

球形シェルの自由振動近似固有モード作成

諸岡 繁洋・國枝 治郎

MAKING OF APPROXIMATE EIGEN MODES OF A SPHERICAL DOME

By Shigehiro MOROOKA and Haruo KUNIEDA

Synopsis

When we design large span structures like domes, it is substantial to take into consideration of influence of external forces such as earthquakes and wind. For a spherical dome, exact eigen modes are already available. In modal analysis, however, the exact modes are of little use, because they are represented in terms of Legendre bifunction with complex or real fractional order.

The purpose of this paper is to get a powerful tool for response analysis of a spherical dome subjected to dynamic excitation based on mathematical analytic method, i.e., the Galerkin procedure in modal analysis, with sufficient accuracy and practicality. This paper provides an approximate solution of eigen modes, which has sufficient accuracy and practicality for response analysis in any states.

1. はじめに

一般厳正解¹⁾に示されるように厳正解は複素数次数及び非整数次の Legendre 陪関数で表現されているので、これらの解を応答解析に用い、通常用いられる Galerkin 法を適用すると座標変数による領域積分が一般には閉形関数では表され得ないので、数値計算が極めて困難になる。ここでは一般厳正解^{1,4,5)}の結果を参照しつつ、充分な精度と実用性をもって応答解析に適用可能な自由振動時近似解を求める。この近似解を用いると応答解析における上記積分はすべて閉形関数で与えられる。

一般厳正解¹⁾に基づく固有振動数、モードの計算結果³⁾によると、接線方向変位成分 u , v による慣性項をも含めた normal 振動とこれを見捨てた flexural 振動とは通常実設計に用いられる球形シェルの幾何寸法、材料の常数の範囲において極めて軽微な差異しか見られない。他方 flexural 振動の仮定を導入すると応答解析が極めて簡略化される。従ってここでは flexural 振動の仮定を導入する。また、ここで取り扱う球形シェルは頂点が閉じており、境界が一つ所だけのドーム形とする。

2. 支配式と厳正解の表示

flexural 振動の仮定に基づく自由振動時の支配式は次の様になる。

$$H_2 H_2(w) - \frac{a}{D} H_2(\phi) + \frac{ma^4}{gd} \ddot{w} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$H_2 H_1(\phi) - (1 - \nu) \frac{D}{a} H_2 H_2(w) + Eha H_2(w) = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに, w は法線方向変位成分であり, 応力関数 ϕ は断面力, 接線方向変位成分 u, v と次の関係にある。

$$\begin{aligned} N_\theta &= \frac{1}{a^2} \left(\phi^{\circ\circ} + \phi - \frac{D}{a} H_2(w) \right) \\ N_\phi &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{\phi''}{\sin^2 \phi} + \phi^\circ \cot \phi + \phi - \frac{D}{a} H_2(w) \right) \\ u &= -\frac{(1+\nu)}{Eha} \phi^\circ + \frac{1}{\sin \phi} f' \\ v &= \frac{(1+\nu)}{Eha} \frac{\phi'}{\sin \phi} f' \end{aligned}$$

ここに f は応力関数である。

(1), (2)式を満たす一般厳正解は以下のように Legendre 陪関数 $P_{\mu_i}^n$ を用いて表される。頂点の閉じた境界が s ヶ所のドームの変位 w は

$$w = \sum_{i=1}^3 A_i P_{\mu_i}^n(\phi) \cos n \theta \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (3)$$

のように変数分離できる。ここで周方向の余弦級数展開次数 n により, 対称 ($n=0$), 逆対称 (1), 非対称 (2以上) と分類される。(3)式により, 応力関数 ϕ, f は次式で表される。

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \eta_i A_i P_{\mu_i}^n \cos n \theta \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$f = \frac{1+\nu}{Eha} G P_{\mu_s}^n \sin n \theta \cos \omega t$$

これらを用いると u, v は次式で表される。

$$u = \frac{1+\nu}{Eha} \left[-\sum_{i=1}^3 [\eta_i A_i P_{\mu_i, \phi}^n] + G P_{\mu_s}^n \frac{n}{\sin \phi} \right] \cos n \theta \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$v = \frac{1+\nu}{Eha} \left[\frac{n}{\sin \phi} \sum_{i=1}^3 [\eta_i A_i P_{\mu_i}^n] - G P_{\mu_s, \phi}^n \right] \sin n \theta \cos \omega t \quad \dots\dots\dots (6)$$

(5), (6)式を見ると判るように, n が1以上の値を持つとき (逆対称, 非対称時) には, n が0の時 (対称時) では表れない未知常数 G を含む項が表れることが判る。これは序論で述べた, u, v の回転による剛体変位相当項である。詳しくは, 文献1)を参照されたい。

3. 近似解の作成

球形ドームの半開角を ϕ_0 とする。(1)及び(2)式の解 w を Legendre 陪多項式を用いて次のように表すものとする。

$$w = \sum_{i=1}^N B_i^{\eta} \tilde{W}_i^{\eta}(\phi) \cos n \theta \cos \omega t, \quad \tilde{W}_i^{\eta}(\phi) = \sum_{j=1}^{K_i^{\eta}} F_{ij}^{\eta} P_j^{\eta}(\phi) \quad \dots\dots\dots (7)$$

(N : モードの数, P_j^{η} : Legendre 陪多項式)

ここに $\tilde{W}_i^{\eta}$ は仮モードであり, 上付きの n が0の時には, Legendre 多項式を表すものとする。(つまり, $P_j^0 \equiv P_j$)

一般厳正解表示が(3)式のように Legendre 陪関数の和で表されるところを, Legendre 陪多項式の和によって1つのモードを表し, そのモードの重ね合わせによって解 w を表現している。この仮モードに含まれる J_i^{η}, K_i^{η} の選定がここでの近似解の精度を決定する。

ところで $n \equiv n$ の時の Legendre 陪多項式は n が奇数, 偶数によって

奇数時

$$P_m^n(\cos\phi) = D_m \sin m\phi + \text{Func.}(\sin k\phi; k = 0 \sim (m-1))$$

偶数時

$$P_m^n(\cos\phi) = D_m \cos m\phi + \text{Func.}(\cos k\phi; k = 0 \sim (m-1))$$

のように級数表現される。即ち P_m^n の曲線を描くと、 $0 < \phi \leq 90^\circ$ の領域でこの曲線には $m/2$ 個の節点が存在する。ここでこの節点が 0 から 90° の間に均等に分布していると仮定する（但し十分に大きな m についてである）。従って、 $0 < \phi \leq \phi_0$ の領域に i 個の節点がある状態を考えると上記の m の代わりに $i \cdot 90^\circ / \phi_0$ を用いればよい。(7)式の $\tilde{W}_i^n$ が第 i 次のモードに仮に対応するとすると

$$K_i^n = \frac{180i}{\phi_0} + n + 1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$K_i^n = \frac{180i}{\phi_0} \quad \dots\dots\dots (8')$$

であれば、 $\tilde{W}_i$ は i 次モードを表現し得る Legendre 陪多項式 $P_{K_i^n}^n$ を含むことになる。実際、 $n = 1$ のときの Legendre 陪多項式の節点分布を調べると、この(8)式は i 個の節点を適切に取り出していることが分かる。だが、 ϕ_0 が 90° を超え且つその近辺では(8)式に微小な値 0.3 程度を加えるとより望ましい結果が得られる。

一方、 F_{ij}^n を求めるための条件式の数には後に述べるように、直交条件が $(i-1)$ 個と、境界条件が逆対称以上 $(n \geq 1)$ では、4 個（未知積分定数 G を含む）の $(i+3)$ 個であるから

$$J_i^n = K_i^n - (i+3)$$

軸対称時 ($n = 0$) には、境界条件は 3 個で条件数は $(i+2)$ であるから

$$J_i^0 = K_i^0 - (i+2)$$

であればよいが、Legendre 陪多項式を脱落することなく採用するために逆対称以上では

$$J_i^n = \min.[K_i^n - (i+3), K_{i-1}^n + 1]$$

軸対称時には、

$$J_i^0 = \min.[K_i^0 - (i+2), K_{i-1}^0 + 1]$$

とする。

境界条件

(7)式のように w を展開するとき、応力関数 ϕ は適合条件式(2)より次式となる。

$$\phi = \sum_{i=1}^N B_i^n \Psi_i^n(\phi) \cos n\theta \cos \omega_i t, \quad \Psi_i^n(\phi) = \frac{D}{a} \sum_{j=1}^{K_i^n} F_{ji}^n \lambda_j P_j^n(\phi)$$

この式は厳正解表示(4)に対応するものであり、

$$\lambda_j = \frac{(1-\nu)(2-j(j+1))-\kappa}{1-\nu-j(j+1)}, \quad \kappa = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h^2}$$

である。例えば逆対称以上 ($n \geq 1$) の固定境界 ($w = u = v = w^\circ = 0$) の条件は式(5)、(6)を計算することにより、第 i 次のモードに対して、次式となる。

$$\begin{aligned}
\tilde{W}_i^n &= 0 \quad (w = 0) \\
-\Psi_{i,\phi}^n + G^n \frac{n}{\sin\phi} P_{\mu_4}^n &= 0 \quad (\mu = 0) \\
\frac{n}{\sin\phi} \Psi_i^n - G^n P_{\mu_4,\phi}^n &= 0 \quad (v = 0) \\
\tilde{W}_{i,\phi}^n &= 0 \quad (w^\circ = 0) \dots\dots\dots (9)
\end{aligned}$$

ここに G^n は未知常数であり, (5), (6)式の G を $G^n \equiv \frac{a}{D}G$ と置き換えている。

直交条件

支配式(1)及び適合条件式(2)より, i 次のモードに対する次の直交条件式が求められる。

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_i^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_i^n)] \tilde{W}_p^n \sin\phi d\phi \dots\dots\dots (10) \\
&= \int_0^{\phi_0} [H_2 H_2(\tilde{W}_i^n) - \frac{a}{D} H_2(\Psi_i^n)] \tilde{W}_p^n \sin\phi d\phi \quad (p = 1 \sim (i-1))
\end{aligned}$$

この式は, i 次のモードをそれまでに求めた $(i-1)$ 個のモードに直交するようにする条件である。積分を行ってこの式を書き換えると, 次の閉形関数表示で与えられる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=j^n}^{K_p^n} F_{q,i}^n \sum_{j=j^n}^{K_p^n} F_{j,p}^n \{ (2-q(q+1))^2 - \kappa\lambda_q \{ 2-q(q+1) \} \\
&\quad - \{ 2-j(j+1) \}^2 + \kappa\lambda_j \{ 2-j(j+1) \} \} S^n(q,j) = 0 \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

固有モードは次の2つの過程を経て決定する。まず仮モード $\tilde{W}_i^n$ は境界条件(9)とお互いの直交条件(11)を満たすように定める。次にこの仮モードを自由振動支配式に代入し, Galerkin 法を適用して一般化座標 B_i^n を定め, 最終的に固有モード $W_i(\phi)^n$ を求める。

第一段階 (仮モード $\tilde{W}_i^n$ の決定)

逆対称以上 ($n \geq 1$) のモードを求める際には, 境界条件の中に未知常数 G^n が含まれることから以下のように第1番目のモードとそれ以降のモードに分けて考える。ここで注意すべき点は境界条件に含まれる $P_{\mu_4}^n$ が, 本来計算結果として求められる Ω の関数であることである。まず, 厳正解⁶⁾を参照して Ω に予め 0.7~0.9 の値を与え, その結果から求められる Ω の値を再び用いて計算を行う方法をとった。およそ5回程で十分な収斂が認められた。

(a) 第1番目のモードについて $F_{j1}^n|_{j=1^n} = 1$ とおき(9)式の4個の境界条件を用いて $F_{j1}^n (j \neq 1^n)$ と未知常数 G^n を求める。

(b) 第 i 番目のモードに付いて(a)で求めた G^n を用いて $(i-1)$ 個の直交条件と4個の境界条件を満たすように F_{ji}^n を求める。

(a), (b)の方法で逆対称以上の F_{ji}^n を i について順次定めることが出来る。

軸対称時 ($n=0$) のモードを求める際には, 未定常数 G^n は含まれないため, 以下のように F_{ji}^n を求める。

(a') 第1番目のモードについて $F_{j1}^n|_{j=1^0} = 1$ とおき(9)式の3個の境界条件を用いて $F_{j1}^n (j \neq 1^0)$ を求める。

(b') 第 i 番目のモードに付いて $(i-1)$ 個の直交条件と3個の境界条件を満たすように F_{ji}^n を求める。

但し, F_{ji}^n を定める連立方程式の係数行列は一般に正則にはならない。 K_7^n を(8)式のように決定しているからである。矩形行列を係数行列とする連立方程式の解法はいくつか与えられているが, この第1段階では1組の解さえ得られておればよいので, 最も容易な“最小二乗最小ノルム”法をここでは採用した。

第2段階（固有モード W_i^n の決定）

第1段階で定まった F_{ij}^n を用いて(7)式を(1)，(2)式に代入し，Galerkin法を適用すると(7)式の B_i^n に関する次の式が得られる。

$$-\Omega^2[m_{ij}^n]\{B_j^n\} + [k_{ij}^n]\{B_j^n\} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$m_{ij}^n = m_{ji}^n = \sum_{r=j}^{K_n} \sum_{s=j}^{K_n} F_{ri}^n F_{sj}^n S^n(r, s), \quad \Omega^2 = \frac{ma^2}{Ehg} \omega^2$$

$$k_{ij}^n = k_{ji}^n = \sum_{r=j}^{K_n} \sum_{s=j}^{K_n} F_{ri}^n F_{sj}^n [2 - r(r+1)] \left[\frac{2 - r(r+1)}{\kappa} - \lambda_r \right] S^n(r, s)$$

(12)式の k_{ij}^n が対称になるのは(10)式を採用しているからである。(12)式より固有振動数 Ω_i と一般化座標ベクトル $\{B_j^n\}_i$ が通常の手法で計算できるので $\{B_j^n\}_i$ を(7)式に代入すると最終的に次のように固有モードが計算される。

$$w = \sum_{i=1}^N A_i^n W_i^n(\phi) \cos n\theta, \quad W_i^n(\phi) = \{B_j^n\}_i \{\bar{W}_j^n\} = \sum_{j=1}^{K_n} G_{ij}^n F_j^n(\cos\phi)$$

$$G_{ij}^n = \sum_{s=1}^N \{B_s^n\}_i \bar{F}_{F_{js}}^n \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここに $W_i^n(\phi)$ は第 i 次の固有モードであり， $A_i^n \equiv A_i^n(t)$ である。

4. 数値計算例

この近似解による計算結果の固有振動数の例を Table 1～5 に，またモードの例を Fig. 1～4 に示す。但し， n が奇数時には，半開角が 90° のとき，使用している Legendre 陪多項式が $\phi = 90^\circ$ で必ず 0 となることから境界部での重ね合わせを充分に行うことが出来ないで， 89.8° を替わりに用いている。この値は 90° 前後で厳正解に収束する。周方向展開次数が 1（逆対称モード）の近似解による固有モードと厳正解のそれを比較する（Table 1）とその差は極めて小さいことが分かる。周方向展開次数が 2 以上のもの（Table 2～5）の厳正解固有振動数は計算されておらず，比較対象が存在しないが，近似固有モードの形状（Fig. 1～4）を見る限りにおいて，かなり正確な固有モードが得られていると確信できる。また，モード図からも分かるように N 番目あるいはその近辺のモードに乱れが見られる。これは，本来 Legendre 陪多項式の無限級数和で表されるべきモードを K_N までの有限和としたための truncation error によるためである。従って，応答解析に用いようとするモードの個数を数個加えたモードまで求めて，後の数個は捨てる必要がある。

Table 1 Eigen Value Ω ($n = 1$, Fixed Support, $a/h = 100$) Exact solution (upper), Approximate solution (lower).

ϕ_0	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
30	1.041	1.208	1.657	2.409						
	1.041	1.212	1.661	2.413						
45	0.990	1.039	1.156	1.392	1.764	2.268				
	0.990	1.040	1.158	1.395	1.767	2.270				
60	0.933	0.955	1.042	1.132	1.287	1.516	1.821	2.199		
	0.933	0.956	1.043	1.134	1.288	1.518	1.823	2.201		
75	0.836	0.974	1.007	1.049	1.120	1.233	1.392	1.600	1.856	2.157
	0.836	0.975	1.007	1.050	1.121	1.233	1.393	1.601	1.857	2.160
90	0.703	0.955	0.990	1.016	1.060	1.118	1.205	1.323	1.476	1.658
	0.704	0.957	0.991	1.017	1.055	1.115	1.204	1.324	1.478	1.666
105	0.547	0.931	0.979	1.000	1.021	1.058	1.109	1.180	1.274	1.391
	0.548	0.937	0.980	1.000	1.024	1.059	1.110	1.181	1.277	1.397
120	0.389	0.903	0.967	0.989	1.007	1.029	1.061	1.105	1.164	1.239
	0.392	0.916	0.969	0.990	1.008	1.030	1.062	1.107	1.167	1.244

Table 2 Approximate Eigen Value Ω ($n = 2$, Fixed Support, $a/h = 100$)

ϕ_0	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
30	1.065	1.365	1.969	2.859						
45	0.998	1.076	1.249	1.552	1.990	2.555				
60	0.972	1.015	1.079	1.199	1.389	1.656	1.998	2.411	2.890	
75	0.946	0.992	1.026	1.081	1.172	1.307	1.490	1.722	2.001	2.326
90	0.901	0.977	1.003	1.034	1.082	1.157	1.262	1.401	1.578	1.781
105	0.896	0.967	0.991	1.012	1.041	1.083	1.144	1.227	1.334	1.466
120	0.883	0.958	0.983	1.000	1.019	1.046	1.085	1.137	1.206	1.293

Table 3 Approximate Eigen Value Ω ($n = 2$, Simply Supported, $a/h = 100$)

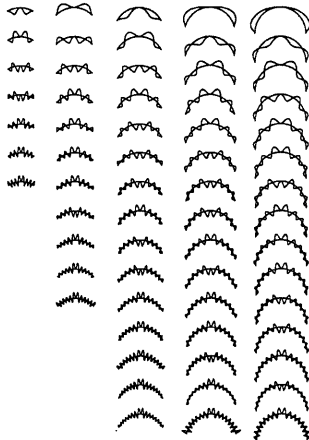
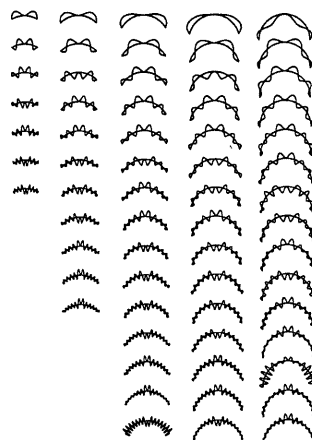
ϕ_0	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
30	1.033	1.262	1.786	2.607						
45	0.990	1.051	1.194	1.463	1.867	2.401				
60	0.966	1.006	1.060	1.163	1.335	1.582	1.905	2.300	2.763	
75	0.939	0.988	1.017	1.065	1.146	1.269	1.440	1.660	1.928	2.241
90	0.967	0.996	1.023	1.066	1.131	1.219	1.244	1.354	1.544	1.715
105	0.906	0.967	0.989	1.008	1.034	1.073	1.130	1.210	1.316	1.449
120	0.845	0.949	0.979	0.996	1.014	1.039	1.074	1.124	1.191	1.278

Table 4 Approximate Eigen Value Ω ($n = 3$, Fixed Support, $a/h = 100$).

ϕ_0	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
30	1.147	1.584	2.329							
45	1.025	1.138	1.369	1.738	2.239	2.862				
60	0.996	1.041	1.128	1.280	1.507	1.811	2.188	2.634		
75	0.981	1.009	1.050	1.121	1.233	1.391	1.598	1.854	2.158	2.510
90	0.959	0.992	1.017	1.056	1.116	1.206	1.325	1.479	1.666	1.886
105	0.953	0.983	1.002	1.026	1.061	1.113	1.184	1.279	1.399	1.544
120	0.947	0.976	0.993	1.011	1.034	1.067	1.113	1.176	1.253	1.350

 Table 5 Approximate Eigen Value Ω ($n = 3$, Simply Supported, $a/h = 100$).

ϕ_0	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th	10th
30	1.093	1.448	2.117							
45	1.014	1.102	1.300	1.633	2.102	2.695				
60	0.993	1.029	1.102	1.236	1.443	1.728	2.087	2.516		
75	0.980	1.004	1.039	1.101	1.201	1.347	1.542	1.785	2.076	2.411
90	0.982	1.007	1.040	1.093	1.171	1.281	1.424	1.601	1.811	2.056
105	0.956	0.983	1.000	1.021	1.053	1.100	1.168	1.260	1.379	1.527
120	0.942	0.973	0.990	1.006	1.027	1.057	1.099	1.156	1.231	1.326


 Fig. 1 Approximate Eigen Mode
($n = 2$, Fixed Support, $a/h = 100$)

 Fig. 2 Approximate Eigen Mode
($n = 2$, Simply Supported, $a/h = 100$)

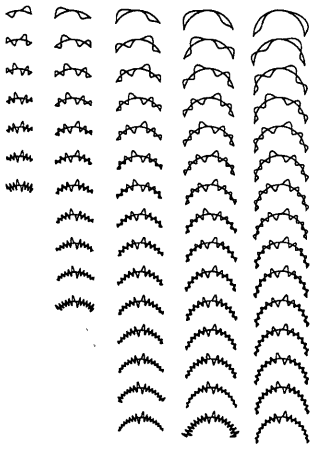


Fig. 3 Approximate Eigen Mode
($n = 3$, Fixed Support, $a/h = 100$)

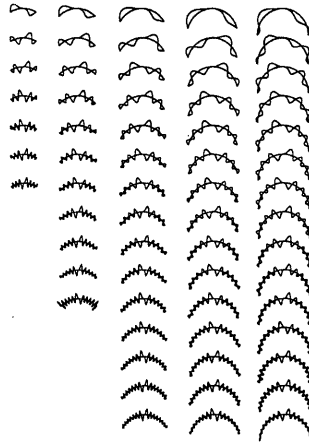


Fig. 4 Approximate Eigen Mode
($n = 3$, Simply Supported, $a/h = 100$)

5. 付 録

5.1 記 号

ϕ : 経線に沿う方向の頂点からの開角

θ : 円周方向角, t : 時間

a : 半径, h : 板厚

E : ヤング係数, ν : ポアソン比

g : 重力加速度, Ω : 一般化固有振動数

m : シェル中立面単位面積当たり質量

n : 周方向展開次数 (対称性)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$B^\circ = \frac{dB}{d\phi}, \quad B' = \frac{dB}{d\theta}, \quad \dot{B} = \frac{dB}{dt}$$

$$H_0(B) = B^{\circ\circ} + \cot\phi B^\circ + \operatorname{cosec}^2\phi B''$$

$$H_1(B) = H_0(B) + (1-\nu)B, \quad H_2(B) = H_0(B) + 2B$$

$$\mu_i = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \eta_i}$$

η_i ($i = 1 \sim 3$) は flexural 振動時には次式の根として求められる¹⁾。

$$\eta^3 + 4\eta^2 + \{4 + \kappa(1 - \Omega^2)\}\eta + \kappa\{2 - (1 - \nu)\Omega^2\} = 0$$

また,

$$\eta^4 = -\{2 + 2(1 + \nu)\Omega^2\}$$

6. 2 Legendre 陪多項式の積分

$$S^n(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_s^n(\cos\phi) P_r^n(\cos\phi) \sin\phi d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r(r+1) - s(s+1)} [(s-r)\cos\phi P_s^n P_r^n \\ - (s+n)P_{s-1}^n P_r^n + (r+n)P_s^n P_{r-1}^n]_{\phi=\phi_0} \quad (r \neq s) \\ - [P_s^n P_{r-1}^{n-1} \sin\phi]_{\phi=\phi_0} + (r+n)(r-n+1)S^{n-1}(r, r) \quad (r = s) \end{cases}$$

$$S^0(r, s) = \int_0^{\phi_0} P_s(\cos\phi) P_r(\cos\phi) \sin\phi d\phi$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{r(r+1) - s(s+1)} [(s-r)\cos\phi P_r P_s - sP_{s-1} P_r + rP_s P_{r-1}]_{\phi=\phi_0} \quad (r \neq s) \\ \frac{1}{2r+1} [1 - P_r P_s \cos\phi]_{\phi=\phi_0} - 2 \sum_{p=1}^{\lfloor r/2 \rfloor} (2r+1-4p) S^0(r, r-2p) \quad (r = s) \end{cases}$$

$$S_2(r, s) = - \int_0^{\phi_0} P_r(\cos\phi) P_s^1(\cos\phi) \sin\phi d\phi = -sS(r, s) - \sum_{p=1}^{\lfloor s/2 \rfloor} (2s+1-4p) S(r, s-2p)$$

参考文献

- 1) 横尾, 松岡, 國枝: 球殻振動時の一般解. その1, その2, 日本建築学会論文報告集 その1(83号), その2(84号), 1963.
- 2) 國枝治郎: 球形シェルの軸対称自由振動時の近似解, 京都大学防災研究所年報 第26号B-1, 1983.
- 2') Kunieda, H.: Flexural Axisymmetric Free Vibrations of a Spherical Dome: Exact Results and Approximate Solutions J. Sound and Vibration 92, 1984.
- 3) 國枝治郎: 上下地震動を受ける球形ドームの応答解析, 京都大学防災研究所年報 第26号B-1, 1983.
- 3') Kunieda, H.: Response of Spherical Domes Subjected to Vertical Earthquake, Proc. IASS Symp., Japan, 1986.
- 4) 國枝治郎: 球殻自由振動時固有振動数 (n = 1 の場合, 脚部固定, ピン支持に対して), 日本建築学会論文報告集 号外, 1966.
- 5) Kunieda, H.: Solutions of Free Vibrations of Spherical Shells.-Part3, 日本建築学会論文報告集 325号, 1966.
- 6) 諸岡繁洋, 國枝治郎, 韓 相乙: 球形シェルの逆対称振動近似固有モード作成及び応答解析への適用, 日本建築学会構造系論文集 466号, 79-85, 1994年12月.