

多変数 Pade 近似とその制御系設計への応用 Multivariate Pade Approximation and its Application to Control System Designs

北本 卓也*

TAKUYA KITAMOTO

山口大学

YAMAGUCHI UNIVERSITY

Abstract

Pade approximation is a well-known technique and widely used especially in the field of engineering. The Pade approximation uses coefficients of Taylor series of a given function, and approximates the function in the form of a rational function. The rational function computed by Pade approximations is known to have favorable properties, and the author has been applying Pade approximations to control system designs. However, when the function to be approximated is multivariate, the rational function computed by Pade approximations often has poles near the expansion point, which makes its application difficult. In this paper, we present a multivariate Pade approximation which does not have poles near the expansion point, and applies the multivariate Pade approximation to control system designs.

1 はじめに

Pade 近似は特に工学系において広く使われる技法である。この近似法は、近似される関数のテイラー級数の係数を用いて有利関数の形で近似を行っており、好ましい性質を持つことが知られている。筆者は近似代数の制御系設計においてこの Pade 近似を多用してきたが、多変数関数へこの Pade 近似を適用する場合は有利関数の極の存在が問題となる場合が多かった。そこで本論文では、指定した範囲に極を持たないような Pade 近似の計算法を提案し、その制御系設計への応用を行う。

2 Pade 近似とは

Pade 近似とは、ある関数のテイラー展開

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots \quad (1)$$

が与えられたとき、有利関数

$$\frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_mx^m}{1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_lx^l} \quad (2)$$

*kitamoto@yamaguchi-u.ac.jp

をそのテイラー展開が (1) と $(l+m)$ 次まで一致するように定数 p_i, q_j を定めることである。この Pade 近似は、大抵の場合、元々のテイラー展開を打ち切ったものより良い近似であることが知られている。というのは、Pade 近似は

$$a_0, a_0 + a_1x, a_0 + a_1x + a_2x^2, a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \dots, a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_kx^k \quad (3)$$

の近似列に ε 加速法を適用したものと一致するからである。

Pade 近似の具体的な計算方法は以下の通りである。まず、

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots \simeq \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_mx^m}{1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_lx^l} \quad (4)$$

より分母を払い、

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots)(1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_lx^l) \simeq (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_mx^m) \quad (5)$$

とし、係数比較を行うと

$$a_0 = p_0, a_1 + a_0q_1 = p_1, a_2 + a_1q_1 + a_0q_2 = p_2, \dots, \sum_i a_{j-i}q_i = p_j \quad (6)$$

を得る。例えば、分母の次数を $l=2$ 、分子の次数を $m=1$ とすると、上式より

$$p_0 = a_0, a_1 = a_1 + \frac{a_0(a_1a_2 - a_0a_3)}{a_0a_2 - a_1^2}, q_1 = \frac{a_0a_3 - a_1a_2}{a_1^2 - a_0a_2}, q_2 = \frac{a_1a_3 - a_2^2}{a_1^2 - a_0a_2} \quad (7)$$

を得る。

3 Pade 近似の多変数への拡張

Pade 近似の多変数への応用として、2 変数 x, y への拡張を考える。すぐに思いつくのは 2 つの 2 つの拡張法である。

- (i) 1 変数の Pade 近似を再帰的に適用する。すなわち、まず x に関して Pade 近似し、その係数を y について Pade 近似する。
- (ii) 全次数変数を導入する。すなわち、 $x \rightarrow xt, y \rightarrow yt$ の置き換えを行い、 t に関して Pade 近似を計算し、その後 $t=1$ とする。

上の 2 つ拡張法は自然に思えるが、実際にやってみると次の 2 つの問題を抱えていることがわかる。

- 有理関数の次数が高くなってしまう。
- 展開点の近くに極を持ってしまう。

そこで Pade 近似を見直し、自由パラメータを含んだ形での多変数 Pade 近似を考える。具体的には、例えば $f(x, y)$ の x, y によるテイラー展開

$$a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad a_{ij} \in \mathbf{R} \quad (8)$$

を

$$\frac{p_{00} + p_{10}x + p_{01}y}{1 + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2}, \quad p_{ij}, q_{ij} \in \mathbf{R} \quad (9)$$

で近似する。すなわち、

$$(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)(1 + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2) = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y \quad (10)$$

の両辺の $1, x, y, x^2, xy, y^2$ の係数を比較し p_{ij}, q_{ij} を決める。この場合、式の数 6 であるのに対し、未知変数の数が 8 であるので過少決定系であり、自由パラメータが 2 つあることになる。この自由パラメータを用いて対象とする領域に極を持たないことを保証したり、最適化を行う。

例えば、(8) を

$$1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{5}{2}y^2$$

とし、(10) の係数を比較し、これを $q_{10}, q_{01}, q_{11}, p_{00}, p_{10}, p_{01}$ について解くと

$$q_{10} = -\frac{1}{2}, q_{01} = -\frac{5}{2} + q_{02}, q_{11} = -q_{20} - q_{02}, p_{10} = \frac{1}{2} - q_{20}, p_{01} = -\frac{7}{2} + q_{02} \quad (11)$$

を得る。ゆえに

$$1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{5}{2}y^2 \simeq \frac{1 + (\frac{1}{2} - q_{20})x + (-\frac{7}{2} + q_{02})y}{1 + (-\frac{1}{2} - q_{20})x + (-\frac{5}{2} - q_{02})y + q_{20}x^2 + (-q_{20} - q_{02})xy + q_{02}y^2} \quad (12)$$

となる。ここで、例えば $q_{20} = 0, q_{02} = \frac{7}{2}$ と置くと

$$1 + x - y + \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{5}{2}y^2 \simeq \frac{2 + x}{2 - x + 2y - 7xy + 7y^2} \quad (13)$$

となり、右辺の有利関数は領域 $\{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ に極を持たないことが確認できる。

自由パラメータのどのように置けば指定した領域に極を持たないようにできるかは、QE を用いて計算する。例えば、(12) の右辺が極を持たないための条件は

$$h(x, y) = 1 + \left(-\frac{1}{2} - q_{20}\right)x + \left(-\frac{5}{2} - q_{02}\right)y + q_{20}x^2 + (-q_{20} - q_{02})xy + q_{02}y^2$$

としたときに

$$\forall x (-1 < x < 1), \forall y (-1 < y < 1), h(x, y) > 0 \quad (14)$$

と書ける。QE を用いてこの条件より変数 x, y を消去すれば、 $\{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$ に極を持たないパラメータ q_{20}, q_{02} の条件を計算できる。

以上より、次の多変数 Pade 近似のアルゴリズムを得る。

Algorithm 1

入力： 2 変数関数のテイラー展開 $a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots$ $a_{ij} \in \mathbf{R}$

出力： Pade 近似 $\frac{p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + \dots}{1 + q_{10}x + q_{01}y + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02}y^2 + \dots}$, $p_{ij}, q_{ij} \in \mathbf{R}$

(1) Pade 近似の次数を定め、Pade 近似の形を決める (自由パラメータが取れるようにする)。

(2) (10) のような式を作り、係数を比較することにより、Pade 近似の係数 p_{ij}, q_{ij} を決める。

(3) 計算された Pade 近似の分母を $h(x, y)$ とするとき、QE を用いて

$$\forall x (-r < x < r), \forall y (-r < y < r), h(x, y) > 0 \quad (15)$$

より変数 x, y を消去し、自由パラメータに関する条件を計算し、その条件を満たすように自由パラメータを定める。ただし $r (> 0)$ は適当な正の実数である。

4 H_∞ ノルムについて

線形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (16)$$

(ただし、 A は $n \times n$ 行列、 x, y, u はそれぞれ n, m, l 次元ベクトル) で与えられる安定なシステムに対して、その H_∞ ノルム $\|G(s)\|_\infty$ を次のように定義する (ただし、 $\bar{\sigma}(M)$ は行列 M の最大特異値を表す)。

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \bar{\sigma}(G(i\omega)), \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (17)$$

しかしながら、上の定義に従い、 H_∞ ノルムを求めることは現実的ではない。通常、 H_∞ ノルムの計算には次の定理を用いる。

補題 1

$\gamma (> 0)$ を与えられた実数とする時、 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ の必要十分条件は次で定義される H が虚軸上に固有値を持たないことである。

$$H = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\gamma^2} BB^* \\ -C^*C & -A^* \end{bmatrix} \quad (18)$$

実は「 λ が上の行列 H の固有値であれば、 $-\lambda$ も H の固有値である」が成り立つ。 H の γ を連続的に動かすとき固有値は連続的に動くが、上の件を考慮すると γ が $\|G(s)\|_\infty$ と一致する時、 H は重複固有値を持つことがわかる。すなわち、

$$\|G(s)\|_\infty \in \{ \gamma \mid H \text{ が重複固有値を持つ} \} \quad (19)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} H \text{ が重複固有値を持つ} &\Leftrightarrow h(x) (= \text{Det}(xE - H)) \text{ が重根を持つ} \\ &\Leftrightarrow \text{Res}_x \left(h(x), \frac{dh}{dx}(x) \right) = 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\|G(s)\|_\infty \in \{ \gamma \mid w(1/\gamma^2) = 0 \}, \quad \text{ただし、} w(1/\gamma^2) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Res}_x \left(h(x), \frac{dh}{dx}(x) \right) \quad (20)$$

となる。よって $q = 1/\gamma^2$ と置くと

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} \in \{ q \mid w(q) = 0 \} \quad (21)$$

となるので、 $f(q)$ を $w(q)$ の無平方部分とすると

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} \in \{ q \mid f(q) = 0 \} \quad (22)$$

となる。すなわち、 $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を $f(q)$ の実根で表すことができる。 A, B, C を入力とし、 $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を実根に持つ多項式 $f(q)$ を求めるアルゴリズムは次のようになる。

Algorithm 2

入力: $n \times n$ 行列 A , $n \times m$ 行列 B , $l \times n$ 行列 C

出力: $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を実根に持つ多項式 $f(q)$

〈1〉 行列 H を次のように置く。

$$H = \begin{bmatrix} A & qB^*B \\ -C^*C & -A^* \end{bmatrix}$$

〈2〉 H の特性多項式 $h(x)$ を計算する。

〈3〉 $w(q) = \text{Res}_x(h(x), h'(x))$ と置く。

〈4〉 $w(q)$ の無平方部分を $f(q)$ と置く。

以下では、 $\Psi(f, r)$ で $f(q)$ の r 番目の実根を表すとする。上の議論により、 $\Psi(f, r)$ ($r = 1, 2, \dots, n$) のうち $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ と一致するような自然数 r が存在するが、どの r がそれに相当するのかはわからない。

しかしながら、 $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ がパラメータの連続関数であれば、ある特定のパラメータで $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ が $\Psi(f, r_0)$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) と一致すれば、 $\Psi(f, r_0)$ が他の実根と一致しない (すなわち、 $f(q)$ が重根をもたない) 範囲でパラメータを動かしてもその範囲内では $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ は $\Psi(f, r_0)$ と一致することがわかる。すなわち、

$$f(q) \text{ が重根を持つパラメータ値を境界としてパラメータ領域を分割} \quad (23)$$

すれば、各々のパラメータ領域でどの $f(q)$ の実根と等しいかを一意に特定できる (パラメータ領域の一点を取り出して、 $f(q)$ のどの実根と一致するかを調べればよい)。(23) を計算するには、 $f(q)$ と $f'(q)$ の終結式を計算すればよい。

以上より、パラメータを含んだシステムの H_∞ ノルムを計算する次のアルゴリズムを得る。

Algorithm 3

入力: $n \times n$ 行列 A , $n \times m$ 行列 B , $l \times n$ 行列 C

出力: (17) の H_∞ ノルム $\|G(s)\|_\infty$

- 〈1〉 **Algorithm 2** を用いて、 $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ を実根に持つ多項式 $f(q)$ を求める。
- 〈2〉 $f(q)$ と $f'(q)$ の q に関する終結式 $\text{Res}_q(f(q), f'(q))$ を求め、その根を境界としてパラメータ領域を分割する。
- 〈3〉 分割したパラメータ領域の一点をとり、その領域の $1/(\|G(s)\|_\infty)^2$ がどの実根と一致するか (すなわち $\Psi(f, r)$ となる自然数 r) を調べる。このとき、各パラメータ領域における H_∞ ノルムは $\frac{1}{\sqrt{\Psi(f, r)}}$ と等しい。

5 計算例

A, B, C を次の行列としたとき、(17) の $\|G(s)\|_\infty$ を求める問題を考える。これらはパラメータとして k, r を含んでいるのでこのままでは数値計算で $\|G(s)\|_\infty$ を計算することはできない。

まず、**Algorithm 2** に基づいて $f(q)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} f(q) = & (4k^4 + 8k^3r + 44k^3 - 8k^2qr^2 + 8k^2qr - 17k^2q + 4k^2r^2 + 64k^2r + 157k^2 - 16kqr^3 + 28kqr^2 \\ & - 18kqr - 46kq + 20kr^2 + 146kr + 198k + q^2r^2 - 6q^2r + 9q^2 - 8qr^4 + 20qr^3 - 23qr^2 + 28qr \\ & - 74q + 25r^2 + 90r + 81)(9k^4 + 48k^3r + 24k^3 + 12k^2qr^2 - 32k^2qr - 2k^2q + 88k^2r^2 + 244k^2r \\ & + 82k^2 + 32kqr^3 - 192kqr^2 - 40kqr - 96kq + 64kr^3 + 368kr^2 + 632kr + 448k + 4q^2r^4 + 24q^2r^2 \\ & + 24q^2r + 13q^2 + 16qr^4 - 152qr^3 - 88qr^2 - 364qr - 138q + 16r^4 + 144r^3 + 472r^2 + 756r + 637) \end{aligned}$$

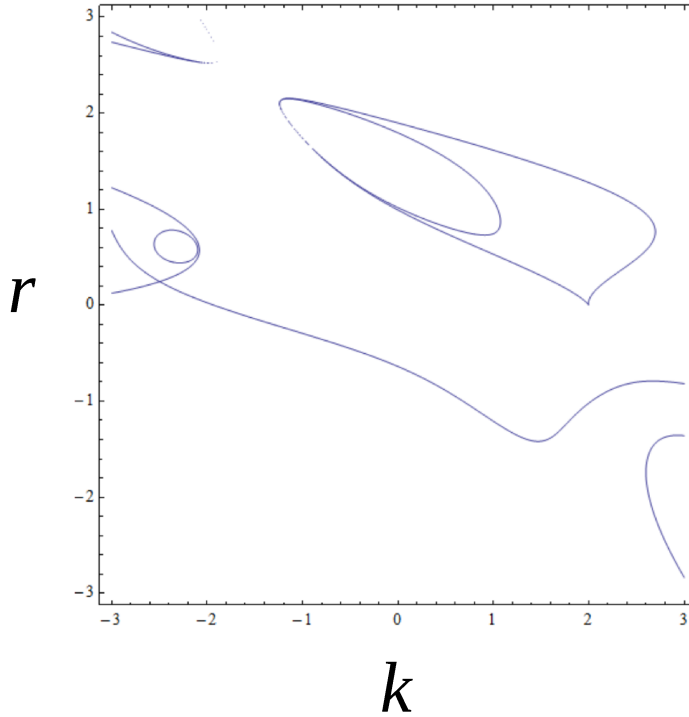


図1：パラメータ領域の分割

を得る。 $f(q)$ は q の 4 次式であり、4 つの根を持つ。以下ではそれらを $\alpha_i(k, r)$ ($i = 1, \dots, 4$) とする。次にパラメータ領域を分割するために、 $\text{Res}_q(f(q), f'(q))$ を計算すると以下のようになる。

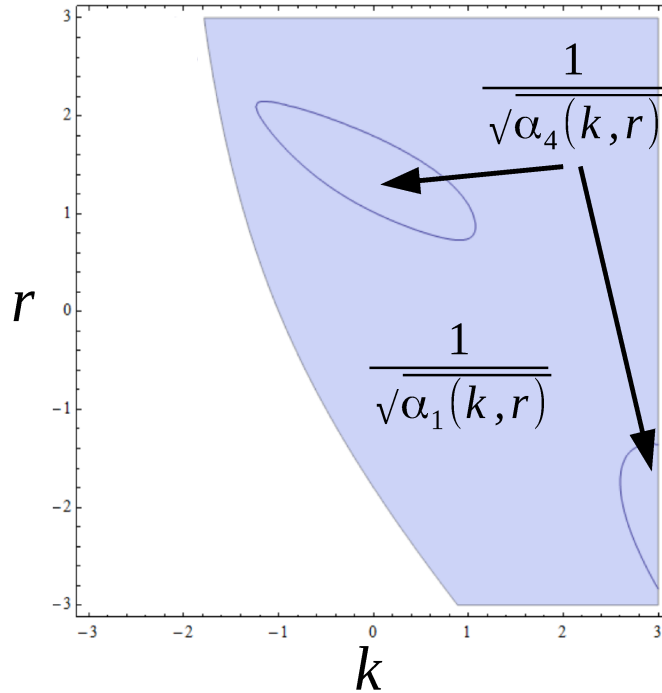
$$\begin{aligned}
 & -16(r-3)^2(2r^2-2r+13)(2r^2+2r+1)(8k^2r^2-12k^2r+29k^2+16kr^3-32kr^2+8kr+112k \\
 & +8r^4-20r^3+13r^2-16r+128)(8k^2r^2-4k^2r+5k^2+16kr^3-24kr^2+28kr-20k+8r^4-20r^3 \\
 & +33r^2-40r+20)(48k^4r^3-7k^4r^2+46k^4r+29k^4+440k^3r^4-412k^3r^3+368k^3r^2-94k^3r+54k^3 \\
 & +1304k^2r^5-2006k^2r^4+1572k^2r^3-1433k^2r^2+162k^2r-344k^2+1360kr^6-2200kr^5+1816kr^4 \\
 & -4240kr^3+1488kr^2-316kr-200k+448r^7-700r^6+772r^5-2739r^4+1210r^3+93r^2+880) \\
 & (64k^4r^4-80k^4r^3+313k^4r^2-130k^4r+174k^4+256k^3r^5-264k^3r^4+836k^3r^3-120k^3r^2+550k^3r \\
 & +34k^3+384k^2r^6-40k^2r^5+298k^2r^4+380k^2r^3-507k^2r^2+1146k^2r-1364k^2+256kr^7+272kr^6 \\
 & -56kr^5-432kr^4-1420kr^3+444kr^2-732kr-520k+64r^8+128r^7+68r^6-596r^5-6r^4-2798r^3 \\
 & +5217r^2-5440r+3440)^4
 \end{aligned}$$

これらを k - r 平面に描画したものを図1に示す。実際にどの領域でどの $\alpha_i(k, r)$ が $\|G(s)\|_\infty$ に対応しているかを調べたところ、図2のようになった。なお、このシステムが安定であるためには次の条件

$$2k^2 + 2kr + 11k + 5r + 9 > 0, \quad 3k + 2r + 7 > 0 \quad (24)$$

を満たす必要があり、図2の着色部はその条件を満たす領域（つまりシステムの安定領域）を示してる。このように $\|G(s)\|_\infty$ は次のような特徴を持った関数である。

- (1) 区分的に代数関数（解析関数）である。

図 2 : $\|G(s)\|_\infty$ の対応

(2) 連続関数である。

(3) 関数が切り替わる場所では微分不可

以下では、この関数の Pade 近似を考える。Pade 近似として

$$\frac{p_{00} + p_{10}k + p_{01}r}{1 + q_{10}k + q_{01}r + q_{20}k^2 + q_{11}kr + q_{02}r^2} \quad (p_{ij}, q_{ij} \in \mathbf{R}) \quad (25)$$

の形を考える。まず、 $(k, r) = (0, 0)$ で Pade 近似を行う。この点では $\|G(s)\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1(k, r)}}$ なので、 $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1(k, r)}}$ をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} & 0.876991 - 0.921118k + 0.941973k^2 - 0.951441k^3 + \dots \\ & + (-0.774953 + 1.35053k - 1.84195k^2 + 2.28909k^3 + \dots)r \\ & + (0.541967 - 1.38919k + 2.37032k^2 - 3.46135k^3 + \dots)r^2 \\ & + (-0.391758 + 1.18516k - 2.35264k^2 + 4.01902k^3 + \dots)r^3 + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。これをもとに (25) において q_{20}, q_{02} を自由パラメータとして Pade 近似 $R_1(k, r)$ を求めると

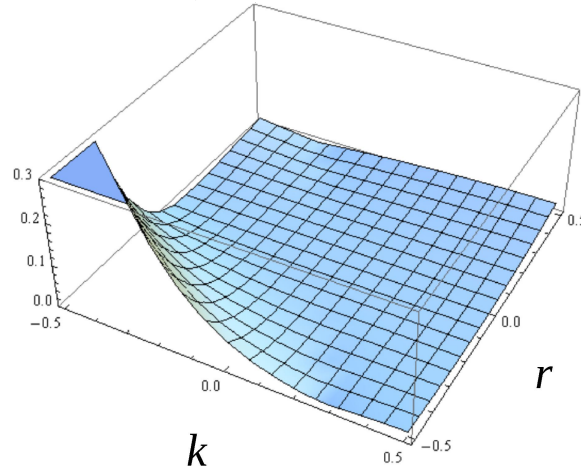
$$R_1(k, r) = \frac{N_1(k, r)}{D_1(k, r)}, \quad (27)$$

$$N_1(k, r) = 0.876991 + (0.834978q_{20} - 0.0242715)k + (0.992465q_{02} - 0.161625)r, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} D_1(k, r) = & 1 + (0.952094q_{20} + 1.02264)k + (1.13167q_{02} + 0.699354)r + q_{20}k^2 \\ & + (1.18861q_{02} + 0.841318q_{20} + 0.0982419)kr + q_{02}r^2 \end{aligned} \quad (29)$$

を得る。Pade 近似 $R_1(k, r)$ が $(k, r) = (0, 0)$ の近くに極を持たないように

$$\forall k \ (-m < k < m), \quad \forall r \ (-m < r < m), \quad D_1(k, r) > 0 \quad (30)$$

図3 : $R_1(k, r)$ の誤差

満たす実数 q_{20}, q_{02} が存在する最大の実定数 m を求めると $q_{20} = 0.75$. $q_{02} = 1$ のとき、 $m = 1.035$ を得る。このとき、Padé 近似 $R_1(k, r)$ は

$$R_1(k, r) = \frac{0.876991 + 0.601962k + 0.83084r}{1 + 1.73671k + 1.83102r + 0.75k^2 + 1.91784kr + r^2} \quad (31)$$

となり、その誤差は図3で与えられる。図3より、 $(k, r) = (-0.5, -0.5)$ で誤差が大きくなっていることがわかるが、これはこの点が安定限界の近くにあることが影響していると考えられる。

次に $(k, r) = (0, 1.5)$ での Padé 近似を考える。この点では $\|G(s)\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{\alpha_4(k, r)}}$ なので、 $\frac{1}{\sqrt{\alpha_4(k, r)}}$ をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} & 0.400277 - 0.0793977k + 0.0335605k^2 - 0.0139141k^3 + \dots \\ & (0.0325825 + 0.0684041k - 0.0299622k^2 + 0.0456249k^3 + \dots)(r - 1.5) \\ & + (0.0882705 - 0.00466982k + 0.107442k^2 - 0.0742901k^3 + \dots)(r - 1.5)^2 \\ & + (+0.0314626 + 0.165695k - 0.0447534k^2 + 0.384712k^3 + \dots)(r - 1.5)^3 + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

を得る。先ほどと同様に、 $(k, r) = (0, 1.5)$ での Padé 近似 $R_2(k, r) = \frac{N_2(k, r)}{D_2(k, r)}$ が $(k, r) = (0, 1.5)$ の近くに極を持たないように

$$\forall k (-m < k < m), \forall r (-m < r < m), D_2(k, r) > 0 \quad (33)$$

満たす Padé 近似が存在する最大の実定数 m を求めると $m = 1.4$ となり、次の Padé 近似 $R_2(k, r)$ を得る。

$$R_1(k, r) = \frac{0.400277 + 0.03800085(r - 1.5) - 0.0716426k}{1 + 0.0193741k - 0.00643064(r - 1.5) - 0.08k^2 - 0.173744k(r - 1.5) - 0.22(r - 1.5)^2} \quad (34)$$

この Padé 近似の誤差を図4に示す（図における r_1 は $r_1 = r + 1.5$ である）。図よりこの Padé 近似はほぼ問題ない精度を持っていることがわかる。関数が切り替わる箇所特に精度が落ちるということも見受けられない。

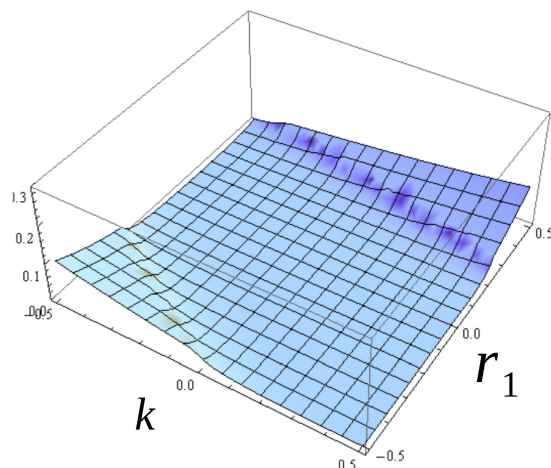


図4 : $R_2(k, r)$ の誤差

6 まとめ

Padé 近似は工学系で広く使われているが、多変数の Padé 近似は極が展開点の近くに発生しやすい傾向があり、使いにくい。そこで QE を用いて、極が展開点の近くにはないような多変数 Padé 近似を考えた。本論では、その多変数の Padé 近似を用いた制御系設計で用いられる H_∞ ノルムの近似を行った。

Padé 近似は安定限界の所では精度がよくなかったが、他では低い次数においても、ほぼ問題ない精度を保っていた。関数が切り替わる所においても特に精度が落ちるということではなかった。安定限界における Padé 近似は次数を上げても、精度は上がらなかったが、実用上は安定限界近くで制御系設計を行うことは考えにくく、それほど問題はないと考える。次回は H_∞ ノルム以外の制御系設計問題にも適用してみたい。

参 考 文 献

- [1] Baker, G. A. Jr. and Graves-Morris, P., Padé Approximants, New York: Cambridge University Press, 1996.
- [2] Brezinski, C. and Redivo Zaglia, M., Extrapolation Methods. Theory and Practice, North-Holland, 1991.
- [3] Annie Cuyt “How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 105, pp. 25-55, 1999,
- [4] Philippe Guillaume and Alain Huard “Multivariate Padé approximation” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 121, pp. 197-219, 2000.
- [5] Caviness, B. F. and Johnson, J. R. (Eds.), Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition, New York:Springer-Verlag, 1998
- [6] T. Kitamoto, and T. Yamaguchi, “Parametric Computation of H_∞ Norm of a System”, *Proc. of SICE-ICCAS2006*,, FP01-1, Busan, Korea, 2006.