

5-デザインについて

広大 学校教養 景山 三平

$5-(v, k, \lambda)$ design について次の2つの結果を述べる。

[定理1] $v \geq 2k$ なる 5 -design のパラメータ b は $b \geq v(v-1)$ を満たす。

[定理2] $5-(12, 6, 1)$ design は $b = v(v-1)$ を満たす唯一つの 5 -design である (補構造を除く)。

Ray-Chaudhuri and Wilson [4] は $v \geq k+3$ なる 5 -design に対して $b \geq (v-1)(v-2)$ を示し, 最近 Carmony [1] は $b = (v-1)(v-2)$ なる 5 -design は存在しないことを示した。また Kageyama [2] は $v \geq k+2$ なる 5 -design に対して $b \geq v(v-1)(v-2)/(2k)$ を示している。この定理はこの不等式の改良と特徴づけを与えている。

t -design の complement も t -design である $v \geq 2k$ の範囲で考察することにする。以下、証明を与える。

一般に $5-(v, k, \lambda_5)$ design に対し

$b = \lambda_5 v(v-1)(v-2)(v-3)(v-4) / [k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)]$ が成り立つ。まず Kageyama の不等式より次を得る。

補題: $v \geq 2k+2$ に対し $b \geq v(v-1)$ が成り立つ。

(定理1の証明)

補題より 定理は $v=2k, v=2k+1$ のときのみを示せば十分である。

『 $v=2k$ の場合』 v のとき $\lambda_2 = r(k-1)/(2k-1)$ であり $r(k-1) = 1$ であり $r = l(2k-1)$ なる自然数 l が存在する。

5 -design の $1^0 5^1 X - S$ は $b = 2l(2k-1), \lambda_2 = l(k-1), \lambda_3 = \frac{l(k-2)}{2}, \lambda_4 = \frac{l(k-2)(k-3)}{2(2k-3)}, \lambda_5 = \frac{l(k-3)(k-4)}{4(2k-3)}$ である。今 $b \geq v(v-1) \iff l \geq k$ であり $l \geq k$ を示す。 $2\lambda_4$ の整数性は $(k-2, 2k-3) = 1$ であり

(1) $\frac{l(k-3)}{2k-3}$ は 整数 である。

$(k-3, 2k-3) \leq 3$ であり 次の3つの場合に分けて考える。

(i) $(k-3, 2k-3) = 1$: (1) により $l \geq 2k-3 > k$

($k \geq 5$)。即ち $l > k (\iff b > v(v-1))$ が成り立つ。

(ii) $(k-3, 2k-3) = 2$: (1) より $l \geq k - 3/2$. $\therefore l = 2$
 $l = k-1$ のとき $2k-3$ は非整数となる。よって $l \geq k$.

(iii) $(k-3, 2k-3) = 3$: $k-3 = 3a_1, 2k-3 = 3a_2, (a_1, a_2) = 1$
 $(a_1, a_2: \text{自然数})$. (1) より

(2) $\frac{la_1}{a_2}$ は整数である。

よって $l \geq a_2 = 2k/3 - 1$. 今 $l = a_2$ とすると,

$$(3) \quad 2k = 3(l+1)$$

を得る。両辺 $l_3 = l(k-2)/2$ と $k = 3(a_1+1)$ (奇数)

は $l = \text{even}$ を意味する。よって (3) に矛盾する。

よって $l \neq a_2$. $\therefore$ 上記 (2) より $l \geq 2a_2 = 4k/3 - 2 \geq k$ ($\because l$ は整数, $k \geq 5$). $\therefore$ ように $v = 2k$ のとき $l \geq k (\Leftrightarrow b \geq v(v-1))$ が成り立つ。

【 $v = 2k+1$ の場合】 $\therefore$ 上記 $r = bk/(2k+1)$ より

$b = l(2k+1)$ なる自然数 l が存在する。5-design の λ 's

$$x-5 \text{ は } r = lk, \lambda_2 = \frac{l(k-1)}{2}, \lambda_3 = \frac{l(k-1)(k-2)}{2(2k-1)},$$

$$\lambda_4 = \frac{l(k-2)(k-3)}{4(2k-1)}, \lambda_5 = \frac{l(k-2)(k-3)(k-4)}{4(2k-1)(2k-3)} \text{ となる。 今}$$

$b \geq v(v-1) \Leftrightarrow l \geq 2k$ より $l \geq 2k$ を示すことにする。 $2k$ の整数性と $(k-1, 2k-1) = 1$ より

(4) $\frac{l(k-2)}{2k-1}$ は整数である。

$(k-2, 2k-1) \leq 3$ より 可能性のある2つの場合に分けて考える。

(i) $(k-2, 2k-1) = 1$: (4) より $l \geq 2k-1$. 先ず $l = 2k-1$ のとき $l_5 = (k-2)(k-3)(k-4)/[4(2k-3)]$. また $(k-2, 2k-3) = 1$, $(k-3, 2k-3) \leq 3$, $(k-4, 2k-3) \leq 5$ が成り立つ。 $k=2$ 4 l_5 の整数性, $2k-3$ が奇数, $k-3, k-4$ が連続2整数より $(k-3, 2k-3) = 3$ として $(k-4, 2k-3) = 5$ の場合のみ成り立つ。 $\therefore$ $k=9$ を意味するが $l_4 = 2/2$ となり結局 $l \geq 2(2k-1) > 2k$ を示す。

(ii) $(k-2, 2k-1) = 3$ ($\Leftrightarrow k-2 = 3f_1, 2k-1 = 3f_2, (f_1, f_2) = 1$): (4) より

(5) $\frac{lf_1}{f_2}$ は整数である。

$\therefore$ (4) より $l \geq f_2 = (2k-1)/3$.

(a) $l = (2k-1)/3$ のとき; $12l_5$ の整数性と $(k-2, 2k-3) = 1$ より $(k-3)(k-4)/(2k-3)$ は整数となる。

(i) と同様 $k=9$ を得る。 $\therefore$ (4) は $l = 17/3$ (非整数) として (5) より $l \geq 2f_2 = 2(2k-1)/3$ を導く。

(b) $l = 2(2k-1)/3$ のとき; $6l_5$ の整数性と $(k-2,$

$2k-3)=1$ であり $(k-3)(k-4)/(2k-3)$ は整数となる。

(a) と同様 $k=12$ $k=9$ として $\lambda=34/3$ (非整数) と
 ならず (5) であり 再び $\lambda \geq 3f_2 = 2k-1$ とならず。

(c) $\lambda=2k-1$ とせよ; $4f_5$ の整数性 $(k-2, 2k-3)$
 $=1$ であり $(k-3)(k-4)/(2k-3)$ は整数である。(a)

と同様 $k=12$ $k=9$ として $\lambda=17$ とならず。 λ とせよ
 $\lambda_4=21/2$ (非整数) とならず。 $\lambda, 2$ $\lambda > 2k$
 $(\Leftrightarrow b > v(v-1))$ とならず。

(定理2の証明)

補題より $v=2k+2, 2k+1, 2k$ のときのみ
 $b=v(v-1)$ であり 5-design を与えることはない。 したがって

$b=v(v-1)$ を与える 5-design のパラメータは
 $r=k(v-1), \lambda_2=k(k-1), \lambda_3=\frac{k(k-1)(k-2)}{v-2},$

$$\lambda_4=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{(v-2)(v-3)}, \lambda_5=\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{(v-2)(v-3)(v-4)}$$

とならず。

『 $v=2k+2$ の場合』 $(2k-1, k-1)=1, (2k-1, k-2) \leq 3,$
 $(2k-1, k-3) \leq 5, 2k-1$ は奇数 であり $2\lambda_4$ の整数
 性は $(2k-1, k-2)=3, (2k-1, k-3)=5$ とするとき,
 $k=8$ を示す。 λ とせよ 5-(18, 8, 2) design の非存在

存在は Kramer [3] より示され 2113。

『 $v=2k+1$ の場合』 λ_3 は常に非整数 ($k \geq 3$ 1-5+12) となる。

『 $v=2k$ の場合』 $(2k-3, k-2)=1$, $(2k-3)/k(k-3)$, $(k, 2k-3) \leq 3$, $(k-3, 2k-3) \leq 3$ あり 2/4 の整数性は $(k, 2k-3)=3$, $(k-3, 2k-3)=3$ を要す。これは $k=6$ を示す ($\lambda_5=1$ となる)。このとき 5-(12, 6, 1) design は存在 (一部のみ) 2/4 は W.H [5] より知られる 2113。

本書の定理 1, 2 は Carmony [1] による公開問題に対する完全な解答を与えて 2113。

参考文献

- [1] L.A. Carmony (1978). Tight $(2t+1)$ -designs. Utilitas Math. 14, 39-47.
- [2] S. Kageyama (1975). Note on an inequality for tactical configurations. Ann. Inst. Statist. Math. 27, 529-530.
- [3] E.S. Kramer (1975). Some t -designs for $t \geq 4$ and $v=17, 18$. Proc. Sixth Southeastern Conf.

on Combinatorics, Graph Theory and Computing
(Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1975),
pp. 443-460.

[4] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson (1975). On
t-designs. Osaka J. Math. 12, 737-744.

[5] E. Witt (1938). Über Steinersche
Systeme. Abh. Math. Sem. Hamb. 12,
265-275.