

Is “naive set theory” really that naïve?

神戸大学大学院・システム情報学研究科 湊野 昌 (Sakaé Fuchino)*

Graduate School of System Informatics
Kobe University
Rokko-dai 1-1, Nada, Kobe 657-8501 Japan
fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

1 Naïve set theory

まず初めに断っておかなければいけないのは, “naïve set theory” あるいは日本語で言う「素朴集合論」という学術用語があるわけではない, ということである. しかも, この言葉は, 異なる立場の人々によって, 異なる意味に用いられているため, その意味でも注意を要する.

歴史的には, この表現の最初の用例の 1 つは, von Neumann による 1928 年の論文 [10] に見られる次のようなものである. 超限帰納法の理論がこれまでにまだきちんとした定式化をされていない, ということを主張する文章で:

„Trotz ihrer fundamentalen Bedeutung haben aber diese Begriffsbildungen weder in der naïven, noch in der seit 1908 entstandenen formalistischen Mengenlehre eine erschöpfende und strenge Begründung erfahren“. [10]¹⁾

と述べられているが, ここでの „naive Mengenlehre“ は, Zermelo による 1908 年の論文の前の集合論, という位置付けがなされていることがわかる. この位置付けでの, naïve set theory (die naive Mengenlehre) は大雑把には, 「Cantor の集合論」と同一視してよさそうである. いささか図式的になりすぎるきらいもあるが, ここでは, 以下, このような線引きを,

Date: 7. Februar 2012 (00:14JST)

2010 Mathematical Subject Classification: 01A55, 01A60, 03-03

Keywords: Georg Cantor, Richard Dedekind, Ernst Zermelo, Paul Bernays, Kurt Gödel, axiomatization of set theory

* Supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 21540150 of the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology Japan.

¹⁾ 下線は筆者による.

(a) naïve set theory = Cantor の集合論

として引用することにする。

“naïve set theory” という表現を、広く数学のコミュニティーに印象づけたのは、この表現を書名として Paul Halmos による、1960 年初版の [7] であろう。しかし、この本での “naïve set theory” かどうかの線引きは、数理論理学を用いて公理系を厳密に導入するかどうかという点に関してなされていて、Halmos の本で言う “naïve set theory” は、数理論理学を用いない 1908 年のツェルメロの論文での公理的な立場から現代的な公理系を扱った “公理的集合論” であり、上記の von Neumann の言っている „formalistische Mengenlehre“ をも含むものになっている。つまり、ここでは

(b) naïve set theory = 数理論理学を用いた厳密な公理化の行なわれる前の
(公理的) 集合論

と捉えられている。

以下に述べるような理由から、もし何らかの線引きをしなければならない、とすれば、少なくとも現代の視点からは、(b) の方がより意味のある線引きとなっていると言わなければならないであろう。しかし、一般には、現在でも “naïve set theory” という表現は、(a) の意味で用いられることが多い。しかも、ある種の偽数学を提唱する人たちによって、歴史的な文脈を意識的に曲解するために用いられることすら多いようにみられる。

2 『(a) naïve set theory = Cantor の集合論』 の場合

“naïve set theory” を (a) の意味で解釈する立場からは、

(†) 「素朴集合論は（ラッセルのパラドックスなどにより）矛盾している」

あるいはこれに類した表明が屢々なされ、このような主張がインターネット上で広く流布さえしている。置かれた文脈によっては必ずしも間違いとは言えない場合もあるかもしれないが、少なくとも、この表明自身は、以下の意味で歴史的、数学的な事実に対して間違っているか、間違っていないとしても、極めて misleading なものになっている。また、この表明が初学者に間違った印象を与えることを恐れるものだが、実際、これがなされている場所を見てみると、ある種の偽数学のプロパガンダと組になっていて、むしろ意図的に歴史的な事実を曲解させることを目論んでいることも少なくないように思える。

(†) の主張が misleading なものになってしまうことの背景の 1 つとして、初期の集合論の研究結果には現在の集合論以外の数学分野でとりあげられることのないテーマの研究が少なくない、ということがあげられるだろう。したがって、この表明を目／耳にした、現代日本の平均的数学者は、極端な場合、『ああ、やはりあの（昔に聞きかじったことのある）集合論は矛盾しているのか』と naïve に信じてしまう危険がある。そんな

馬鹿な、と思う方もいるかもしれないが、私は、かつて超限帰納法の議論展開を含む話題についての講演をしたときに、日本で名の知れているある数学者に、それはちゃんと定式化できる議論なのか、と真顔で聞かれた経験がある。

そういうわけで、念の為、ここでもう一度確認しておく、事実としては、初期の集合論 (つまり (a) の意味での naïve set theory) の研究結果は、矛盾を含んでいるために破棄されたわけではなく、明らかな矛盾が除外できることが見えるような形に精密化された理論展開 (つまり (b) の意味で naïve でない集合論) の枠の中に継承されているのである。

「Cantor は彼の集合論が矛盾することを知って困惑 (あるいは絶望) した」というような記述も (†) の主張と組になって見られることが多いが、これについては、事実と異ることが断定できる: 晩年の Cantor には、連続体仮説に関しての手紙での表明などにおいて、ある種の混乱が確認できるが ([8] を参照), 集合論の整合性については²⁾, 集合論の矛盾というような問題意識ないし危機意識は全く感じていなかったように思える³⁾.

1899 年の Hilbert や Dedekind への手紙 ([2] または, [8] を参照) で, Cantor は, これらのパラドックスに触れて「… のような生成方法のみで本来の (eigentliche) 集合を考えていればパラドックスは現れない」というような表明をしているが, これは Zermelo の公理系の議論を予見するものとなっている。

前述の手紙から, Cantor は, パラドックスは, そこで扱われる “集合” が consistent な (Cantor の用語では fertig (すでに形成された)) ものでないことの証明にすぎないと考えていたことが窺われる。ここで, consistent でない (Cantor の用語では „inkonsistent“ な) 集合を proper class と読み替えると, 現代の ZF 集合論での集合のとらえ方にほぼ一致することは注意するまでもないだろう ([2], [8] を参照)。なお Cantor が Zermelo の集合論の公理化の先駆となるような考察を行っていたことは, 既に多くの人によって指摘されている。たとえば, [9] を参照されたい。

Zermelo の 1908 年の論文 [11] は画期的なものではあったが, naïve な集合論から公理的な集合論への分岐点としては過大評価されすぎている可能性もあり検討が必要であろう。実際, 彼がこの論文で行なったことの多くは, Cantor や Dedekind が直観的ないし非公理主義的に既に行っていた仕事を, 初期のヒルベルト流の公理論に流しこんで敷衍することで得られたにすぎなかったとも言えるかもしれない。一方, 後に見るように, Zermelo がこの論文で分離公理を記述するために導入した „definit“ (確定的) な性質に関する議論は, 一般に考えられているよりずっと精密なものであり, この議論が 1 階の述語論理の導入をうながし, それによる記述という枠組の変換によって, 集合論が (b) の意味での naïve ものから次のステップに進むための重要な布石の 1 つとなった可能性もあるように思える。このことの検証には, (a) と (b) の間の時期の現在ではほと

²⁾ Cantor は当時発見された様々なパラドックスについて正確な知識を持っていたことが知られており, 自分自身でもいくつかのパラドックスを発見している

³⁾ これらのパラドックスをネタに彼の集合論を批判ないし攻撃しようとする人々に対しての問題意識, 危機意識は (場合によっては多少の被害妄想的な過剰性さえ伴って) 持っていたかもしれないが。

んど忘れられてしまっている展開をより子細に検討することが必要であろう。

Zermelo の 1908 年の論文 [11] のもう 1 つの大きな貢献は、関数を特別な集合として (ある特定の集合にコードされたものとして) 捉えることで、集合と関数という 2 つのものの存在ではなく、集合の存在のみを一元論的に論じればよいことを看破したことであろう。しかし、このリマークは次の節で論じるべきことの先取りになってしまっているかもしれない。

いずれにしても、naïve set theory としてのカントルの集合論は、「矛盾していた」というような表明は、それ自身 naïveすぎるし、数学的な事実を反映もしていない、と確言できそうである。

3 『(b) naïve set theory = 数理論理学を用いた厳密な公理化の 行なわれる前の (公理的) 集合論』 の場合

(b) の立場で問題としている naivety は、Zermelo の 1908 年の論文 [11] での „definit“ (確定的) の概念であろう。

4. 領域の基本関係が、公理と論理規則により、その正当性あるいは不当性を恣意性を残さず決定するような問い、あるいは主張 $\mathfrak{E}$ は、「確定的」であるという。同様に、変数 x があるクラス $\mathfrak{K}$ の個体を動くクラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ も、 $\mathfrak{K}$ の各個体 x に対し、それが確定的であるとき、「確定的」であるという。たとえば $a \in b$ であるかどうかという問いは確定的だし、 $M \subseteq N$ かどうかという問いもそうである。([11])⁴⁾

Zermelo の [11] では、これに続けて、

公理 III. クラス命題 $\mathfrak{E}(x)$ がある集合 M の要素のすべてに対して確定的なら、 M の部分集合 $M_{\mathfrak{E}}$ で、 $\mathfrak{E}(x)$ が真になるような M の要素のすべて、しかもそれらのみを要素として含むようなものが存在する。

(分出公理)

として分出公理が導入されている。ここの部分だけを見ると、„definit“ (確定的) という用語は非常に曖昧な概念として導入されているような印象を受けるが、これに続く、definit であることの個別の判定を行なっている箇所を詳しく見てみると、Zermelo が、この概念に対して非常にはっきりとした判定条件を持っていて、彼のこの ([11] では implicit に個々の証明の議論の細部に表明されている) 判定条件は、現代の集合論での、「1 階の論理の論理式で表現できる性質」という “definit な性質” の厳密な規定を先取りしているような印象さえ与える。[11] の少し先の部分での例を見てみよう：

⁴⁾以下引用文は、渕野 昌訳 『数とは何かそして何であるべきか』、ちくま学芸文庫、近刊に収録予定の [11] の翻訳の一部である。ただし記号は現代のもので置き換えてある。

9. 同様に2つ以上の集合 $M, N, R, \dots$ に対し、「平均」 $D = [M, N, R, \dots]$ をとることができる。なぜなら T を要素も集合であるような集合とすると、III により、すべての事物 a に対し、ある部分集合 $T_a \subseteq T$ で、 T の要素で a を要素として含むもの全体となっているものを対応させることができる。したがって、すべての a に対して $T_a = T$ かどうか、つまり、 a がすべての T の要素の共通の要素になっているかどうかは確定的である。 A を T の任意の要素とすると、 A の要素 a で $T_a = T$ となるようなもの全体は、このような共通の要素の全体となるようなもの全体となっている A の部分集合 D となる。

ここでの「平均」はドイツ語の „Durchschnitt“ という集合の共通部分をあらわすのにも用いられる単語の直訳である。集合族の共通部分が再び集合になることの議論であるが、この議論を現代語に意識してみると、

$T = \{M, N, R, \dots\}$ の共通部分 $\bigcap T$ が (集合として) 存在する。なぜなら、各事物 a に対し、(分出公理により) $T_a = \{B \in T : a \in B\}$ がとれる。 $A \in T$ を1つ固定すると、分出公理から、 $\{a \in A : T_a = T\} = \{a \in A : \forall B \in T (a \in B)\}$ がとれる。この集合が $\bigcap T$ である。

となり、((b) の意味で naïve でない) 現代的な集合論での対応する分出公理の適用で用いられることになる論理式の、部分論理式からの構築に、見事に対応する議論となっていることが確認できる。

(b) の意味で naïve な集合論は通常の数学を展開するのに十分に厳密な枠組を提供している。そのことは、[11] の後半での展開がすでに示唆している⁵⁾、たとえば Halmos の教科書 [7] がより明白な形で示していることでもある。

4 さらに naïve でない (?) 集合論にむけて

それではなぜ、さらに ((b) の意味で naïve でない) 公理的集合論を考察するのか、というと、それは現代の視点からは、相対的無矛盾性、や相対的独立性の証明を厳密に行なうのために、集合論の公理系が first order logic の上にきちんと定式化される必要があるからである、と答えることができる。

集合論の公理系が first order logic 上厳密に定式化されるようになるのは 1920 年代の終りから 1930 年代にかけて (Zermelo [12], Bernays [1] etc.) だが、この集合論の公理化の上に述べたような意味が、本当に理解されるようになるには、Gödel の 1930 年代末の仕事や、Cohen の 1960 年代の仕事を持たなくてはならなかった。

⁵⁾[11] では、関数も特別な集合として扱う、という Dedekind らの議論には決定的に欠けていたアイデアが明確に現れている。しかし、順序対の導入がまだできていないために、そこでの関数の扱いは、定義域と値域が disjoint な場合のみの 1 対 1 関数のみを扱う、という、非常に不器用な形でしかできていない。ただし、そのことを除くと、[11] の議論は、集合論の内部ですべての数学が展開できることを十分に示唆するものになっていると言えると思う。

現代の集合論では、Gödel や Cohen の連続体仮説の無矛盾性の研究に端を発する内部モデルや forcing の理論による相対的無矛盾性、独立性の証明、あるいは、もっと集合論内部での言葉で言えば、集合論のモデルの構成法に関する研究が、大きな中心課題となっているが、その立場から、naïve な集合論とそれ以降の集合論、という線引きをしなければいけないとすると、それは、この相対的無矛盾性の証明を可能にした集合論の(厳密な意味での)公理化を境界とする(b)によるものが自然に思えるし、さらに言えば、forcing 以前と以降という線引きの方がより適切と言えるかもしれない。この認識は、集合論の研究を専門としない数学者の平均的なそれとはかなりかけはなれているかもしれないが。

最近の集合論の研究では、内部モデルや forcing の手法によって得られる様々な集合論のモデルの出現にともなって、そのようなモデルの総体をさらに大きな1つのユニヴァース (set theoretic multiverse) としてとらえる、という見方が自然なものに思えるようになってきている。これは single universe versus multiverse という、もっとアクチュアルな分岐線の線引きの可能性を示唆しているようにも思える。このような視点に関する議論については [3] や [5] を参照されたい。

最後に、これは蛇足かもしれないが、集合論での独立性命題についての話を集合論以外の「一般の」数学者に話したときに帰ってくる反応の1つに、『こんな恐いことが身近な数学でも起っているとは (!?)』、というようなものがある — 数理解析研究所での本稿に関連した講演で、数学的な独立性命題の例として私の古い結果 [4] の紹介をしたときにも、そのような趣旨の質問／コメントをいただいた。

しかし集合論の研究者にとって、独立性命題は、恐怖を呼びおこす危険などではなく、むしろ数学的無限の本質の啓示のようなものである。集合論研究は、多くの独立命題を子細に分析することで、数学的無限の本質へ肉薄してゆくことを目指している。

「ごく日常的な数学的命題も集合論から独立であり得る」という話をするとき、そこで伝えたいことは、危険に対する注意のようなものではなく、むしろ、「日常的な数学の中にも数学的無限の本質の啓示がなされているのだ」という指摘である。

文献

- [1] Paul Bernays, A system of axiomatic set theory, Part I, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 2, (1937), 65–77.
- [2] Georg Cantor und Richard Dedekind, aus dem Briefwechsel, Anhang zu [6].
- [3] Sy David Friedman, Sakaé Fuchino and Hiroshi Sakai, On set-generic multiverse, preprint.
- [4] Sakaé Fuchino, On the simplicity of the automorphism group of $\mathcal{P}(\omega)/fin$ Archive for Mathematical Logic, Vol.31, No.5 (1992), 319–330.

- [5] Sakaé Fuchino, The Set-theoretic multiverse as a mathematical plenitudinous Platonism viewpoint, submitted.
- [6] Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, (ed. Ernest Zermelo) (1932).
- [7] Paul Halmos, *Naive Set Theory*, Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960.
- [8] Herbert Meschkowski and Winfried Nilson (eds.) *Georg Cantor Briefe*, Springer-Verlag (1991).
- [9] Gregory H. Moore, The Origins of Zermelo's Axiomatization of Set Theory, *Journal of Philosophical Logic* , Vol. 7, No. 1 (1978), 307–329.
- [10] J. von Neumann, Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre, *Mathematische Annalen* 99 (1928), 373–391.
- [11] Ernest Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen* 65 (1908), 261–281.
- [12] Ernest Zermelo, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche.: Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 16, (1930), 29–47.