{\mathcal{R}} : E_{H_M(E)} \text{ の商層 } //$$

とすると、

Prop. 13 $\mathcal{F} : S\text{-app}$ 層で $S_1 = S$ とする

$$\Rightarrow \exists_1 f : S \longrightarrow H_M(E) \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}_M //$$

§ 8.9. 問題 D の肯定的解答

Theo. 3 X : 有限次元解析空間.

$\mathcal{E}$: X 上の解析的連接層 とする。

$\Rightarrow \exists H(\mathcal{E})$: Banach 解析空間

$\exists \mathcal{R}$ $\mathcal{E}_{H(\mathcal{E})}$ の局層

s.t. i) $\mathcal{R} = H(\mathcal{E})$ の解平坦, $H(\mathcal{E})$ -固有的層. ($H(\mathcal{E})$ -ap.p 層)

ii) $\forall S \in (\text{Ban.}) \quad \forall f: \mathcal{E}_S$ の S -ap.p 層

$\Rightarrow \exists f: S \rightarrow H(\mathcal{E})$ s.t. $f = (f \times 1_X)^* \mathcal{R}$

この f は写真的に定まる。 //

証明は、すべての M について $H_M(\mathcal{E})$ をつくるとする。すると集合として $H_M(\mathcal{E}) = \{f: M \text{ が } (\mathcal{E}, f) \text{-定性的}\}$ である。すると容易にこれは解析空間としてはりあわせることができることかわかり、 $\mathcal{R}_M$ もはりあわせることができることかわかる。これから $H(\mathcal{E})$ と $\mathcal{R}$ をつくると、これが所与の性質をみたすことかわかる。(prop. 9. 11, 13 を用いよ)

Theo. 4 $H(\mathcal{E})$ は Hausdorff かつ有限次元。 //

これは prop. 8 の ρ_0 と ρ_1 がコンパクト写像となる。

(Montel の定理より) ことから得られるのだが、詳しい証明は原論文を見られたい。