

微分方程式の数値解法と

Liapunov 函数について

大阪府大 エ 宇本 浩

同志社大 エ 井村 英 夫

§ 1. 緒言

1965年秋の数学会で、常微分方程式の数値解法における種々の問題が提起された。(清水辰次郎:「常微分方程式の数値解法における数学的諸問題」) その中で、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0$$

という微分方程式の数値解法において、項の間に著しい大小の差があるときの刻み巾が問題にされた。特に

$$\frac{d^2x}{dt^2} + h(x^2-1) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$t=0 \text{ のとき } x=2, \frac{dx}{dt}=0$$

という van der Pol の方程式の解は $x=2$ より $x=1$ (又は $x=-2$ より $x=-1$) までの水平部分で t は約 $h(\frac{3}{2} - \log 2)$ 変化し、 $x=1$ から $x=-2$ (又は $x=-1$ から $x=2$) までの垂直部分で t の変化は殆んど 0 である。したがって、数値解法において、刻み巾を十分にしないと垂直部分の計算は出

来ない。しかし、垂直部分の計算に必要なだけ刻み巾を十分小にすれば、 $\epsilon = 100$ というような大きな場合、水平部分の計算に時間がかかりすぎる。したがって、刻み巾を場所により変えねばならない必要が生ずることを指摘された。

この刻み巾を変化させる必要は $2 \frac{dx}{dt} = x^3$, $t=0$ のとき $x=1$ とか, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}$, $t=0$ のとき $x=1$ でも生ずる。これらの方程式の真の解はそれぞれ $x=(1-t)^{-\frac{1}{2}}$, $x=(1-t)^{\frac{1}{2}}$ であるが、刻み巾によつては t のより大きな値に対しても計算は続行される。そして、この刻み巾を場所により変える必要性の原因は方程式の特異点によるのではなく、方程式の非線形性によるものであるから、あらかじめ、どこで刻み巾を変えるべきかは知ることは出来ない。

刻み巾を変える方法として、

(1) 刻み巾を h とし、 t_n における値より t_n+h における値を計算し、 $t_n+\frac{h}{2}$, $t_n+h-\frac{h}{2}$ のおのおのにおける値に差が生ずるか否かを検討して、刻み巾を変える。(清水辰次郎：前記の講演の予稿集)

(2) 反復型の公式で、打ち切り誤差の程度を修正値より予測値を差引いた値によつて判定し、刻み巾を半分又は倍にする。(高田勝：「van der Pol の式の数値積分」, 森口繁一他：「常微分方程式の数値解法における難問対策へのある試み」, 其に

第8回プログラミング・シンポジウム報告集(1967))

が考えられ、共に解が得られている。

ここで、刻み巾を変更する一つの方法として、Liapunovの second method を利用することを考える。

§2. Liapunov の second method

A. M. Liapunov は微分方程式の解の安定性の問題の研究において、いわゆる Liapunov の second method とよばれる方法を用いた。これは今日では安定性問題のみならず、微分方程式の解の諸性質の研究において重要な方法になっている。

Liapunov は連立微分方程式の解、すなわち Vector 関数の性質をしるるに際し、Liapunov 関数とよばれる実数値をとる一つの関数の性質を利用した。そして、解のどのような性質をしるるかに応じて、Liapunov 関数に種々の性質が假定される。

連立微分方程式を

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2.1)$$

とする。ここで、 x は n -vector であり、 $f(t, x)$ は (t, x) 空間で連続な n -vector 関数とする。この方程式に対し、ある開集合 S で定義された一つの連続関数 $V(t, x)$ を考え、 $V(t, x)$ は x に関して局所的に Lipschitz の条件をみたすものとする。この $V(t, x)$ に対し、関数 $\dot{V}(t, x)$ を次の

式で定義する。

$$\dot{V}(t, x) = \overline{\lim_{h \rightarrow 0^+}} \frac{1}{h} \{ V(t+h, x+h f(t, x)) - V(t, x) \}$$

$V(t, x)$ が t と x とに関し、連続な偏導関数をもつとき、

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(t, x)$$

である。ここで、 $\cdot$ は scalar 積を示す。

$x(t)$ を S の中にある (2.1) の解とする。そのとき、 $V(t, x(t))$ は t に関し微分可能で

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t)) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \cdot f(t, x(t)) \quad (2.2)$$

である。微分方程式の解の諸性質をしるべしめるのに $V(t, x)$, $\dot{V}(t, x)$ の性質よりしるべしめるのが Liapunov の second method であり、その函数 $V(t, x)$ を Liapunov 函数という。

§3 数値解法と Liapunov 函数

連立微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (3.1)$$

の $t = t_0$ のとき $x = x_0$ という初期条件の下での数値解法を考える。ここで、 x は vector, $f(x)$ は連続な vector 函数とする。

刻み巾を決定する問題を考えているのであるから、数値解法のために使う公式の精度、収束とか丸めの誤差の問題にはふれないことにする。すなわち、 $t = t_n$ に対する x の値は真の値として求められたとし、次の $t = t_{n+1}$ に対する x の値を

考えている精度以上の近似値として求めるための刻み中の決定について考える。

x_n を $t=t_n$ に対し求めた真の値とすれば

$$x = x_n + f(x_n)(t - t_n)$$

は (t_n, x_n) を通る直線を示し、一つの正数 h に対し、

$$\overline{x_{n+1}} = x_n + f(x_n)h$$

は $t_{n+1} = t_n + h$ に対する x_{n+1} (真の値) の近似値である。

ここで、 $V(x)$ を一つの開集合 S で定義された連続関数とし、局所的に Lipschitz 条件をみたすとする。考えている初期条件の下での (3.1) の解 $x(t)$ が S に止まっているとすれば、小さな正の数 h に対し、 $\overline{U} \subset S$, $x_{n+1} \in U$ 且つ $\overline{x_{n+1}} \in U$ であるような x_n の近傍 U が存在する。

そのとき、

$$V(x_{n+1}) - V(\overline{x_{n+1}}) \leq L \|x_{n+1} - \overline{x_{n+1}}\| \quad (3.2)$$

である。ここで、 L は x に関する $\overline{U}$ における $V(x)$ の Lipschitz の定数を示し、 $\| \cdot \|$ は Euclid norm を示す。

いま、数値解法を考えているのであるから、 $f(x)$, $V(x)$ の微分可能性を必要だけ假定しておけば、 $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d^2V}{dt^2}$, $\frac{d^3V}{dt^3}$ 等が (2.2) の関係式を用いて、計算出来る。

一方、 $x(t)$ に関し $t=t_n$ の近傍で

$$V(x) = V(x_n) + \frac{dV}{dt}(x_n)(t - t_n) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dt^2}(x_n)(t - t_n)^2$$

$$+ \frac{1}{6} \frac{d^3 V}{dt^3}(x(t_n + \theta h))(t - t_n)^3 \quad (0 < \theta < 1)$$

である。

したがって、

$$V(x_{n+1}) = V(x_n) + \frac{dV}{dt}(x_n)h + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dt^2}(x_n)h^2 + O(h^3)$$

が成立するから、 $t = t_n$ における x_n により、

$$V(x_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1})$$

は h^2 の項まで計算可能である。

(3.2) より、 $|V(x_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1})|$ が大きければ、 $\|x_{n+1} - \bar{x}_{n+1}\|$ は大きくなる。したがって、 $\bar{x}_{n+1}$ が真の値に近き値になるためには

$$V(x_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1})$$

が十分小であることが希ましい。この値が大きくなるときは、 $\bar{x}_{n+1}$ に大きな誤差が入り、真の解より遠ざかっている。

したがって、刻み中んを定める判定の不平等式として、

$$|V(x_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1})| \leq \varepsilon_L \quad (3.3)$$

をうる。ここで、 ε_L は L と必要とする解の精度に関係する小さな正数である。

一旦、 h が (3.3) をみたすように定まった後は、 x_{n+1} を求めるためには必ずしも Euler 法による必要はなく、Runge-kutta 法等他の適当な公式に依ってもよい。すなわち、今問題にしているのは x_n と解っている方程式の形により、 h を

定めることであり、次の x_{n+1} を数値解として何によって求めるかは別問題である。

§4. van der Pol の方程式の数値解法

van der Pol の方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k(x^2-1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

を初期条件 $t=0$ のとき, $x=2$, $\frac{dx}{dt}=0$ で考える。

これは

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - k\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases} \quad (4.1)$$

$$t=0 \text{ のとき, } x=2, \quad y = -\frac{2}{3}k$$

と等値である。

これに対し,

$$\begin{cases} \overline{x_{n+1}} = x_n - \{y_n + k\left(\frac{x_n^3}{3} - x_n\right)\}h \\ \overline{y_{n+1}} = y_n + x_n h \end{cases}$$

である。

そこで、(4.1) に対し、 $V(x, y)$ を次の如く定義する。

$$V(x, y) = x + y \quad (4.2)$$

このとき、(4.1), (4.2) に対し、(2.2) より

$$\frac{dV}{dt} = -y - k\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + x$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -x + \{k(x^2-1) - 1\}\{y + k\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\}$$

をうる。

一方,

$$V(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = x_n - \{y_n + R(\frac{x_n^3}{3} - x_n)\}h + y_n + x_n h$$

であるから,

$$\begin{aligned} & V(x_{n+1}, y_{n+1}) - V(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} [-x_n + \{R(x_n^2 - 1) - 1\} \{y_n + R(\frac{x_n^3}{3} - x_n)\}] h^2 + O(h^3) \end{aligned}$$

である。

考えている $V(x+y)$ に対する Lipschitz の定数は 1 であるから、刻み巾を定める判定の不等式として、

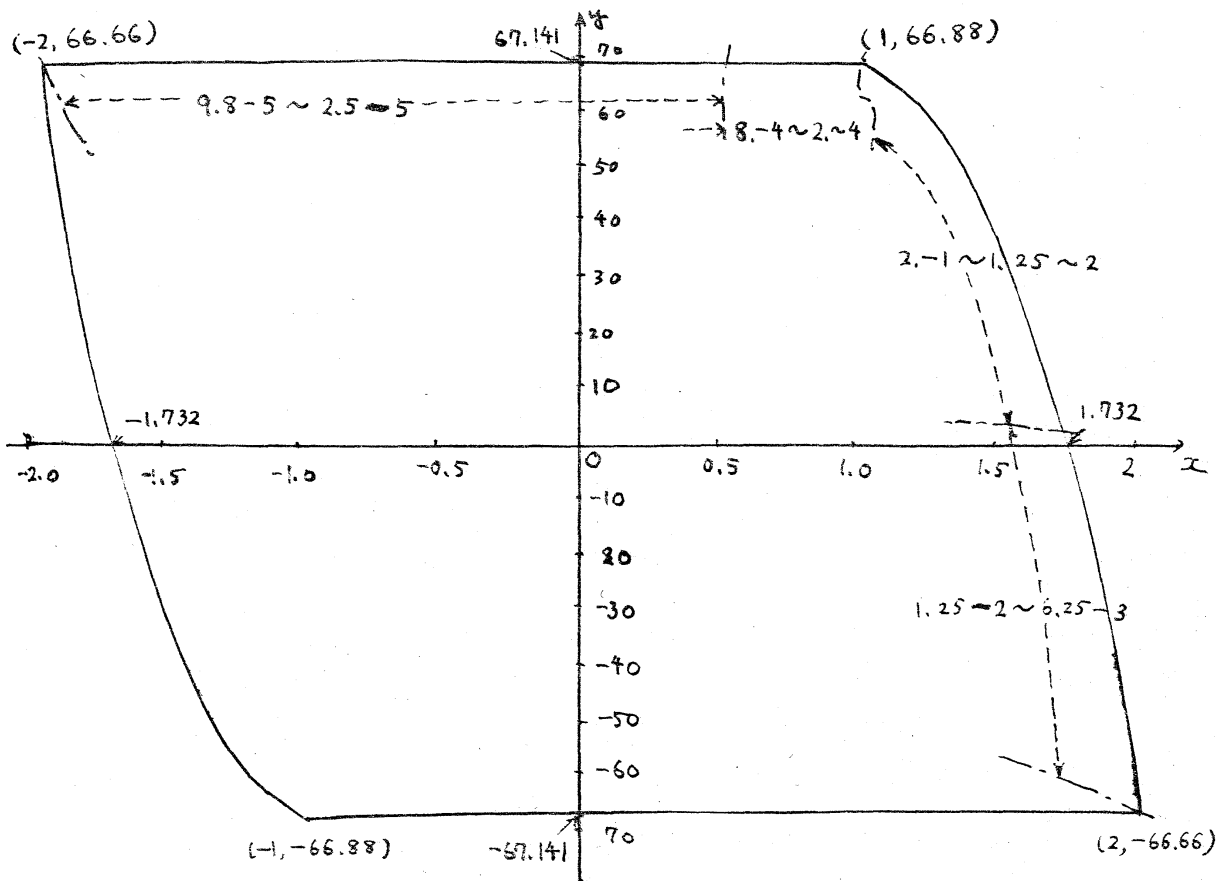
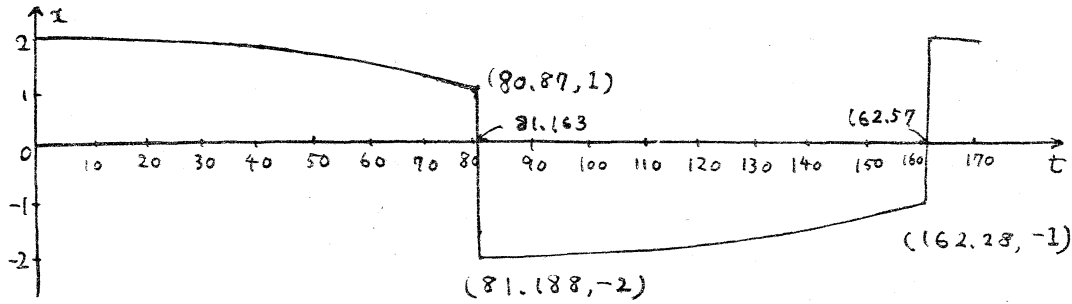
$$|\frac{1}{2} [-x_n + \{R(x_n^2 - 1) - 1\} \{y_n + R(\frac{x_n^3}{3} - x_n)\}] h^2| < \varepsilon \quad (4.3)$$

をうる。ここで、 ε は求めている解の精度によって決定する定数で、Lipschitz の定数には関係しない。

実際に計算するとき、 $t=0$ のとき、 $\lambda=2$ 、 $y=-\frac{2}{3}R$ とし、 $h=0.1$ より考えて、(4.3) をみたさないときは h をみたくまで半減してゆき、みたすんに対し、適当な数値解法の公式を利用して、次の x 、 y の値を出し、その後 h を 2 倍にして同じ操作を行って次々に x 、 y の値を求めてゆく。そして、 $2 \frac{dx}{dt} = x^3$ のような方程式も考慮しておくために、 h がある値より小さくなるときは計算機を止めるようにプログラムを作っておく。

この方針の下で、 $R=100$ 、 $\varepsilon=0.00001$ に対し、H I P A C 103 で行った実験結果を次の図で示す。出力は

直前の印刷値に対し、 x が0.01、 y が1変化のいずれかの
 時に行なわせる。印刷時間を含め1周期の計算に要した時間
 は1時間2分である。尚、数値解法には Euler 法を用いる。



図で点線間の数はんの大きさを示している。ただし、 $2.5-5$
 等は 2.5×10^{-5} を表わすものとする。

§ 5. 他の例

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x^3$, $t=0$ のとき $x=1$ に対し, $V(x)=x$ ととれば, h を定める式は

$$\frac{3}{8}|x^5|h^2 < \varepsilon$$

である。 $\varepsilon = 0.00001$ とし, 数値解法に対しては Runge-Kutta 法を用いて計算すれば, 最初 $h=0.00312$ で計算してゆき, $t=0.9999$ に対し, $h=5 \times 10^{-8}$ で $x=100.027$ をうる。(このとき解は $x = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ であるから, $t=0.9999$ に対しては $x=100$ である。) その後 h は減少してゆき, 計算機は h の制限以下になった所で停止した。

又, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2x}$, $t=0$ のとき $x=1$ に対しても, $V(x)=x$ とすれば, h を定める式は

$$\frac{1}{8}|\frac{1}{x^3}|h^2 < \varepsilon$$

である。 ε , 数値解法の公式は前例と同じにして, 計算すれば, 最初 $h=0.00625$ で計算をしてゆき, $t=0.999902$ に対して, $h=6.1 \times 10^{-6}$ で $x=0.00988$ をうる。(このとき解は $x = \sqrt{1-t}$ であるから, $t=0.999902$ に対し, $x=0.00988$ である。) その後, h の制限のため, 計算機は停止する。

尚, いづれの場合も h が 10^{-10} より小になれば, 計算機を停止させるようにプログラムを組んだ。