

球面上の巡回分岐被覆の四次元ファイバー空間における局所符号数

東京大学大学院数理科学研究科 佐藤 正寿 (Masatoshi Sato)
Graduate school of Mathematical Sciences,
the university of Tokyo

1 はじめに

M を有向 4 次元閉多様体, B を有向 2 次元閉多様体とする. 滑らかな全射 $f: M \rightarrow B$ が有限個の臨界値を除いたところで閉曲面束となるときの (M, B, f) は (境界のない) 4 次元ファイバー空間と呼ばれる. 以下では, 臨界値の f による原像を特異ファイバー, それ以外の点の原像を一般ファイバーと呼ぶことにする. 一般ファイバーがある種の構造をもつ, 制限された (境界のない) 4 次元ファイバー空間のクラスにおいては, 符号数の局所化という現象が起こることが知られている. 符号数の局所化とは, 4 次元ファイバー空間 E の符号数が, 各特異ファイバーの近傍の様子のみからそれぞれ定まる, ある有理数の和として表されるという現象である. これらの有理数は局所符号数と呼ばれる. 一般の 4 次元ファイバー空間においてはこのような現象は起きないが, 様々な構造について, その構造をもつ制限された 4 次元ファイバー空間のクラスにおいては符号数の局所化が起こり, 位相幾何, 代数幾何, 複素幾何の立場から局所符号数が計算されている.

符号数の局所化は正確には次のように述べられる. 考える制限された 4 次元ファイバー空間のクラスに現れる特異ファイバー芽全体の集合を S_g と表す.

定義 1.1. 関数

$$\sigma: S_g \rightarrow \mathbb{Q}$$

が存在し, 制限されたクラスに含まれる任意の (境界のない) 4 次元ファイバー空間 X について,

$$\sum_{l=1}^n \sigma(f_l) = \text{Sign } X$$

を満たすとき, 被覆 p の四次元ファイバー空間において符号数が局所化するという. ただし, $\{f_l\}_{l=1}^n \subset S_g$ は X に含まれる特異ファイバー芽とする.

本稿では, 一般ファイバーが球面上の被覆空間となるファイバー空間のクラスについて, 位相幾何の立場から局所符号数を定める. 具体的な式は 2.3 節において述べる. まず, 本稿で考える制限された 4 次元ファイバー空間のクラスを定義する. G を有限群, Σ_g を種数 g の有向閉曲面とする. 以下, G 被覆 $p: \Sigma_g \rightarrow S^2$ とは, 正則分岐被覆であり, 被覆変換群 $\text{Deck}(p)$ と G の同型が固定されているものを表す. また, p の分岐点集合 $A \subset S^2$ の個数は $m \geq 3$ とする. 被覆変換群 $\text{Deck}(p)$ の $\text{Diff}_+(\Sigma_g)$ における中心化群を $C(p)$ と表す.

定義 1.2. 4次元コンパクト有向多様体 X から, 2次元コンパクト有向多様体 B への滑らかな写像 $f: X \rightarrow B$ が被覆 p の境界のある 4次元ファイバー空間であるとは, 次の条件を満たすものをいう.

- (i) $\partial X = f^{-1}(\partial B)$
- (ii) 有限集合 $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \text{Int } B$ を除いて, f の制限 $X - f^{-1}(b_1, \dots, b_n) \rightarrow B - \{b_1, \dots, b_n\}$ が Σ_g 束である.
- (iii) Σ_g 束 $X - f^{-1}(\{b_1, \dots, b_n\}) \rightarrow B - \{b_1, \dots, b_n\}$ の構造群は $C(p)$ である.
- (iv) $X - f^{-1}(\{b_1, \dots, b_n\})$ に定まる G 作用が X 全体への滑らかな作用に拡張する.

条件 (iv) について説明する. 曲面束 $X - f^{-1}(\{b_1, \dots, b_n\})$ の局所自明化 $U \times \Sigma_g$ ($U \subset B$) に対し $\mathbb{Z}_d$ 作用を, 第1成分には自明な作用, 第2成分には被覆変換群 $\text{Deck}(p)$ の作用として定める. 変換関数と被覆変換が可換であることから, この作用は貼り合い, X から特異ファイバーを除いた空間全体に $\mathbb{Z}_d$ 作用が定まる. 条件 (iv) はこの作用が特異ファイバーにも拡張できるということである. なお, 一般ファイバーは p と同型な球面上の被覆となる. これは, $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆の 4次元ファイバー空間である超楕円的ファイバー空間の一般化である.

境界のない被覆 p の 4次元ファイバー空間を, E, B を閉多様体として, 条件 (i) を除いたものとして定義する. 以下では特に断りのない場合, ファイバー空間は境界を持たないものとする.

なお, 構成する局所符号数は, 実は一般の有限群 G について G 被覆 p の 4次元ファイバー空間のクラスにおいて構成できる. しかし, 記述を簡明にするために, 本稿では $G = \mathbb{Z}_d$ に限って考察する.

すでに位相幾何の立場から, 遠藤先生 [4] により, 超楕円的ファイバー空間における局所符号数が構成されている. 手法としては, 超楕円的写像類群と呼ばれる群上の Meyer コサイクルと呼ばれる 2-コサイクルをコバウンドする関数を用いている. また, 古田先生 [5] は, 一般の被覆 p の 4次元ファイバー空間に対して局所符号数を構成している. 手法としては, ファイバー空間 E にある種の自然な接続を定め, その Pontrjagin 形式が特異ファイバーの近傍を除いて 0 となることを示し, 符号数の局所化を述べた. 古田先生の構成では, さらに一般に, 条件 (iv) を除き, 被覆 p が正則であるとは限らない球面上の 3点以上の分岐被覆についても定義できることに注意しておく. 本稿で定義する局所符号数は, 古田先生の考えたファイバー空間のクラスよりも狭いクラスにおいて構成されるが, 計算が容易であるという利点がある. なお, 本稿における局所符号数が古田先生によるものと一致するかどうかはわかっていない.

次に上で述べた局所符号数と対称的写像類群における Meyer 関数との関係について述べる. まず, Meyer コサイクル, および, 対称的写像類群について復習する.

閉曲面の微分同相群の isotopy 類のなす群 $\mathcal{M}_g := \pi_0 \text{Diff}_+(\Sigma_g)$ は写像類群と呼ばれる. $\varphi = [f] \in \mathcal{M}_g$ について, mapping torus $\Sigma_g \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1)$ を T_φ と表す.

$\varphi, \psi \in \mathcal{M}_g$ について, Pants F 上の閉曲面束 $E_{\varphi, \psi}$ として,

$$E_{\varphi, \psi}|_{\partial F} = T_\varphi \amalg T_\psi \amalg T_{(\varphi\psi)^{-1}}$$

を満たすものをとる.

定義 1.3 (Meyer[10]). 写像類群上の $\mathbb{Z}$ -コサイクル

$$\tau_g : \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \rightarrow \mathbb{Z}$$

を $\tau_g(\varphi, \psi) = -\text{Sign } E_{\varphi, \psi}$ として定義する. これを *Meyer* コサイクルと呼ぶ.

Birman-Hilden[3] によれば, 閉曲面の正則分岐被覆 p には対称的写像類群という, 被覆の構造を保つ写像類群と呼ぶべき群が定まる.

定義 1.4. 被覆変換群 $\text{Deck}(p) \subset \text{Diff}_+(\Sigma_g)$ の中心化群 $C(p)$ に C^∞ 位相を定める. このとき, 対称的写像類群は

$$\mathcal{M}_g(p) = \pi_0 C(p)$$

として定義される.

ここで, $\mathcal{M}_g(p)$ の群構造は $C(p)$ の元における写像の合成により誘導される.

中心化群 $C(p)$ の各弧状連結成分を $\text{Diff}_+(\Sigma_g)$ における弧状連結成分にうつすことにより, 自然な準同型

$$\Phi : \mathcal{M}_g(p) \rightarrow \mathcal{M}_g$$

が定まる. 特に, 球面上の $\mathbb{Z}_2$ 分岐被覆に対応する対称的写像類群は, Φ により写像類群の部分群である超楕円的写像類群と同型である. また球面上の 3 点以上の分岐被覆 p については, この準同型による符号数コサイクルの引き戻し $\Phi^* \tau_g \in Z^2(\mathcal{M}_g(p); \mathbb{Q})$ はコバウンダリに入ることが知られている. 構成した局所符号数を用いて, 対称的写像類群の部分群において $\Phi^* \tau_g$ をコバウンドする関数を構成することができる (定理 2.6).

本稿の構成は次のものである. 2 節では, 被覆 p の 4 次元ファイバー空間の局所符号数を構成する. そのためにまず, $\mathbb{Z}_d$ 被覆 $p : \Sigma_g \rightarrow S^2$ に対応する 4 次元ファイバー空間 X において, $\mathbb{Z}_d$ 作用の固定点集合の法オイラー数が特異ファイバーの近傍の様子だけで決まることを述べる. G 符号数定理を用いると, X の符号数は固定点集合の法オイラー数を用いて表せることがわかる. これより, X の符号数の局所化を示す. 3 節では, 球面上の $\mathbb{Z}_d$ 被覆について, 対称的写像類群の生成元を求める. また, 対称的写像類群の部分群を定義し, その部分群において Meyer コサイクルをコバウンドする関数を構成する. 4 節では, ある被覆 p_1 については, 3 節で定義した部分群が対称的写像類群全体に一致していることを述べる. さらに, 対称的写像類群の生成元を monodromy にもつファイバー芽の局所符号数を実際に計算する.

2 被覆における局所符号数の関係

2.1 $\mathbb{Z}_d$ 作用をもつファイバー芽

ここでは、被覆 p の 4 次元ファイバー空間を調べる上で重要であるファイバー芽と、それらの間の写像を定義する。

$\Delta \subset \mathbb{C}$ を 0 を含むコンパクトな有向 2-円板とする。このとき、3 つ組 (E, f, Δ) として、 $f: E \rightarrow \Delta$ が被覆 p の境界のあるファイバー空間であるものを考える。

上の 3 つ組 (E, f, Δ) , (E', f', Δ') に対し同値関係を次のように定める。2 つの 3 つ組が同値であるとは、 $\Delta_0 \subset \Delta$, $\Delta'_0 \subset \Delta'$, 向きを保つ微分同相 $\varphi: (\Delta_0, 0) \rightarrow (\Delta'_0, 0)$, $\tilde{\varphi}: f^{-1}(\Delta_0) \rightarrow f'^{-1}(\Delta'_0)$ が存在して、

$$\varphi f = f' \tilde{\varphi}$$

を満たし、 $\tilde{\varphi}$ は $\mathbb{Z}_d$ 作用について同変であることをいう。

上の 3 つ組における同値類のなす集合を $\mathbb{Z}_d$ 被覆 p のファイバー芽とよび、 S_g^p と表す。

$[E, f, \Delta] \in S_g^p$ に対し、各 $t \in \mathbb{Z}_d$ の作用における固定点集合は、コンパクト 2 次元部分多様体とコンパクト 0 次元部分多様体の非連結和からなる。例えば、内田 [13] p.29 を参照せよ。特異ファイバーに含まれる連結成分の非連結和を $F_v(t)$, それ以外の連結成分の非連結和を $F_h(t)$ とおく。 $E - f^{-1}(0)$ における群作用は、局所自明化 $U \times \Sigma_g$ への被覆変換群の作用から定めたので、各固定点集合 $F_h(t)$ は f により $\Delta - 0$ の (連結とは限らない) 被覆空間となっており、特に閉 2 次元多様体である。

2.2 法オイラー数の局所化

前節と同様に、被覆 p のファイバー空間 $f: X \rightarrow B$ においても、 $t \in \mathbb{Z}_d$ の X への作用における固定点集合について $F_h(t)$, $F_v(t)$ を定義する。つまり、 $t \in \mathbb{Z}_d$ 作用における固定点集合について、特異ファイバーに含まれる連結成分を $F_v(t)$, それ以外の連結成分を $F_h(t)$ とする。

$0 < r < d$, $0 < s < d$ を整数とおく。 t の固定点集合 $F_h(t)$ としてあらわれる部分多様体について、 $\mathbb{Z}_d$ 作用における isotropy 群が $r\mathbb{Z}_d \subset \mathbb{Z}_d$ (ただし、 r をこのような最小の数としてとる) であり、 $r \in \mathbb{Z}_d$ の作用における法束の回転角が $2\pi rs/d$ となる部分多様体全体の非連結和を $F_{r,s}$ とおく。

この節では、被覆 p の 4 次元ファイバー空間において、 $F_{r,s}$ の法束のオイラー数 $\chi(F_{r,s})$ が局所化することを述べる。また、これを用いて、4 次元ファイバー空間の局所符号数を与える。

まず一般に次のような設定を考える。 F をコンパクト有向曲面、 $f: N(F) \rightarrow F$ を有向円板束とする。非零切断 $s: \partial F \rightarrow S(F)_{\partial F}$ が与えられているとき、それに対応する homology 類 $[s] \in H_1(S(F))$ を考える。 s の拡張 $\tilde{s}: F \rightarrow N(F)$ を取ると、完全列

$$0 = H_2(N(F)) \rightarrow H_2(N(F), S(F)) \rightarrow H_1(N(F)) \rightarrow H_1(N(F))$$

より, homology 類 $[\tilde{s}] \in H_2(N(F), S(F))$ は拡張 $\tilde{s}$ のとり方によらずに定まる. $N(F)$ における零切断 $s_0: X \rightarrow E$ のなす homology 類 $[s_0] \in H_2(N(F), N(F)|_{\partial F})$ を取り, 交叉積

$$H_2(N(F), N(F)|_{\partial F}) \times H_2(N(F), S(F)) \rightarrow \mathbf{Z}$$

において, $n(s) := [\tilde{s}] \cdot [s_0] \in \mathbf{Z}$ が定まる.

これを分岐集合の法円板束に対して用いることにより, 分岐集合の局所法オイラー数を定義する. $[E, f, \Delta] \in S_g^p$ に対し, $\bar{E} := E/\mathbf{Z}_d$, $\bar{F}_{rs} = F_{rs}/(r\mathbf{Z}_d) \subset \bar{E}$ とする.

まず古田先生の方法により, 分岐集合 F_{rs} の法束について, $\partial F_{rs} = F_{rs} \cap f^{-1}(\partial\Delta)$ 上には自然に非零多価切断が定まることを述べる. f の誘導する球面ファイバー空間を $\bar{f}: \bar{E} \rightarrow \Delta$ とする. 球面束 $\partial\bar{E} \rightarrow \partial\Delta$ において, 各ファイバーに複素構造を入れる. ファイバー $\bar{f}^{-1}(b)$ において, 分岐点 $(\cup \bar{F}_{rs}) \cap \bar{f}^{-1}(b) = \{\alpha_i(b)\}_{i=1}^m$ と表す. 次のように各 α_i に対し他の2つの分岐点を選ぶことにより接方向が定まる. 同型写像

$$t_b^{ijk}: \mathbf{CP}^1 \rightarrow \bar{f}^{-1}(b)$$

を, $t_b^{ijk}(0) = \alpha_i(b)$, $t_b^{ijk}(1) = \alpha_j(b)$, $t_b^{ijk}(\infty) = \alpha_k(b)$ を満たすように定める. これにより, α_i の接ベクトル $t_{b*}^{ijk}(\frac{\partial}{\partial \text{Re } z})$ を得る. j, k について動かせば,

$$\bigotimes_{j,k} t_{b*}^{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial \text{Re } z} \right) \in T_{\alpha_i(b)}(\partial\bar{E}/\partial\Delta)^{\otimes(m-1)(m-2)}$$

を得る. ただしここでテンソル積は複素係数で考えている. これを i と $b \in \partial\Delta$ について動かすことにより, $T(\partial\bar{E}/\partial\Delta)^{\otimes(m-1)(m-2)}|_{\partial\bar{F}_{rs}}$ の非零切断 s_{rs} が得られる.

一般ファイバーは $\bar{F}_{rs}$ と transverse に交わるので, 射影

$$T(\bar{E} - \bar{f}^{-1}(0))|_{\partial\bar{F}_{rs}} \rightarrow N(\bar{F}_{rs})|_{\partial\bar{F}_{rs}}$$

において, 同型 $T(\partial\bar{E}/\partial\Delta)|_{\partial\bar{F}_{rs}} \cong N(\bar{F}_{rs})|_{\partial\bar{F}_{rs}}$ を得る. これにより, $N(\bar{F}_{rs})^{\otimes(m-1)(m-2)}|_{\partial\bar{F}_{rs}}$ の非零切断 $\bar{s}_{rs}$ が得られる. $E \rightarrow \bar{E}$ の制限として, 分岐被覆 $N(F_{rs})|_{\partial F_{rs}} \rightarrow N(\bar{F}_{rs})|_{\partial\bar{F}_{rs}}$ が定まる. このとき, $N(F_{rs})|_{\partial F_{rs}}^{\otimes d/r} \rightarrow N(\bar{F}_{rs})|_{\partial\bar{F}_{rs}}$ は D^2 束の有限不分岐被覆となることから, $N(F_{rs})^{\otimes d(m-1)(m-2)/r}|_{\partial F_{rs}}$ の非零切断 s_{rs} が得られる.

定義 2.1. 円板束 $N(F_{rs})^{\otimes d(m-1)(m-2)/r} \rightarrow F_{rs}$ において, 上で得た非零切断 s_{rs} と零切断 s_0 の交点数を $n(s_{rs})$ とするとき,

$$\begin{aligned} \chi_{rs}: S_g^p &\rightarrow \mathbf{Z} \\ f &\mapsto \frac{r}{d(m-1)(m-2)} n(s_{rs}) \end{aligned}$$

を, ファイバー芽 f における分岐点集合 F_{rs} の局所オイラー数と呼ぶ.

このとき, 4次元ファイバー空間 $X \rightarrow B$ において, 法オイラー数は次のように表される.

補題 2.2.

$$\chi(F_{rs}) = \sum_{l=1}^n \chi_{rs}(f_l).$$

Proof. 分岐点集合 F_{rs} のオイラー数を計算する. まず, F_{rs} の法束 $N(F_{rs}) \rightarrow F_{rs}$ について, 切断 $F_{rs} \cap f^{-1}(S^2 - \amalg \text{Int}(D_l)) \rightarrow (N(F_{rs})^{\otimes d(m-1)(m-2)/r})|_{F_{rs} \cap f^{-1}(S^2 - \amalg \text{Int}(D_l))}$ を構成する. これは前述した古田先生による方法を用いる.

各特異ファイバーの近傍 D_l において, 切断 s_{rs} を零切断 $s_0 : F_{rs} \rightarrow N(F_{rs})^{\otimes d(m-1)(m-2)/r}$ と transversal になるように拡張し, これを $\tilde{s}_{rs} : F_{rs} \rightarrow N(F_{rs})^{\otimes d(m-1)(m-2)/r}$ とおく. このとき, $[\tilde{s}_{rs}] \in H_2(E, E_0)$ と $[s_0] \in H_2(E, E|_{\partial F_{rs}})$ の交点数 $\tilde{s}_{rs} \cdot s_0$ の和はオイラー数

$$\chi(N(F_{rs})^{\otimes d(m-1)(m-2)/r}) = \frac{d(m-1)(m-2)}{r} \chi(F_{rs})$$

に一致する. したがって, $\chi(F_{rs}) = \sum_{l=1}^n \chi_{rs}(f_l)$. □

2.3 特異ファイバーにおける固定点集合の寄与

ここでは G -符号数定理を用いて, 4次元ファイバー空間の符号数が固定点集合の法オイラー数を用いて表せることを述べる.

一般に有向閉 4次元多様体 X に群 G が作用しているとする. このとき, G -符号数は

$$\text{Sign}(t, X) = \text{Tr}(t|H_+^2(X; \mathbb{Q})) - \text{Tr}(t|H_-^2(X; \mathbb{Q}))$$

で定義される. ただし, $H_+^2(X; \mathbb{Q})$, $H_-^2(X; \mathbb{Q})$ は正值固有空間, 負値固有空間である. X の $t \in G$ による作用の固定点集合が閉 2次元多様体 $\{F_i\}$, 0次元多様体 $\{P_j\}$ の連結和であるとする. このとき, $F_i(t)$ の法オイラー数を $\chi(F_i(t))$, その t 作用における回転角を $\psi_i(t)$, $P_j(t)$ の法束を t の作用によって固有分解した際の回転角を $\varphi_j(t), \varphi'_j(t)$ とすると, G -符号数定理は以下のものである.

定理 2.3 (G -符号数定理).

$$\text{Sign}(t, X) = \sum_i \chi(F_i(t)) \text{cosec}^2 \left(\frac{\psi_i(t)}{2} \right) - \sum_j \cot \left(\frac{\varphi_j(t)}{2} \right) \cot \left(\frac{\varphi'_j(t)}{2} \right).$$

ファイバー芽 $f \in S_g^p$ に対し, 特異ファイバーに含まれる固定点集合の連結成分による寄与

$$\text{fix} : S_g^p \rightarrow \mathbb{Q}$$

を G -符号数定理のように, 固定点集合の情報を用いて定義する. 上と同様に $t \in \mathbb{Z}_d$ の作用における固定点集合の垂直な連結成分全体を $(\amalg_i F_i(t)) \amalg (\amalg_j P_j(t))$ とする. このとき, 垂直な連結成分による符号数への寄与を

$$\text{fix}(f) := \sum_{t=1}^{d-1} \left(\sum_i \chi(\bar{F}_i(t)) \text{cosec}^2 \left(\frac{\psi_i(t)}{2} \right) - \sum_j \cot \left(\frac{\varphi_j(t)}{2} \right) \cot \left(\frac{\varphi'_j(t)}{2} \right) \right).$$

と定める.

また, $\mathbf{Z}_d$ 作用の拡張するファイバー芽 $f \in S_g^p$ に対して,

$$\sigma : S_g^p \rightarrow \mathbb{Q}$$

を次により定義する.

$$\sigma(f) = -\left(\sum_{r=1}^{d-1} \sum_{s=1}^{d/r-1} \chi_{rs}(f) + \text{fix}(f) - d \text{Sign}(f/\mathbf{Z}_d)\right).$$

このとき次の主定理が成り立つ.

定理 2.4. 被覆 p の d 次元ファイバー空間 $X \rightarrow B$ に現れる特異ファイバー芽を $\{f_l\}_{l=1}^n \in S_g^p$ とおく. このとき,

$$\text{Sign}(X) = \sum_{l=1}^n \sigma(f_l).$$

つまり, σ は被覆 p のファイバー空間における局所符号数をなす.

Proof. 一般に有向閉多様体 X に群 G が作用しているとき, G -符号数について次が成り立つことが知られている.

$$\text{Sign}(X) = - \sum_{t \neq 1 \in G} \text{Sign}(t, X) + |G| \text{Sign}(X/G).$$

また, F_{rs} の法束の $r\mathbf{Z}_d$ 作用における回転角は $2\pi krs/d$ と表せる. $(s, d/r) = 1$ より,

$$\sum_{k=1}^{d/r} \text{cosec}^2\left(\frac{\pi krs}{d}\right) = \sum_{k=1}^{d/r} \text{cosec}^2\left(\frac{\pi kr}{d}\right) = \frac{d^2 - r^2}{3r^2}$$

となる (Hirzebruch-Zagier[7] p.178 (15) 式を参照). これより,

$$\sum_{t=1}^{r-1} \text{Sign}(t, X) = \sum_{r=1}^{d-1} \sum_{s=1}^{d/r-1} \frac{d^2 - r^2}{3r^2} \chi(F_{rs}) + \sum_{l=1}^n \text{fix}(f_l).$$

また補題 2.2 より

$$\chi(F_{rs}) = \sum_{l=1}^n \chi_{rs}(f_l).$$

$X/\mathbf{Z}_d$ は特異ファイバーを除いて球面束であり, 符号数の Novikov 加法性とコンパクト曲面上の球面束の符号数が 0 であることから, $\text{Sign}(X/\mathbf{Z}_d) = \sum_{l=1}^n \text{Sign}(f_l/\mathbf{Z}_d)$. 以上より題意が従う. $\square$

2.4 局所符号数と対称的写像類群の Meyer 関数

定義 2.5. S_g^p に含まれるファイバー芽の *monodromy* に現れる共役類の代表元により生成される $\mathcal{M}_g(p)$ の部分群を $\mathcal{M}'(p)$ で表す.

定理 2.6. $\hat{\varphi} \in \mathcal{M}'(p)$ について, 部分群 $\mathcal{M}'(p)$ の定義に述べたファイバー芽 $\{f_j\} \subset S_g^p$ のみをもつ境界に沿う *monodromy* に $\hat{\varphi}$ をもつ被覆 p の円板上の 4 次元ファイバー空間 X を取る. このとき,

$$\phi(\hat{\varphi}) := - \sum_{i=1}^n \sigma(f_i) + \text{Sign } X$$

と定めると, この関数は *well-defined* であり, *Meyer cocycle* をコバウンドする.

Proof. Pants 上の Σ_g 束 E として, 境界に沿う *monodromy* として, $\hat{\varphi}_l \in \mathcal{M}'(p)$ ($l = 1, 2, 3$) をもつものを取る. 各境界に貼り合う円板上の 4 次元ファイバー空間 X_1, X_2, X_3 を一つずつとり, X_l に現れるファイバー芽を $\{f_{li}^i\}_{i=1}^{n_l}$ とすると 定理 2.4 より

$$\sum_{l=1}^3 \phi(\hat{\varphi}_l) = \sum_{l=1}^3 \left(- \sum_{i=1}^{n_l} \sigma(f_{li}^i) + \text{Sign } X_l \right) = - \text{Sign } E = \Phi^* \tau(\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2).$$

特に各 $\phi(\hat{\varphi}_l)$ は X_l のとり方によらないことがわかり, また, *Meyer cocycle* をコバウンドしている. $\square$

これにより, $\mathcal{M}'(p)$ に *monodromy* をもつ 4 次元ファイバー空間において, 局所符号数を定義することができる. 次の節で, いくつかの被覆については部分群 $\mathcal{M}'(p)$ は実は対称的写像類群 $\mathcal{M}_g(p)$ 全体に一致することを示す.

3 対称的写像類群の生成元

曲面 Σ_g の微分同相写像であり, 有限集合 T の各点を固定するものを, $\text{Diff}_+(\Sigma_g, [T])$ と表す. 有限集合 $T_1, T_2, \dots, T_n$ をそれぞれ集合として固定するもの $\text{Diff}_+(\Sigma_g, T_1, T_2, \dots, T_n)$ と表す. 分岐点を $A \subset S^2$ にもつ G 分岐被覆

$$p: \Sigma_g \rightarrow S^2$$

において, モノドロミー準同型を

$$\rho: \pi_1(S^2 - A) \rightarrow \mathbb{Z}_d$$

と表す. $\alpha \in A$ に沿って反時計回りに一周する loop を, $\gamma_\alpha: [0, 1] \rightarrow S^2 - A$ と表す. $r = 1, 2, \dots, d-1$ について, $A_r = \{\alpha \in A \mid \rho(\gamma_\alpha) = r\}$, $* \in S^2 - A$ とする. 被覆 p の点つき対称的写像類群を,

$$\mathcal{M}_g^{(*)}(p) := \pi_0(\text{Diff}_+(\Sigma_g, [p^{-1}(*)]) \cap C(p))$$

により定義する. $\hat{f}$ の射影 f を

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{\hat{f}} & \Sigma_g \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ S^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \end{array}$$

により定める. 球面の m 点集合 A を集合として保つ写像類群を, $\mathcal{M}_0^m = \pi_0 \text{Diff}(S^2, A)$, 各 $\{A_i\}$ を集合として保つ写像類群を, $\mathcal{M}_0^A = \pi_0 \text{Diff}(S^2, A_1, A_2, \dots, A_{d-1})$ と定める. 点つき写像類群についても, $\mathcal{M}_0^{m,*} = \pi_0 \text{Diff}(S^2, A, *)$, $\mathcal{M}_0^{A,*} = \pi_0 \text{Diff}(S^2, A_1, A_2, \dots, A_{d-1}, *)$ とする. このとき被覆空間が底空間に誘導する写像を用いて,

$$\begin{array}{ccc} P' : \mathcal{M}_g^{(*)}(p) & \rightarrow & \mathcal{M}_0^{A,*} \\ [\hat{f}] & \mapsto & [f] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P : \mathcal{M}_g(p) & \rightarrow & \mathcal{M}_0^A \\ [\hat{f}] & \mapsto & [f] \end{array}$$

が定義できる. 以下では対称的写像類群の生成元を求める.

補題 3.1. P' は全単射である. P は全射であり, 核は $\text{Deck}(p)$ で生成される.

Proof. (全射性) d 点集合 $p^{-1}(*)$ の 1 点を任意にとり, $\hat{*}$ とあらわす. このとき, $f \in \mathcal{M}_0^{A,*}$ に対し,

$$(f|_{S^2-A})_* p_*(\pi_1(\Sigma_g - p^{-1}(A), \hat{*})) = p_*(\pi_1(\Sigma_g - p^{-1}(A), \hat{*}))$$

が成り立つことを確認する. $\text{abel 化 } \iota : \pi_1(S^2 - A, *) \rightarrow H_1(S^2 - A; \mathbf{Z})$ に関して,

$$p_*(\pi_1(\Sigma_g - p^{-1}(A), \hat{*})) = \iota^{-1} \text{Ker}(H_1(S^2 - A; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}_d).$$

$f \in \mathcal{M}_0^{A,*}$ は ι^{-1} と可換であり, 定義より $\text{Ker}(H_1(S^2 - A; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}_d)$ を保つ.

よって, 被覆空間の一般論から微分同相 $\hat{f} : \Sigma_g - p^{-1}(A) \rightarrow \Sigma_g - p^{-1}(A)$ であり, $f(\hat{*}) = \hat{*}$ を満たすものが存在する. これは一意的に Σ_g の微分同相に拡張し, $\hat{f}(p^{-1}(A)) = p^{-1}(A)$ を満たす. 特に $r \in \pi_1(S^2 - A, *)$, $t = \rho(r) \in \text{Deck}(p)$ について, $\hat{f}^{-1}t\hat{f} = \rho(f(r)) = \rho(r)$ を満たし, $\text{Deck}(p)$ の中心化群 $C(p)$ に含まれることがわかる. 任意の $t \in \text{Deck}(p)$ について

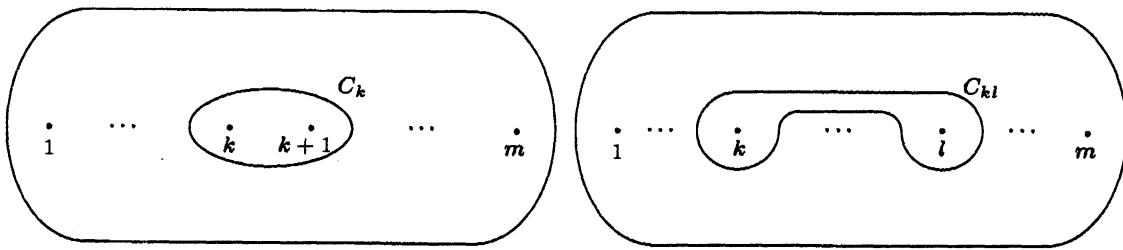
$$\hat{f}(t(\hat{*})) = t\hat{f}(\hat{*}) = t(\hat{*})$$

より, $p_1^{-1}(\hat{*})$ の各点は $\hat{f}$ により保たれる. これより $\hat{f} \in \mathcal{M}_g(p)$.

(単射性) $\hat{f} \in \text{Ker } P'$ とすると, 射影 f についてイソトピー $f \sim \text{id}_{S^2}$ は $\hat{f}$ と被覆変換のイソトピー $\{\hat{f}_s\}$ を誘導する. ここで $\hat{f}_0 = \hat{f}$, $\hat{f}_1 = t \in \text{Deck}(p)$. 各時間 s において, 底空間の微分同相写像を誘導しているので, $\hat{f}_s \in C(p)$ がわかる. また, 特に基点を保つことから, $\hat{f} \sim \text{id}_{\Sigma_g}$.

同様にして, P の全射性も示され, 核が $\text{Deck}(p)$ で生成されることは容易にわかる. $\square$

$r = 1, 2, \dots, d-1$ が存在して $\alpha_i, \alpha_j \in A_r$ となるような i, j に対し, $\sigma_{ij} \in \mathcal{M}_0^{A,*}$ を C に沿う half Dehn twist, また異なる r, s が存在して $\alpha_i \in A_r, \alpha_j \in A_s$ となるような i, j に対し, $\tau_{ij} \in \mathcal{M}_0^{A,*}$ を C' に沿う Dehn twist により定める. $(P')^{-1}$ と基点を忘れる準同型 $\mathcal{M}_g^{(*)}(p) \rightarrow \mathcal{M}_g(p)$ の合成を Q と定める.

図 1: σ_k, σ_{kl}

補題 3.2. $\hat{\sigma}_{ij} := Q(\sigma_{ij})$, $\hat{\tau}_{ij} := Q(\tau_{ij})$ とする. $\mathcal{M}_g(p)$ は $\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{\tau}_{ij}$ で生成される.

Proof. 同型 $P' : \mathcal{M}_g^{(*)}(p) \cong \mathcal{M}_0^{A,*}$ により, 次を示せばよい.

(i) σ_{ij}, τ_{ij} が $\mathcal{M}_0^{A,*}$ を生成している.

(ii) $Q : \mathcal{M}_g^{(*)}(p) \rightarrow \mathcal{M}_g(p)$ は全射である.

まず (i) について述べる. A の各点を保つ写像類群を $\mathcal{M}_0^{m+1} = \pi_0 \text{Diff}_+(S^2, [\{\alpha_i\}, *])$ とすると, 次が exact である.

$$1 \longrightarrow \mathcal{M}_0^{m+1} \longrightarrow \mathcal{M}_0^{A,*} \xrightarrow{\eta} \prod_{a \in G} S_{n(a)} \longrightarrow 1.$$

ただしここで $n(a)$ は A_a の位数, $S_{n(a)}$ は位数 $n(a)$ の対称群を表す. $\mathcal{M}_0^{m+1}$ が上で述べた元の積で表わされることはよく知られている. また, $\hat{\sigma}_{ij}$ の η による像が $\prod_{a \in G} S_{n(a)}$ を生成する. これより従う.

次に (ii) について述べる. $p^{-1}(*)$ の 1 点を $\hat{*}$ とおく. $\hat{f} \in \mathcal{M}_g(p)$ に対し, $\hat{f}(\hat{*})$ と $\hat{*}$ を分岐集合を通らない path γ で結ぶ. $\hat{f}$ の射影を f として, path $p(\gamma)$ に沿って $f(*)$ を $*$ に流す微分同相を f' とする. f' のリフトを $\hat{f}'$ とするとき, 微分同相写像 $\hat{f}'\hat{f}$ は $\hat{*}$ を保つ. $\hat{f}'\hat{f}$ は被覆変換と可換なので, $p^{-1}(*)$ の各点を保つことがわかる. また基点を忘れるとき, $[\hat{f}'\hat{f}] = [\hat{f}] \in \mathcal{M}_g(p)$. これより全射性が示される. $\square$

4 具体例

$A \subset S^2$ を m 点集合とし, 準同型 $\rho : \pi_1(S^2 - A) \rightarrow \mathbb{Z}_d$ を, $\rho(\gamma_i) = 1$ により定義する. 以下では, この準同型をモノドロミーにもつ球面上の分岐巡回被覆 $p_1 : \Sigma_g \rightarrow S^2$ について, その対称的写像類群と 4 次元ファイバー空間の性質を述べる.

4.1 ファイバー芽の構成

補題 4.1. $\mathcal{M}(p_1)$ は対称的写像類群全体 $\mathcal{M}_g(p_1)$ に一致する.

Proof. 上において, 対称的写像類群の生成元が $\mathcal{M}(p_1)$ に含まれることを言えばよい. 前節で述べたように, $\mathcal{M}(p_1)$ の生成元は $\hat{\sigma}_{ij}$ である. したがって, モノドロミーに $\hat{\sigma}_{12}$ をもつ $\mathcal{M}_g(p)$ の $\mathbf{Z}_d$ 作用をもつファイバー芽を構成すればよい.

まず点つき球面を一般ファイバーとするファイバー芽を構成する.

$$M_1 = \Delta \times \mathbf{P}^1$$

において, 座標系を $(b, [x_1 : x_2])$ とする. $m' = m - 2$ として $(x_1^{m'} - x_2^{m'})(x_1^2 - bx_2^2) = 0$ による部分多様体を $\bar{F}$ と表す. $(M_1, \bar{F})$ は点つき球面を一般ファイバーとするファイバー芽である.

補題 4.2. $H_1(M_1 - \bar{F})$ は $\mathbf{Z}^m / (e_1 - e_2, e_1 + e_2 + \cdots + e_m)$ と表される.

Proof. 次の完全列を考える.

$$H_2(M_1) \rightarrow H_1(S(\bar{F})) \rightarrow H_1(\bar{F}) \oplus H_1(M_1 - \bar{F}) \rightarrow H_1(M_1).$$

$\bar{F}$ は D^2 の分岐被覆の非連結和であり, $H_1(\bar{F}) = 0$, $H_1(S(\bar{F})) = \mathbf{Z}^m / (e_1 - e_2)$. また, $H_2(M_1)$ は一般ファイバーの球面が生成元を代表する無限巡回群, $H_1(M_1)$ は自明であることがわかる.

また, $H_2(M_1) \rightarrow H_1(S(\bar{F}))$ の像は $\mathbf{Z}(1, 1, \dots, 1)$ と表される. これにより題意が示される. $\square$

α_i を反時計回りに一周する loop γ_{α_i} について

$$\begin{array}{ccc} H_1(M_1 - \bar{F}) & \rightarrow & \mathbf{Z}_d \\ \gamma_{\alpha_i} & \mapsto & 1 \end{array}$$

により不分岐 $\mathbf{Z}_d$ cover $q'_1 : \tilde{M}'_1 \rightarrow M_1 - \bar{F}$ を定める. ここで, $N(\bar{F}) - \bar{F} \subset M_1 - \bar{F}$ は, Δ 上の $D^2 - 0$ 束であり, その被覆として, $q_1^{-1}(N(\bar{F}) - \bar{F})$ も $\bar{F}$ 上の $D^2 - 0$ 束となっている. 局所自明化を取り, $U \times (D^2 - 0)$ からの埋めこみができる. これを用いて, $U \times D^2$ を貼り付けることにより, $\tilde{M}'_1$ をコンパクト化できる. これを, $\tilde{M}_1$ とおき, q'_1 の拡張 $q_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow M_1$ を自然に定義できる. ファイバー芽 $\tilde{M}_1 \rightarrow \Delta$ の一般ファイバーは被覆 p_1 と同型である. また, monodromy に $\hat{\sigma}_{12}$ をもつファイバー芽である. 特にこのファイバー芽は $\mathbf{Z}_d$ 作用をもつ. $\square$

4.2 局所法オイラー数と局所符号数

ここでは, 4.1 節で構成したファイバー芽 f の局所符号数, および被覆 p_1 の対称的写像類群の生成元における Meyer 関数の値を計算する.

定理 4.3.

$$\sigma(f) = -\phi(\hat{\sigma}_{12}) = -\frac{(d-1)(d+1)m}{3d(m-1)}$$

まず, 方程式 $f(x, b) = (x_1^{m'} - x_2^{m'})(x_1^2 - bx_2^2) = 0$ により定義される M_1 内の曲線の法オイラー数を計算する. 次の補題を準備する.

補題 4.4. 円板上の計量つき円板束 $N(D^2)$ において, 非零切断 $s : D^2 \rightarrow N(D^2)$ が与えられているとする. 切断 $s' : \partial D^2 \rightarrow S(D^2)|_{\partial D^2}$ の拡張 $\tilde{s}' : D^2 \rightarrow N(D^2)$ について,

$$\tilde{s}' \cdot s = -s' \cdot s|_{\partial D^2}.$$

ただし, $\tilde{s}' \cdot s$ は交叉積 $H_2(N(D^2), S(D^2); \mathbf{Z}) \times H_2(N(D^2), N(D^2)|_{\partial D^2}; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$ における交叉, $s' \cdot s|_{\partial D^2}$ は交叉積 $H_1(S(D^2)|_{\partial D^2}; \mathbf{Z}) \times H_1(S(D^2)|_{\partial D^2}; \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{Z}$ における交叉を表す.

Proof. $D^2 \subset \mathbf{C}$ と見なす. s を用いて, 自明化 $N(D^2) \cong D^2 \times D^2$ が得られる. ある整数 k を用いて, 切断 s' は $H_1(S(D^2)|_{\partial D^2}; \mathbf{Z})$ の元として曲線 $\{(z, z^k) | z \in S^1\}$ で代表される. このとき, $s' \cdot s|_{\partial D^2} = -k$ となることがわかる. さらに 2.2 節で述べたように切断の拡張が代表する homology 類の一意性から, $\tilde{s}'$ は $H_2(N(D^2), S(D^2); \mathbf{Z})$ の元として曲面 $\{(z, z^k) | z \in D^2\}$ で代表されるので, $\tilde{s}' \cdot s = k$. 以上より題意が示される. $\square$

$F \subset M_1$ において適当に枝を決めて, $\alpha_1(b) = (b, [1 : \sqrt{b}])$, $\alpha_2(b) = (b, [1 : -\sqrt{b}])$ とする. また $i = 3, \dots, m$ について, $\alpha_i(b) = [b, [1, \zeta^i]]$ とおく. $x_1^2 = bx_2^2$ で定義される部分多様体を $\bar{F}_{12}$, また, $i = 3, \dots, m$ について $\zeta^i x_1 = x_2$ で定義される部分多様体を $\bar{F}_i$ と表す. このとき, M_1 の $\mathbf{Z}_d$ 作用により現れる固定点集合の連結成分は, $q^{-1}(\bar{F}_{12})$, $q^{-1}(\bar{F}_i)$ からなる.

2.2 節で述べた $t_b^{ijk} : \mathbf{CP}^1 \rightarrow \bar{f}^{-1}(b)$ について,

$$s(i, j, k)(b) := t_{b*}^{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)$$

により表される $T(M_1/\Delta)|_{\partial \bar{F}_{12}}$, または, $T(M_1/\Delta)|_{\partial \bar{F}_i}$ の (多価) 切断 $s(i, j, k)$ を考える.

$i \geq 3$ について $n(s_{\partial \bar{F}_i})$ を調べる. まず, $S(F_i)$ において $s(i, j, k)$ は非零切断である. さらに $S(F_i)$ において

$$\begin{aligned} s(i, j', k') \cdot s(i, j, k) &= 0, \\ (s(i, 1, k) \otimes s(i, 2, k)) \cdot s(i, j, k)^{\otimes 2} &= 0, \\ (s(i, 1, 2) \otimes s(i, 2, 1)) \cdot s(i, j, k)^{\otimes 2} &= -1. \end{aligned}$$

これより先に示した補題 4.4 から, $n(s_{\partial \bar{F}_i}) = 1$.

次に $n(s_{\partial F_{12}})$ を考える. $i, j \geq 3$ のとき, $s(1, i, j) \in T(\tilde{M}_1/\Delta)|_{F_{12}}$ の NF_{12} への射影は零切断 s_0 と 1 点で transverse に交わることから NF_{12} における交叉数は $s(1, i, j) \cdot s_0 = 1$. さらに $S(F_{12})$ において

$$s(1, 2, j) \cdot s(1, i, j) = -1.$$

よって, 補題 4.4 を用いると, $N(F_{12})$ において $s(1, 2, j) \cdot s_0 = 2$ がわかる. $n(s_{\partial F_{12}}) = 2(m-2) + (m-2)(m-3)$. 以上のことから, $n(s_{\partial F}) = \sum_{i=3}^m n(s_{\partial F_i}) + n(s_{\partial F_{12}}) = m(m-2)$ を得る. したがって,

$$\chi_{11}(f) = \frac{m}{d(m-1)}.$$

よって

$$\sigma(f) = -\frac{d^2-1}{3}\chi_{11}(f) + d \operatorname{Sign}(f/\mathbf{Z}_d).$$

特異ファイバーの近傍は特異ファイバーに変位レトラクトをもち, 特異ファイバーの連結成分は 1 つであることから $\operatorname{Sign}(f/\mathbf{Z}_d) = 0$ がわかる. 局所符号数および Meyer 関数は題意のように表されることがわかる.

参考文献

- [1] MF Atiyah and IM Singer, *The Index of Elliptic Operators: III*, The Annals of Mathematics **87** (1968), no. 3, 546–604.
- [2] J.S. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*. (AM-82), Princeton University Press, 1975.
- [3] J.S. Birman and H.M. Hilden, *On Isotopies of Homeomorphisms of Riemann Surfaces*, The Annals of Mathematics **97** (1973), no. 3, 424–439.
- [4] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, Mathematische Annalen **316** (2000), no. 2, 237–257.
- [5] M. Furuta, 曲面束と局所符号数, 「リーマン面に関連する位相幾何学」予稿集 (1999), 47–53.
- [6] CM Gordon, *The G-signature theorem in dimension 4*, Progress in Math **62** (1986), 119–139.
- [7] F. Hirzebruch and D. Zagier, *The Atiyah-Singer Theorem and Elementary Number Theory*, Publish or Perish, Inc., Berkeley (1974).
- [8] N. Kawazumi and T. Uemura, *Riemann–Hurwitz formula for Morita–Mumford classes and surface symmetries*, Kodai Math. J **21** (1998), 372–380.

- [9] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two—a topological approach*, The 37th Taniguchi Symposium on topology and Teichmüller spaces (S Kojima et al, eds.) World Scientific (1996).
- [10] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Mathematische Annalen **201** (1973), no. 3, 239–264.
- [11] T. Nakata, 超楕円的ファイバー空間における Lefschetz 特異ファイバーの局所符号数について, Master's thesis, University of Tokyo, (2005).
- [12] M. Namba and M. Takai, *Degenerating families of finite branched coverings*, Osaka J. Math **40** (2003), no. 1, 139–170.
- [13] F Uchida, 変換群とコボルディズム理論, 紀伊國屋書店, 1973.