

C^* 力学系に於ける複素解析の応用

境 正 一 郎 (Shōichirō Sakai)

1. 序文. C^* 力学系に於いては, 平衡状態, 基底状態, 有界摂動等の基本概念の記述並びに推論に複素解析が重要な役割を担っている. この小文で, いくつかの例をあげ, 理論のさらなる発展のため, 複素解析の重要性を示したい。

2. 準備. C^* 代数に於ける微分論の主要な目的の1つは量子統計力学を C^* 代数の枠組の中で展開することである。実際, 量子格子系の理論に於ける力学系の構成, 平衡状態, 基底状態, 有界摂動, 相転移, 対称性の破れ等重要な物理的概念は UHF 代数 (uniformly hyperfinite C^* 代数) の正規微分論に上首尾に一

般化され、UHF代数の微分論を極めて豊かな研究分野にしている。殊に、相転移の理論は物理学、数学にとどまらず、将来、自然科学、社会科学等の諸分野に応用される重要な理論と思われるので、UHF代数の力学系への一般化は意義深い。

この節では、読者に向題意識を共有していただくため、UHF代数の微分論について簡単に触れる。詳細は拙著[1]を参照されたい。

C^* 代数 $\mathcal{A}$ がUHF代数であるとは、 $\mathcal{A}$ が有限次元全複素行列の $*$ -代数の増加列 $\{\mathcal{A}_n\}$ を含んでいて、次の条件を満たすことである：

- (i) $1 \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n \subset \dots$; (ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ は $\mathcal{A}$ で稠密である。

次に、 $\mathcal{A}(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ 上の定義域をもった $*$ -微分 δ をUHF代数 $\mathcal{A}$ の正規微分という（即ち、 δ は $\mathcal{A}(\delta)$ から $\mathcal{A}$ の中への線形作用素で、 $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$, $\delta(a^*) = \delta(a)^*$ ($a, b \in \mathcal{A}$)). 正規微分の研究は一般に量子格子系の研究を含む。

$\{e_{ij}^n \mid i, j = 1, 2, \dots, m_n\}$ を $\mathcal{O}_n$ の行列単位とす。 $i h_n = \sum_{i=1}^{m_n} \delta(e_{i1}^n) e_{1i}^n$ とおくとき、 $h_n^* = h_n (\in \mathcal{O})$, $\delta(a) = i[h_n, a] (a \in \mathcal{O}_n) (n=1, 2, \dots)$. すると正規微分は近似的に内部的であり $\delta(a) = \lim_n \delta_i h_n(a) (a \in \mathcal{D}(\delta))$, $\therefore \delta_i h_n(a) = i[h_n, a] (a \in \mathcal{O})$.

正規微分 δ は $\|(1 \pm \delta)(a)\| \geq \|a\| (a \in \mathcal{D}(\delta))$ である。従って、 δ は閉化可能である。さらに、 $(1 \pm \delta)\mathcal{D}(\delta)$ から $\mathcal{O}$ へ稠密な写像は $(1 \pm \bar{\delta})\mathcal{D}(\bar{\delta}) = \mathcal{O}$, $\|(1 \pm \bar{\delta})^{-1}\| \leq 1$, $(1 \pm \bar{\delta})^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{D}(\bar{\delta})$ ($\bar{\delta}$ は δ の閉包, $\mathcal{D}(\bar{\delta})$ は $\bar{\delta}$ の定義域) . Hille-Yosida の理論 [2] により δ は前生成作用素である。さらに、

$$\begin{aligned} & \| (1 \pm \delta_i h_n)^{-1} (1 \pm \delta)a - (1 \pm \bar{\delta})^{-1} (1 \pm \delta)a \| \\ &= \| (1 \pm \delta_i h_n)^{-1} \{ (1 \pm \delta)a - (1 \pm \delta_i h_n)a \} \| \leq \| \delta(a) - \delta_i h_n(a) \| \rightarrow 0 \\ & (a \in \mathcal{D}(\delta)). \end{aligned}$$

$\|(1 \pm \delta_i h_n)^{-1}\| \leq 1$ であるから、 $\{(1 \pm \delta_i h_n)^{-1}\}$ は強位相に関して、 $(1 \pm \bar{\delta})^{-1}$ に収束する。従って、Trotter-Kato の定理 (cf. [3]) により

$$\|(\exp t \delta_i h_n)(a) - (\exp t \bar{\delta})(a)\| \rightarrow 0 \quad (a \in \mathcal{O}).$$

また、 $t \mapsto \exp t \delta_i h_n$ は一単位相に関して連続な $\mathcal{O}$ の内部 $*$ -自己同型の 1 パラメータ群である。

強連続の $*$ -自己同型の 1 パラメータ群 $t \mapsto$

$\exp t\delta$ は量子格子系では時間発展である。

上に考察した性質を一般化するため次の定義をする。

2.1. 定義. C^* -力学系とは, C^* -代数 $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}$ 上の $*$ -自己同型の強連続の 1 パラメータ群 $\alpha: t \mapsto \alpha_t (t \in \mathbb{R})$ からなる系である。

2.2. 定義. C^* -力学系 $(\mathcal{O}, \alpha)$ が近似的に内部的であるとは, $\mathcal{O}$ の一様連続の内部 $*$ -自己同型の 1 パラメータ群からなる C^* -力学系の列 $\{(\mathcal{O}_n, \alpha_n)\}$ が存在して, $\|\alpha_{n,t}(a) - \alpha_t(a)\| \rightarrow 0 (a \in \mathcal{O})$, 即ち, $\alpha_{n,t} = \exp t\delta_n$ ($\delta_n^* = \delta_n \in \mathcal{O}_n$), $\alpha_t = \exp t\delta$ とかくと, $\|(\exp t\delta_n)(a) - (\exp t\delta)(a)\| \rightarrow 0 (a \in \mathcal{O})$. このとき $\alpha = \text{strong lim } \alpha_n$ 又は $\alpha_t = \text{strong lim } \alpha_{n,t}$ とかく。

格子系の中で Ising 模型は古典格子系, Heisenberg 模型は量子格子系である。正規微分の中で古典系を一般化したものが可換正規微分である。これを定義しよう。

2.3. 定義. δ は正規微分とし, $\delta(a) = i[h_n, a]$ ($a \in \mathcal{O}_n; n=1, 2, \dots$) とする。 δ が可換であるとは,

自己随伴元の列 $\{h_n\}$ を $h_n h_m = h_m h_n$ ($m, n=1, 2, \dots$)

と取るようにとれることである。

可換正規微分は次のように一般的に生成定理が成立する。

2.4. 定理. δ を可換正規微分とする。

$\delta(a) = i[h_n, a]$ ($a \in \mathcal{O}_n$, $h_m h_n = h_n h_m$ ($m, n=1, 2, \dots$);

$n=1, 2, \dots$) とする。 $\mathcal{O}_n$ を $h_1, h_2, \dots, h_n$ で生成される

$\mathcal{O}$ の C^* 部分代数を $\mathcal{A}_n$ とすると, $1 \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots$

$\subset \mathcal{A}_n \subset \dots$ と取り, $\tilde{\delta}(b) = i[h_n, b]$ ($b \in \mathcal{A}_n$; $n=1, 2, \dots$)

とあくと $\tilde{\delta}_1$ は well-defined で, δ を拡大して $*$ -微分

であり, $\tilde{\delta}$ は前生成作用素で, $(\exp t \tilde{\delta})(b) =$

$(\exp t \delta_i h_n)(b)$ ($b \in \mathcal{A}_n$; $n=1, 2, \dots$) で $\exp t \tilde{\delta} = \text{strong}$

$\lim \exp t \delta_i h_n$ である。

定理 2.4 は古典格子系では, 正規微分が定義されるならば, 常に, 力学系を構成することになり, その構成方法は具体的であることを示している。従って, 可換正規微分に関するモデルの構築, 対応する力学系の構成, さらに, その力学系に対する基底状態, 平衡状態, そして相転移の有無等を検証することか

可能になる。実際、岸本[4]は、この方法と C^* 代数の K -理論を用いて、逆温度がどんなに零に近くても相転移が起こる可換正規微分の例を構築している。これは、古典系の場合に、Lee-Yang の定理を使って証明されている、逆温度が充分零に近ければ相転移が起こるという、よく知られた定理とは対照的の定理であり、可換正規微分が広範囲に涉って相転移のモデルを提供する可能性を示している。

UHF 代数の一般化正規微分を構築するには、まず、 $\{\Omega_n\}$ を有限次元全複素行列 C^* 代数の増加列で、 $1 \in \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_n \subset \dots$ で、 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ は Ω で稠密になるものとして、 Ω の自己随伴元の列 $\{h_n\} \in [h_{n+1} - h_n, a] = 0$ ($a \in \Omega_n; n=1, 2, \dots$) があるようにする。このとき、 $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ に対し $a \in \Omega_{n_0}$ なる数 n_0 をとり、 $\delta(a) = i[h_{n_0}, a]$ と定義すると、 $\delta(a)$ は well-defined であり $\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$ なる正規微分である。この δ が前生成作用素となるための必要十分条件は $(1 \pm \delta)\delta(1 \pm \delta)$ が Ω で稠密であることである。然し、この条件を具体

的極モデルで調べることは難い。一方、
 Ω の適当な自己随伴元 h をとると $(\delta + \delta i h) \Omega(\delta)$
 $\subset \Omega(\delta)$ とできる ([1] Prop. 4.5.5)。有界擾動は前
 生成作用素であること、或は、前生成作用素
 Δ の拡大の可能性を不変に保つか、 $\delta + \delta i h$
 を δ と書きかえると $\delta(\Omega(\delta)) \subset \Omega(\delta)$ 。このとき、
 δ^n が $\Omega(\delta)$ 上で定義できる。もし、 $a \in \Omega(\delta)$ に対
 し、 $r_a > 0$ が存在して、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\delta^n(a)\|}{n!} r_a^n < +\infty$ ならば
 a は解析的であるという。このとき、Nelson
 の定理により、 $\Omega(\delta)$ のすべての元が解析的であ
 るならば、 δ は前生成作用素である。従っ
 て、 $\alpha_t = \exp t \delta$ とすると、 $\{\Omega, \alpha_t\}$ は C^* 力学系
 であり $\alpha_t = \text{strong lim } \delta_i h_n$ である。

さて、逆に、UHF 代数 Ω の任意の C^* 力
 学系 $\{\Omega, \alpha_t\}$ を考えよう。このとき、 $\alpha_t = \exp t \delta$
 ここで、 δ は閉微分である。 $\Omega(\delta)$ を δ の定
 義域とする。 $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega(\delta^n)$ が解析的であるとは
 $r_a > 0$ が存在して、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\delta^n(a)\|}{n!} r_a^n < +\infty$ 。

このとき、次の定理が成立する。

2.5. 定理. $\{\Omega, \alpha_t\}$ を UHF 代数 Ω をも

った C^* -力学系とし, $\alpha_t = \exp t\delta$ とする. このとき, 有限次元全複素行列 $*$ -代数の増加列 $\mathcal{A}_n$ が存在して, $1 \in \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}_n \subset \cdots \subset A(\delta) \subset \mathcal{A}(\delta)$ であり, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ は $\mathcal{A}$ で稠密である (ここで $A(\delta)$ は δ に関して解析的なる $\mathcal{A}$ の元全体).

注意. この定理は, δ に対して, 正規微分 δ_1 が存在して $\delta_1 \subset \delta$ とできることを意味している. 即ち, UHF 代数の任意の生成作用素であるような $*$ -微分は正規微分の拡大であることを意味している.

次の問題は C^* -代数の非有界微分論の創世期以来の未解決問題であつたが最近, 岸本 [5] によつて否定的に解決された.

核問題. $\{\mathcal{A}, \exp t\delta (t \in \mathbb{R})\}$ を UHF 代数をもつた C^* -力学系. このとき定理 2.5 に於ける δ_1 を $(1-\delta_1) \cup (\delta_1)$ が $\mathcal{A}$ で稠密になることと選べるか?

もし, $(1-\delta_1) \cup (\delta_1)$ が $\mathcal{A}$ で稠密ならば, $\overline{\delta_1} = \delta$. 従つて, C^* -力学系 $\{\mathcal{A}, \alpha_t\}$ は近似的に内部的である. 即ち, 核問題が肯定的である

$\{\mathcal{O}, \alpha\}$ は近似的に内部的である。

次の重要な定理が成立する

2.6. 定理 (Powers-境). UHF 代数 $\mathcal{O}$ をもった C^* 力学系 $\{\mathcal{O}, \alpha\}$ に於いて, もし $\{\mathcal{O}, \alpha\}$ が近似的に内部的であるならば, すべて逆温度 $\beta (\in \mathbb{R})$ に対し, $\{\mathcal{O}, \alpha\}$ は平衡状態 (KMS 状態) φ_β が存在し, 基底状態も存在する。

さて, 量子格子系については, もし, その全ハミルトニヤルが力学系を定義するものであれば, その力学系は常に, 近似的に内部的であることが示せる。従って, 非有界微分論の創成期から次の予想が提起されたが, 未だに解決されていらい。

Powers-境の予想. UHF 代数 $\mathcal{O}$ をもったすべての C^* 力学系 $\{\mathcal{O}, \alpha\}$ は近似的に内部的である。

最後に, 相転移について述べる。

δ は正規微分, $\mathcal{O}(\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ とする。 $\tau \in \mathcal{O}$ のトレース状態とし, $\varphi_n \in \mathcal{O}$ から $\mathcal{O}_n$ への conditional expectation (即ち, $\tau(a \varphi_n(b)) = \tau(ab)$ ($a \in \mathcal{O}_n, b \in \mathcal{O}$)) とする。 $\delta(a) = i[h_n, a]$ ($a \in \mathcal{O}_n; n=1, 2, \dots$) と

する。 $\|h_n - p_n(h_n)\| = O(1)$ のとき, δ は有界表面エネルギーをもつという。このとき, 岸本[6]は有界表面エネルギーをもつた正規微分は前生成作用素であることを示した。従って, C^* 力学系 $(\mathcal{O}, \exp t\delta (t \in \mathbb{R}))$ が存在する。かつ近似的に内部的である。定理2.6により, 任意の $\beta (\in \mathbb{R})$ に対して, KMS状態 φ_β が存在する。

境[7]は可換正規微分が有界表面エネルギーをもつていれは " C^* 力学系 $(\mathcal{O}, \exp t\delta (t \in \mathbb{R}))$ は, 任意の逆温度 β に対して唯一つの KMS 状態 φ_β をもつ, 即ち, 相転移が起こらないことを示した。荒木[8]は, この定理をすべての正規微分に拡張した。

3次元 Heisenberg ferromagnet 模型に於いて, 適当な逆温度 $\beta (>0)$ で相転移が起こるか否かは未解決の大問題である。

3. 複素解析の応用. まづ, C^* 力学系に於ける平衡状態として, Haag-Hugenholtz-Winninkにより KMS 状態 (Kubo-Martin-Schwinger 状態) が次のように定義された。 $\beta \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathcal{O}$ の状態 φ_β (

即ち, φ_β は $\mathcal{A}$ 上の線形汎関数で, $\varphi(a^*a) \geq 0$
 $(a \in \mathcal{A})$, $\varphi(1) = 1$, ここで 1 は $\mathcal{A}$ の単位元 ($\mathcal{A}$ は単位
 元をもつと仮定する)) が C^* -力学系 $(\mathcal{A}, \alpha_t)$ の逆
 温度 (温度の逆数) β で KMS 状態であるとは,
 任意の $a, b \in \mathcal{A}$ に対し複素平面の帯 $S_\beta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \beta \text{ (} \beta \geq 0 \text{) または } \beta \leq \operatorname{Im}(z) \leq 0 \text{ (} \beta < 0 \text{)}\}$ 上で有界連
 続関数 $F_{a,b}$ が存在して, $F_{a,b}$ は S_β の内部 S_β° で解析
 的で境界上では, $F_{a,b}(t) = \varphi_\beta(a\alpha_t(b))$, $F_{a,b}(t+i\beta) = \varphi_\beta(\alpha_t(b)a)$
 $(t \in \mathbb{R})$ をみたすことである。

KMS 条件より逆温度 0 では φ_0 はトレース状態 (即ち, $\varphi_0(ab) = \varphi_0(ba)$ ($a, b \in \mathcal{A}$)) である。

逆に, $\mathcal{A}$ がトレース状態 τ をもつとすると,
 $\mathcal{A}$ の任意の自己随伴元 h (即ち, $h^* = h$) に
 対し, $\alpha_t = \exp t \delta i h$ とすると, $\mathcal{A}$ の状態 $\varphi_\beta(a)$
 $= \tau(ae^{-\beta h}) / \tau(e^{-\beta h})$ ($a \in \mathcal{A}$) は C^* -力学系 $(\mathcal{A}, \alpha_t)$
 の逆温度 β に於ける KMS 状態である。とく
 に, $\mathcal{A}$ が唯1つのトレース状態をもつている
 とすると (例えば, $n \times n$ ($n < +\infty$) 複素行列全
 体のつくる $*$ -代数 (即ち, 有限次元複素全行列 $*$ -
 代数, UHF 代数) 対 α_t は β に於いて唯1つの KMS 状態,

φ_β をもつことが複素解析関数の理論を使って示せる。従って有限系に於いては KMS 状態と Gibbs 状態が一致する。この事実が C^* 力学系の平衡状態を KMS 状態で定義することの妥当性を示している。KMS 状態は種々の素晴らしい性質をもっていることが、複素解析を使って証明できるが、ここでは C^* 代数の広い知識を必要とし、一般的な結果をとりあげる。

3.1. 命題. φ_β を C^* 力学系 (A, α_t) の逆温度 β に於ける KMS 状態とすると φ_β は α -不変である (即ち, $\varphi_\beta(\alpha_t(a)) = \varphi_\beta(a)$ ($t \in \mathbb{R}$, $a \in A$)).

証明. 調和関数の理論より, 2つの核関数 $K_1(t, z)$, $K_2(t, z)$ ($z \in S_\beta$, $t \in \mathbb{R}$) が存在して,
 $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$, $\int_0^\infty K_1(t, z) dt + \int_0^\infty K_2(t, z) dt = 1$
 かつ

$$F_{a,b}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(t, z) \varphi_\beta(a \alpha_t(b)) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(t, z) \varphi_\beta(\alpha_t(b) a) dt.$$

$a=1$, $b=b^*$ とすると $F_{a,b}$ は S_β^0 上の実数値複素解析関数である。ゆえに, $F_{a,b}(z) = \text{定数}$ (証明終)。

3.2. 命題. $\varphi_\beta(a^*a) = 0 \Rightarrow \varphi_\beta(aa^*) = 0$.

証明. Schwartz の不等式により,

$$\varphi_p(a^*a) = 0 \Rightarrow \varphi_p(a^*\alpha_t(a)) = 0. \quad F_{a^*,a}(z) = \overline{F_{a,a}(\bar{z})}$$

$(\bar{z} \in S_p^0)$ とする. $F(t) (t \in \mathbb{R})$ は実数であるから, Schwarz の反射定理により, $F_{a^*,a}$ は $\{z \mid |\operatorname{Im} z| \leq |p|\}$ 上で解析的である. よって $F_{a^*,a}(z) = 0 \ (z \in S_p)$ (証明終).

3.3 命題 (Powers-境). (* 力学系 $\{\Omega, \alpha\}$ が近似的に内部的で, Ω がトレース状態をもっているならば, 任意の実数 β に対し, $\{\Omega, \alpha\}$ は逆温度 β に於ける KMS 状態をもっている.

証明. τ を Ω のトレース状態, $\alpha_t = \text{strong } \lim_{h \rightarrow 0} \exp t \delta_i h_n$ とする. このとき, $\varphi_{n,\beta}(a) = \frac{\tau(a e^{-\beta h_n})}{\tau(e^{-\beta h_n})}$ ($a \in \Omega$) とする. $\varphi_{n,\beta}$ は $\{\Omega, \exp t \delta_i h_n (t \in \mathbb{R})\}$ の β に於ける KMS 状態である. $\mathcal{G}_\Omega$ を Ω の状態全体の集合で, 位相 $\sigma(\mathcal{G}_\Omega, \Omega)$ をもった状態空間とする. このとき $\mathcal{G}_\Omega$ はコンパクト Hausdorff 空間である. $\{\varphi_{n,\beta}\}$ の $\mathcal{G}_\Omega$ に於ける任意の集積点をとって φ_β とする. このとき, φ_β は $\{\Omega, \alpha\}$ の β に於ける KMS 状態であることを示す. まず,

$$F_{n,a,b}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(z,t) \varphi_{n,\beta}(a \alpha_{n,t}(b)) dt + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(z,t) \varphi_{n,\beta}(\alpha_{n,t}(b) a) dt$$

$(z \in S_p^0).$

C を $\{a, \alpha_t(b), 1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ によって生成される

3. 3. C^* -部分代数とする C は separable である。

したがって, (n_j) の部分列 (n_j) が存在して,

$\varphi_{n_j, \beta} \rightarrow \varphi_\beta$ on C . そのとき,

$$|\varphi_{n_j, \beta}(a\alpha_{n_j, t}(b)) - \varphi_\beta(a\alpha_t(b))| \leq \|a\alpha_{n_j, t}(b) - a\alpha_t(b)\|$$

$$+ |\varphi_{n_j, \beta}(a\alpha_t(b)) - \varphi_\beta(a\alpha_t(b))| \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

同様に, $|\varphi_{n_j, \beta}(\alpha_{n_j, t}(b)a) - \varphi_\beta(\alpha_t(b)a)| \rightarrow 0$. また,

$$|\varphi_{n_j, \beta}(a\alpha_{n_j, t}(b))| \leq \|a\| \|b\|, \quad |\varphi_{n_j, \beta}(\alpha_{n_j, t}(b)a)| \leq \|a\| \|b\|.$$

ゆえに, 上の Dominated convergence theorem より,

$$F_{a,b}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} k_1(z,t) \varphi_\beta(a\alpha_t(b)) dt + \int_{-\infty}^{\infty} k_2(z,t) \varphi_\beta(\alpha_t(b)a) dt.$$

かつ, Poisson Kernel Theorem により

$$\lim_{y \rightarrow 0} F_{a,b}(t+iy) = \varphi_\beta(a\alpha_t(b))$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} F_{a,b}(t+iy) = \varphi_\beta(\alpha_t(b)a). \quad (\text{証明終})$$

類似の証明方法により次の2命題を証明することができる。

3. 4. 命題. $\beta_n \rightarrow \beta_0$ であり φ_{β_n} は C^* -力学系 $\{\Omega, \alpha\}$ の β_n に於ける KMS 状態とする. このとき, Ω_α に於ける $\{\varphi_{\beta_n}\}$ の任意の集積点 γ は α の β_0 に於ける KMS 状態である。

3. 5. 命題. $\beta_n \rightarrow \infty$ であり φ_{β_n} は C^* -力学系

$\{\Omega, \alpha\}$ の β_n に於ける KMS 状態とすると, $\{\varphi_{\beta_n}\}$ の $\mathcal{O}_\Omega$ に於ける任意の集積点 γ は $\{\Omega, \alpha\}$ の基底状態である. (即ち, $-i\gamma(a^*\delta(a)) \geq 0$ ($a \in \mathcal{O}(\delta)$)).

最後に, 有界摂動に関する複素解析の応用を示す. $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}(\delta^n)$ が geometric であるとは,

$\exists M_a > 0$; $\|\delta^n(a)\| \leq M_a^n \|a\|$ ($n=0, 1, 2, \dots$). $G(\delta)$ を

δ に関する geometric 元全体の集合とする.

$G(\delta)$ は $\mathcal{O}$ で稠密な $*$ -部分代数である. $z \in \mathbb{C}$,

$a \in G(\delta)$ に対し, $\alpha_z(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \delta^n(a)$ と定義すると,

$\alpha_z(a)$ は $\mathbb{C}$ 上で解析的である. $k (= k^*) \in G(\delta)$ に対し,

$e(iz, k) = \sum_{p=0}^{\infty} (iz)^p \int \alpha_{\Delta_1 z}(k) \alpha_{\Delta_2 z}(k) \cdots \alpha_{\Delta_p z}(k) d\lambda_1 d\lambda_2 \cdots d\lambda_p$

と置く. $e(iz, k)$ は $\mathbb{C}$ 上で解析的なベクトル値

関数で, $e(iz, k) \in \mathcal{O}$.

φ_β を $\{\Omega, \alpha\}$ の β に於ける KMS 状態とす

ると, $\varphi_\beta^k(a) = \varphi_\beta(a e(-\beta, k)) / \varphi_\beta(e(-\beta, k))$ ($a \in \mathcal{O}$)

は $\{\Omega, \exp t(\delta + \delta i k)$ ($t \in \mathbb{R}$) の β に於ける KMS 状態であることを示せる. このとき, 次の定理が成立する

3.6. 命題. 集合 $\{\varphi_\beta^k \mid \|k\| \leq M, k (= k^*) \in$

$G(\delta)\}$ は relatively $\sigma(\mathcal{O}^*, \mathcal{O}^{**})$ -compact である,

そこで, M は正の定数, $\mathcal{O}^*$ は $\mathcal{O}$ の双対バナハ空間, $\mathcal{O}^{**}$ は $\mathcal{O}^*$ の双対バナハ空間である。

この命題は有界摂動に関する基本定理の一つであるが, 証明には, 複素解析が重要な役割を担っているが, かたまり長いので省略する。証明は拙著を参照されたい。

参考文献

1. S. Sakai, Operator algebras in dynamical systems, Cambridge University Press, 1991
2. K. Yosida, Functional Analysis, 2nd edn, Springer, 1968
3. T. Kato, Perturbation Theory for linear operators, Springer, 1966
4. A. Kishimoto, Locally representable one-parameter automorphism group of AF algebras and KMS states, to appear
5. ———, Examples of one-parameter automorphism groups of UHF algebras, to appear
6. ———, Dissipations and derivations, Comm. Math. Phys. 47, 23-32, 1976
7. S. Sakai, On commutative normal $\ast$ -derivations, II, J. Funct. Anal. 21, 203-208, 1976
8. H. Araki, On the uniqueness of one-dimensional quantum lattice systems, Comm. Math. Phys. 44, 1-7, 1975