

数論における vanishing cycle.

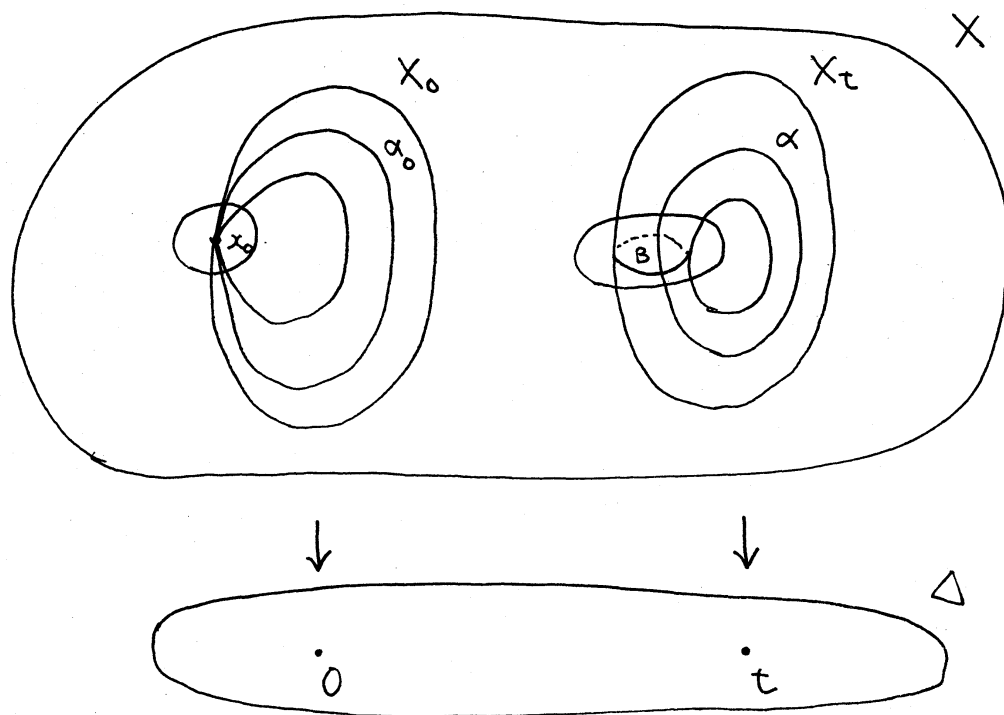
東大理 斎藤 毅 (Takeshi Saito)

題は一般的なものだか. ここではそのいくつかの側面についてのみ解説する. Langlands 対応への応用など多くの重要な側面についてはふれない. 第1節では一般的な事実を概説し. 応用として Weil 予想の証明を簡単に説明する. 第2節では具体的な計算例とその Frobenius の作用についての応用を述べる.

§1. Vanishing cycle の一般論.

Vanishing cycle は局所体上の多様体さらにはその上の $\mathbb{Z}$ 進層に対し. その cohomology を理解するための道具である. その利点は cohomology をとるという大域的な問題と. vanishing cycle を計算するという局所的な問題と. reduction 上の cohomology をとるというやはり大域的ではあるが比較的簡単な問題の2段階に分割することにある. 局所体は punctured disc $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1, z \neq 0\}$ の代数的な類似

物と考えられるが、このとき vanishing cycle の考え方は次の絵によく表わされる。



ここで X は disc Δ 上の楕円曲線の退化する族である。
generic fiber X_t の H^1 は α と β で生成されるが、一方 closed fiber X_0 の H^1 は α_0 だけで生成される。(たがってすれの β が vanishing cycle ということになるが、この β は次のような性質をもつ。すなわち特異点 x_0 の X 内でのどんなに小さい近傍 U をとって t を十分の近くに近づくと $H^1(X_t \cap U)$ は β で生成される。

話をはっきりさせるためにいくつか記号を導入する。 K を局所体とする。しばらくは局所体とは完備な離散付随をもつ

体とする. X_K を K 上の scheme とし, $\mathcal{F}$ を X_K 上の ℓ 進層とする (例えば定数層 $\mathbb{Q}_\ell$). ℓ は剰余体の標数 p とは異なる素数とする. 最近 $p = \ell$ のときも Fontaine, Faltings, 加藤, 兵頭, 斎藤 名村らの努力により理論の整備が進んできているがここではふれない. $\mathcal{O}_K$ を K の付随環とし X を X_K の $\mathcal{O}_K$ 上の model 可能な $\mathcal{O}_K$ 上の scheme X で $X \otimes_{\mathcal{O}_K} K = X_K$ となるものとする. このとき $\mathcal{F}$ の vanishing cycle の層 (正確には nearby cycle の層と呼んだ方がよい) は各整数 $g \geq 0$ に対し定まる $R^g \psi \mathcal{F}$ と書かれる X の geometric closed fiber $X_{\bar{F}} = X \otimes_{\mathcal{O}_K} \bar{F}$ ($\bar{F}$ は剰余体 F の分離閉包) 上の層である. (定義は後述).

vanishing cycle の層 $R^g \psi \mathcal{F}$ と generic fiber の cohomology $H^n(X_{\bar{F}}, \mathcal{F})$ とは次のように結んでいる. ($\bar{K}$ は K の分離閉包)

• X が $\mathcal{O}_K$ 上 proper なとき spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(X_{\bar{F}}, R^q \psi \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\bar{F}}, \mathcal{F})$$

が存在する.

これは étale cohomology の proper base change theorem から出てくる. 上の絵の例だと.

$$R^g \psi \mathbb{Q}_\ell = \begin{cases} \mathbb{Q}_\ell & (X_{\bar{F}} \text{ 上の定数層}) & g=0 \\ \mathbb{Q}_\ell(-1)_{X_0} & (X_0 \text{ 上の } 1\text{-次元 } \mathbb{Q}_\ell\text{-vector space}) & g=1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となつてゐる. Spectral sequence は H^i については完全系列

$$0 \rightarrow H^i(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^i(X_F, \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell(-1) \rightarrow 0$$

を与える.

vanishing cycle の形式的な定義は次のとおりである.

k^n を k の最大不分岐拡大とし $X_{\overline{F}} \xrightarrow{i} X_{\mathbb{Q}_{k^n}} \xleftarrow{j} X_F$ と書くと $R^i \phi^* \mathcal{F} = i^* R^i j_* (\mathcal{F}|_{X_F})$ が定義である. こうすると $X_{\overline{F}}$ の各 geometric point $\bar{x}$ に対し $R^i \phi^* \mathcal{F}$ の $\bar{x}$ での stalk は

$$R^i \phi^* \mathcal{F} = \varinjlim H^i(U \cap X_F, \mathcal{F}) \quad (U \text{ は } \bar{x} \text{ の } X_{\mathbb{Q}_{k^n}} \text{ での etale 近傍を走る})$$

となり上の絵の例が示唆するものである.

一般に cohomology $H^n(X_F, \mathcal{F})$ の k の絶対 Galois 群 $G_k = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ の自然な作用を調べることも重要だが, これには F のように vanishing cycle を使うことが出来る. それを説明する前にまず G_k の構造およびそのよく知られた表現の一般論を復習する. K の不分岐拡大を考へることにより G_k は剰余体の絶対 Galois 群 G_F を商群としてもつことがわかる. 核 I を惰性群と呼ぶ. 次に F の標数 p でわれない整数 n について素元 π の n 乗根を添加する拡大を考へることにより, 全射 $I \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}'(1) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{p \nmid n} \mu_n$ を得る. ここで μ_n は F 内の 1 の n 乗根の群であり, $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ は抽象的に位相群としては $\prod_{p \nmid p} \mathbb{Z}_p$ と同型である. この商 $\hat{\mathbb{Z}}'(1)$ の局所体 K を punctured disc Δ^* の類似物とみたとき,

$\pi_1(\Delta^*) = \mathbb{Z}$ と対応している. この核 P は pro- p 群. あるいは有限 p 群の逆極限 ($p=0$ のときは $P=1$) となることが知られている.

V を G_K の ℓ -進表現, あるいは有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ -vector space V への連続な表現とする. このとき P は有限商を経由して作用することは直ちにわかるが. 一般に σ と τ なる ℓ -進表現 V については I が quasi-unipotent に作用することが知られている. 例えば geometric origin をもつような V についてはそうである. I の作用が quasi-unipotent とはある開部分群 $J \subset I$ に制限すると J の作用が unipotent ということであり. このとき J の作用は. ある V の巾零作用素 N により任意の $\sigma \in J$ に対し $\exp(t_\sigma(\sigma)N)$ とかける. ここで t_σ は上の標準全射 $I \rightarrow \mathbb{Z}'(1)$ の ℓ -成分である. この N を使って V の monodromy filtration M が定義される. M は $NM_i \subset M_{i-2}$ かつ $N^i: \mathrm{Gr}_i^M V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{-i}^M V$ を任意の i についてみたすただ一つの V の減少 filtration である. 一意性より M は G_K の作用で安定なことがわかる.

G_K の ℓ -進表現 V で I の作用が自明なものは特に T_2 のよいものであり 不分裂表現とよぶ. $\mathbb{Q}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell \otimes \mathbb{Z}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell \otimes \varprojlim_n \mu_{\ell^n}$ や τ の dual $\mathbb{Q}_\ell(-1)$ などかそうである. I の作用が unipotent なものを T_2 のよいものでありここでは stable 表現と呼ぶ. また P の作用が自明なものを tame な表現とよぶ. 明らかに 不分裂 $\Rightarrow$ stable $\Rightarrow$ tame である.

さて k の絶対 Galois 群 G_k は商 G_F を通じて X の geom. closed fiber $X_{\bar{F}}$ に作用する. vanishing cycle の定義から G_k は $X_{\bar{F}}$ 上の層 $R^i\psi_7$ に equivariant に作用することがわかる. 従って $p=2$ 前の spectral sequence の E_2 -term に G_k が作用するが、この作用によりこの spectral sequence は G_k -equivariant である.

定数係数 cohomology $H^i(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ については X_k が good reduction をもつこと. すなわち proper smooth な O_k 上の model が存在すると ± 1 はそれか不分岐表現であることが知られている. (これは正標数の多様体の標数 0 にも適用できると ± 1 は. そのもとでの cohomology と同じ cohomology をもつということがある. étale cohomology はもとよりそのような cohomology 理論を作ろうとして構成されたものであった.)、これに対応して $H^i(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell)$ が stable 表現となるためには X_k が stable model をもつことが十分であることが、vanishing cycle を作って示せる. 局所体 k 上の proper smooth な scheme X_k に対しその semi-stable model とは O_k 上の proper flat な model X で X 自身は regular かつ closed fiber $X_{\bar{F}}$ が X の (被約な) 正規交叉因子となるものである (剰余体 F が完全でないときはもう少し厄介だが略す). このような X については次節での $p=2$ 前の vanishing cycle の計算から各 $R^i\psi_7 \mathbb{Q}_\ell$ への I の作用が

自明であることがわかった。これを spectral sequence から $H^*(X_E, \mathbb{Q}_\ell)$ の stable 表現であることが従う。

Weil 予想について説明するために weight の概念を導入する。 $\mathbb{F}_q$ を有限体とし $\varphi_q \in \Gamma_{\mathbb{F}_q}$ を geometric Frobenius とする。 φ_q は q 乗写像の逆写像とする。 $\Gamma_{\mathbb{F}_q}$ の ℓ 進表現 V が weight n を持つとは、 φ_q の V への作用の固有値はすべて $q^{n/2}$ の代数的数であり、 q の任意の冪乗の複素絶対値が $q^{n/2}$ となることである。 k を剰余体が有限な局所体で V を G_k の ℓ 進表現とする。 このとき V の weight を 2 と取り考えることができる。 1 つめは k の剰余体 F の geometric Frobenius $\in \Gamma_F$ の G_k への持ち上げの固有値を考えることである。 2 つめは k が代数体の素点 p での完備化で V が $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現で右の素点の有限集合 S の外で不分岐なものに過ぎない場合である。 今この 2 つめの状況で右の任意の素点 $p \notin S$, $p \neq p$ に對し、 V の p での weight n を持つとき V は weight n を持つということにする。 すると当然このとき 1 つめの意味での weight がどうなるかが問題となる。 これについては次のように予想される。 V への I の作用が quasi-unipotent と仮定し、 monodromy filtration による $gr_i^M V$ を考える。 すると I の各 gr_i^M への作用は有限群を経由するから weight の定義は F の Frobenius の持ち上げによる。

予想 V が 2 つめの意味で weight n をもつならば.

各 i について $q_i^M: V$ は 1 つめの意味で weight $n+i$ をもつ.

この予想は正標数の場合には Deligne により Weil 予想の証明の中で解かれている. 証明には γ 函数の収束域の評価を使う. また Hodge module についてのこの類似も解かれているがこの本来の場合は $(V = H^n(X_{\overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Q}_\ell})$ で X が semi-stable model をもつ場合でも $\dim X_k \geq 3$ では) 未解決である.

Weil 予想の証明のアイデアを上の予想 (正標数から $0 \leq k$) の使われ方を中心に簡単に説明する. X を有限体 F 上の $n+1$ 次元 projective smooth variety とする. Lefschetz pencil をとって $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を作る. $H^{n+1}(X_{\overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Q}_\ell})$ が weight $n+1$ をもつことを示したいわけであるが, spectral sequence より, $H^1(\mathbb{P}^1, R^n f_* \mathbb{Q}_\ell)$ についてみればよい. $y \in \mathbb{P}^1$ を f の critical value とする. このとき $R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ が y で $\quad$ となれば 2 つめの意味で weight n をもつことというのがポイントである. 仮定なら各 y で適用すると, $R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ は $\mathbb{Q} \mathbb{P}^1$ 上の n 次元 $n+1$ 次元の部分空間であるかすなわち標体までいけば定数層であるかまたは

③ weight n をもつことになり, ①ならば $H^1 = 0$, ②ならば H^1 の weight が $n+1$ であること (これは X^N (N 個の直積)) を使う) が導かれる. 上のポイントを示すためには, まず値は

不明だが weight が定義されることを見る. これからいって
下るともし γ が smooth でなければ vanishing cycle の計算
(Picard-Lefschetz 公式) により Gr_1^M の weight が $n+1$ とわかり
(T_2 から $R^n f_* \mathbb{Q}_\ell$ の weight n をも) ことが上の予想により
わかる.

以上について証明などくわしくは

SGA 7 Lect Notes Math. 288. 340

特に exp. I XIV XV など.

—— 4 $\frac{1}{2}$ 同 549 Th. de finitude

Weil 予想 I. II Publ Math IHES 43. 52.

§ 2. 具体例と Frobenius の作用への応用.

Picard-Lefschetz 公式のように孤立特異点でその vanishing
cycle の計算が知られているものもあるがここでは下のよう
なものを考える. この節の結果についてくわしくは

T. Saito. Σ -factor of ℓ -adic sheaf on a variety

東大 70L 711-2 34-2 (1991)

をみて下さい.

前節と同様に $\mathbb{Q}_\ell$ を局所体の整数環とする. 剰余体 F は完全
と仮定する. X を $\mathbb{Q}_\ell$ 上 flat な正則 scheme で general fiber X_k
は smooth で closed fiber の被約化 $D = X_{F, \text{red}}$ は X の正規交叉図

子であるようなものとする. X が O_K 上 $\log$ smooth であると仮定すると X_K 上の定数層の vanishing cycle は完全に計算することかできる. $\log$ smooth というのは X_F の各既約成分の重複度が F の標数 p でわれないという条件 ($p=0$ なら自明) よりやや弱いものである. 対数極付き相対微分形式の加群を

$$\Omega_{X/O_K}^1(\log D / \log F) = (\Omega_{X/O_K}^1 \oplus O_X \otimes_{d_*} O_{X_K}^{\times}) / \left(\begin{array}{l} da - a \otimes a; a \in O_X \cap O_{X_K}^{\times} \\ 1 \otimes b; b \in K^{\times} \end{array} \right)$$

と定義する. $1 \otimes a$ の類が $d \log a$ である. この層が局所自由となることを X は O_K 上 $\log$ smooth であるという. 簡単のため各重複度は p 巾 ($p=0$ なら 1) であるとする.

命題 (上記 §2 Prop 6') 上のように X を O_K 上 $\log$ smooth な scheme とし closed fiber X_F の各既約成分 D_i の重複度は p 巾であるとする. このとき次の標準同型がある.

$$R^i \psi_{\mathbb{Q}_\ell} \cong \wedge^i (\text{Coker} : \mathbb{Q}_\ell(-1)_{X_F} \rightarrow \bigoplus_i \mathbb{Q}_\ell(-1)_{D_i})$$

上では簡単のため重複度は p 巾. 層は定数層としたが. 一般の場合でも層の分岐が D に沿って tame と仮定すれば同様の計算がなりたつ. (上記 Prop 6). また $\log$ smooth の仮定をはずす (この場合は tame な部分空間を φ -prop 群 P の作用で不変な部分に限れば命題がなりたつ) ことから, étale cohomology の

purity とよばれるある standard な予想の下で示されている。

上の命題は k のかわりに Δ^* を考え π_2 と π_1 の位相的な結果の類似である。前節の spectral sequence に上の命題を適用すると X が proper の場合に cohomology の記述がえられる。その帰結については例として (上記 Prop 6 の Cor (1.2))。

最後に上の計算の応用例として有限体上の多様体上の ℓ 進層の cohomology への Frobenius の作用について述べる。

定理 (上記 Thm 1). F は有限体. X は F 上 projective smooth な n 次元 variety. $U \subset X$ の open で complement $D = X - U$ が正規交叉因子であるようなものとする. $\mathcal{F}$ は U 上の smooth ℓ 進層で D に沿って分岐が t であるとする. φ_F は F の geometric Frobenius とし $\det(\varphi_F: R\Gamma_c(U_{\overline{K}}, \mathcal{F})) = \prod_{i=0}^{2n} \det(\varphi_F: H_c^i(U_{\overline{K}}, \mathcal{F}))^{(-1)^i}$ とすると

$$\frac{\det(\varphi_F: R\Gamma_c(U_{\overline{K}}, \mathcal{F}))}{\det(\varphi_F: R\Gamma_c(U_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell))^{-n\# \mathcal{F}}} = \det \rho(-G_{X,U/F}) \times \text{Jacobi 和}$$

がなりたつ。

ここで右辺は ρ は $\mathcal{F}$ に対応する $\pi_1(U)^{\text{tame}}$ の ℓ 進表現. $G_{X,U/F} \in CH^n(X, D)$ は城崎の π_1 を示す χ であり χ は π_1 の relative Chern 類. $\det \rho$ は類体論の相互写像 $CH^n(X, D) \rightarrow \pi_1^{\text{ab}}(U)^{\text{tame}}$ を通じて $CH^n(X, D)$ の積環とみる. Jacobi 和は $\mathcal{F}$ の D に沿った分岐

から定まる 1 の巾根の群の指標を使つて定義される。

証明の方針を述べる。Lefschetz pencil を使つて $\mathbb{P}^1$ の fibration $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を作る。 f の singularity を blow up して f は log smooth とする。 Laumon による Σ -factor の積公式を使つて右辺を $\mathbb{P}^1$ の各点の寄与 (局所 Σ -factor と呼ぶ) の積に分解する。 $y \in \mathbb{P}^1$ が f の smooth pt ならば局所 Σ -factor は $f^{-1}(y)$ についての定理の左辺 (a) であり、これは帰納法の仮定により求まる。 $y \in \mathbb{P}^1$ が f の critical value のときは、上の命題と γ のあとに与へたことを使つて vanishing cycle の計算から Σ はこれから局所 Σ -factor が求まる (上記 Thm 2)。これらをおあわせて整理すると定理の右辺がえられる。