

2次元乱流の数値モデル

東京電機大 福湯章夫

§ 1. 序

$\partial\Omega$ を境界とする領域 Ω を占める流体の乱流を考える。
流体の運動は非圧縮の Navier-Stokes 方程式,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \nabla^2 u, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (2)$$

で記述されるものとする。(1), (2)の解は, 境界条件

$$u(x, t) |_{\partial\Omega} = a(x, t), \quad (3)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (4)$$

のもとで一意的に決まるものとする。 a, u_0 は与えられた関数である。関数空間 $H(\Omega)$ を

$$H(\Omega) = \{ u(x) \mid \operatorname{div} u(x) = 0, u|_{\partial\Omega} = a, x \in \Omega \}$$

で定義し, 適当な座標軸を決めて $H(\Omega)$ を Ω 中の流体運動の相空間と考える。 $H(\Omega)$ の一点は連続の式と境界条件を満たす一つの流れの場を与えるから, (1) ~ (4) の解, すなわち

一つの realization $u_i(w, t)$ は, $H(\Omega)$ の中の一つのトラジェクトリで表わされる。

乱流問題に現われる平均で最も一般性のあるのは, 多数の realization $u_i(w, t)$ についての平均

$$\langle f(u) \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u_i), \quad (5)$$

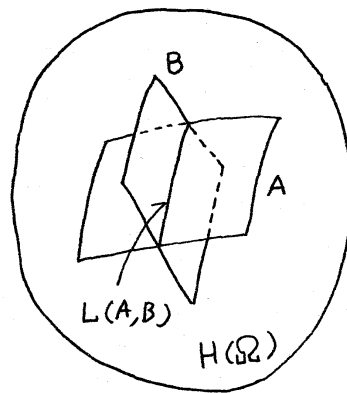
あるいはこれを一般化して, 確率密度 $P(u, t)$ についての平均

$$\langle f(u) \rangle = \int P(u) f(u) du \quad (6)$$

である。特にある時刻 $t = t$ に注目したときの平均を $\langle \dots \rangle_t$ と書くことにする。一般に $P(u)$ を決定する方法, あるいはどのような realization の集団が最も良く現実の乱流現象を表わすかを知る方法は知られていないが, この論文では, 集団平均 $\langle \dots \rangle_t$ を

$$\langle \dots \rangle_t \simeq \langle \dots \rangle_{A(t), B(t), \dots}$$

で近似できるものと仮定する。この $\langle \dots \rangle_{A, B, \dots}$ は相空間の中でパラメータ $A, B, \dots$ の値を指定して得られる超曲面の交線 $L(A, B, \dots)$ 上での平均値を意味するものとする。 $A, B, \dots$ としてどんな物理量を選んだらよいであろうか。



Ω が 2 次元領域であるとする。よく知られているように、エネルギー

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 d\Omega, \quad (7)$$

エンストロピー

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \omega^2 d\Omega, \quad \omega = \text{rot } u, \quad (8)$$

は 2 次元 Navier-Stokes 方程式の非線形項によって保存される。粘性流に対しては

$$\frac{d}{dt} E = -2\nu S, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} S = -2\nu P, \quad (10)$$

ここに P は

$$P = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \omega v^2 \omega d\Omega \quad (11)$$

で与えられる。 P をパリンストロピーと呼ぶことにする。(9) から $2\nu S$ はエネルギー減衰率を表わすことがわかる。一樣等方性乱流については、(11) を部分積分すると

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \omega)^2 d\Omega > 0 \quad (12)$$

となるので、(10) から S は常に減衰する。初期に S に有限の値を与えるものとすれば、 $\nu \rightarrow 0$ で $\frac{dE}{dt} \rightarrow 0$ となる。これが 2 次元乱流と 3 次元乱流の本質的な相違である。

ここで P の持つ幾何学的な意味を考えてみよう。境界の影響が無視できるものとすると、 P は (12) で与えられるから、 P は渦度分布の平均勾配、あるいは等渦度線の長さの

つが目安と見なすことができます。2次元流の非粘性渦度方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = 0 \quad (13)$$

で、これから各流体粒子の渦度は一定に保たれることがわかる。そのために ω が保存量になるわけであるが、対流項によるかきませの結果、直観的には初期に滑らかな渦度分布が与えられたとしても、時間と共に複雑に入り組んだ渦度分布に発展することが予想される。E, ω は非粘性の運動の定数だから、E, ω の値からはこのかきませの効果を見分けることができず、 P がこの効果を識別するパラメーターと見なすことができます。たゞ対流項のために P がいつでも増大することを一般的に示すことはできない。非粘性のNavier-Stokes方程式は時間変換に対して不変で、ある瞬間ある速度場 u に対して P が増大するものとすれば、同じ時刻 $-u$ なる速度場に対しては P は減少する。しかも u と $-u$ は、ある瞬間のみに注目すれば実現される速度場としては同じ資格を持つであろう。 P が時間と共に増大するというのは、長時間にわたっての平均としての意味である。この事情を一次元のEuler方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

について考えてみよう。初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ のもとで(14)の解は

$$u = f(u - xt) \quad (15)$$

で与えられる。(14)の解で $u=0$ の点はいつまでも $u=0$ にとどまるから、一般性を失わず $f(\pm a) = 0$ とし $-a \leq x \leq a$ の範囲だけを考えることにする。Pを

$$P = \int_{-a}^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (16)$$

で定義すると(15)から

$$P(t) = \int_{-a}^a \left[\{f'(x)\}^2 / \{1 + t f'(x)\} \right] dx \quad (17)$$

を得る。 $t_0 = -1 / \{ \min_{-a \leq x \leq a} f'(x) \}$ とすれば $0 \leq t < t_0$ で(17)は意味を持つ。更に(14), (16)から一般に

$$\frac{dP}{dt} = - \int_{-a}^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 dx \quad (18)$$

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = 2 \int_{-a}^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx \quad (19)$$

が示せる。(19)から $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ でないかぎり $\frac{d^2 P}{dt^2} > 0$ だから、Pの時間変化は下に凸であることがわかる。特に $t=0$ では

$$\frac{dP}{dt} = - \int_{-a}^a \{f'(x)\}^3 dx \quad (20)$$

で、ある初期条件 $f(x)$ に対して $\frac{dP}{dt} > 0$ とすると、初期条件 $g(x) = -f(x)$, 更に $g(x) = f(-x)$ に対しても $\frac{dP}{dt} < 0$ となる。ところが(17)から $t \rightarrow t_0 - 0$ で、適当に滑らかな任意の初期条件に対していつでも $P \rightarrow +\infty$ であることが示せる。すなわち $t=0$ で $\frac{d}{dt} \langle P \rangle = 0$ の集団をとっても、あるいはより一般に $t=0$ でどんな集団を取っても、その集団を初期値とする realization の集団については、 $t < \min\{t_0\}$ 内で充分時間が

たてば $\langle P \rangle$ は必ず増大する。二次元流のハリンストロピー、三次元流のエントロピーについて同様の一般的結果は得られないが、準正規分布近似を使えば、二次元流については P が指数的に増大すること、三次元流では S が有限時間内に発散することが知られている。

§ 2. 数値モデル

そこで集団平均を指定するパラメーター $A, B, \dots$ とし、各時刻に於ける $\langle E \rangle, \langle S \rangle, \langle P \rangle$ を採用する。 $\langle E \rangle, \langle S \rangle, \langle P \rangle$ に対する方程式は、Navier-Stokes 方程式から

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle E \rangle = -2\nu \langle S \rangle, & (21) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle S \rangle = -2\nu \langle P \rangle, & (22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle P \rangle = \langle F \rangle - 2\nu \langle G \rangle & (23) \end{cases}$$

である。ここに F, G は

$$F = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ (\omega \cdot \nabla \omega) \nabla^2 \omega + \omega \nabla^2 (\omega \cdot \nabla \omega) \} d\Omega \quad (24)$$

$$G = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \{ (\nabla^2 \omega)^2 + \omega \nabla^2 (\nabla^2 \omega) \} d\Omega \quad (25)$$

で与えられる。(21), (22), (23) に於いて集団平均 $\langle \rangle$ は $\langle \rangle_{E,S,P}$ の意味である。但し実際の計算に当っては、交絡 $L(E, S, P)$ 上での平均を $L(E, S, P)$ 上にランダムに捨った多数の標本点についての平均で近似する。 $t=0$ で $E = E_0, S = S_0, P = P_0$ が与えられたとすると、 $L(E_0, S_0, P_0)$ 上に捨

った標本点によって (21), (22), (23) の右辺を計算する。

$L(E_0, S_0, P_0)$ 上の一つの標本点は, 領域品で連続の式及び境界条件を満たし, カッエネルギー, エントロピー, パリニストロピーの値がそれぞれ E_0, S_0, P_0 である一つの場合を表わすから, この条件を満たす多数の場合から速度の関数 $f(u)$ の平均 $\langle f(u) \rangle$ が計算できるわけである。以下同様にある時刻 $t = \tau$ での $\langle E \rangle, \langle S \rangle, \langle P \rangle$ の値から $L(\langle E \rangle, \langle S \rangle, \langle P \rangle)$ 上の平均として (21), (22), (23) の右辺を計算し,

$$\langle E(\tau + \Delta t) \rangle = \langle E(\tau) \rangle + \Delta t \cdot \frac{d}{dt} \langle E(\tau) \rangle$$

等によって時刻 $t = \tau + \Delta t$ での $\langle E(\tau + \Delta t) \rangle, \langle S(\tau + \Delta t) \rangle, \langle P(\tau + \Delta t) \rangle$ を計算する。

§ 3. 一様等方性乱流

前節で与えたモデルをえ次えの一様等方性乱流に応用してみよう。(23) の右辺 $\langle F \rangle$ は, 非線形項による $\langle P \rangle$ の増大の効果を表わすが, 前節で考察した方程式の性質のため, L 上で標本点が一様に分布するように選ばれているものとするとき $\langle F \rangle_{E, S, P} \equiv 0$ になってしまう。そこで非線形項のかきまぜの効果を取り入れるためには, $\langle F \rangle$ に対して適当なモデル化が必要である。いろいろなモデル化が考えられるが, ここでは直観的に非線形項は流れを非平衡状態に近づけ

る作用を持つと考えて

$$\langle F \rangle = K(P_{eq} - \langle P \rangle)$$

で近似する。 P_{eq} は Kraichnan に よって与えられた非粘性熱平衡状態

$$E_{eq}(k) = \frac{\pi k}{2(\alpha + \beta k^2)} \quad (26)$$

に与ける P の値とする。 α, β は E, S 及び ν を考える波数領域の上限 k_{max} , 下限 k_{min} の関数として与えられる。一様等粘性乱流では, P はエネルギースペクトルを使って

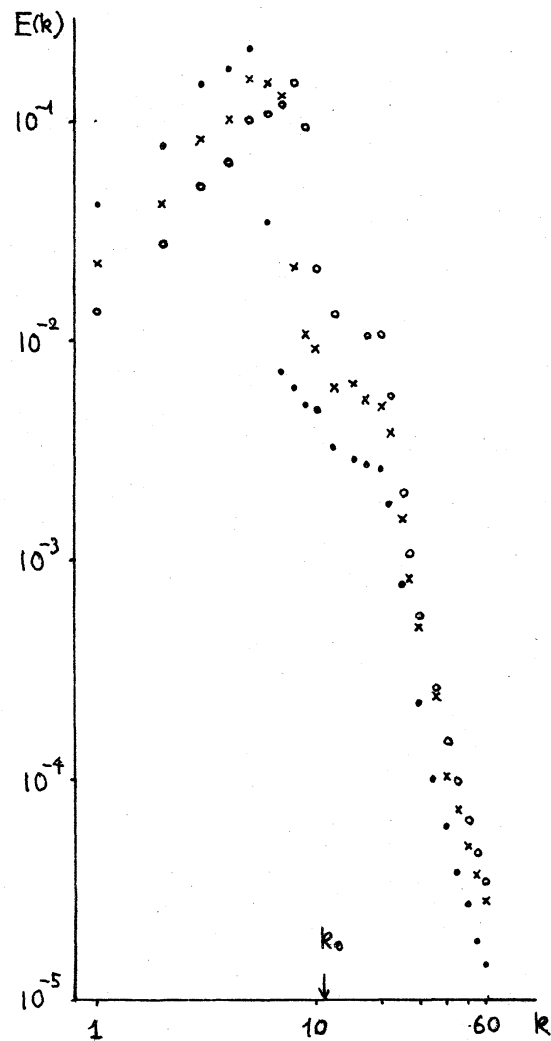
$$P = \int_0^\infty k^4 E(k) dk$$

で表わさるので

$$P_{eq} = \frac{\pi}{8\beta} (k_{max}^4 - k_{min}^4) - \frac{\pi\alpha}{4\beta^2} (k_{max}^2 - k_{min}^2) + \frac{\pi\alpha^2}{4\beta^3} \ln\{(\alpha + \beta k_{max}^2)/(\alpha + \beta k_{min}^2)\}$$

となる。 $1/K$ は緩和時間に相当するが, ここでは外部パラメータとして与えざるを得ない。

図 1 に計算例として $\nu = 0.002$, $k_{min} = 1$, $k_{max} = 60$ で, $K = 1$ としたときのエネルギースペクトルの時間変化を示す。初期条件は $E_0 = 1$, $S_0 = 1000$, $P_0 = 1.05 \times 10^6$ で, このとき初期エネルギースペクトルは $k_0 = 11$ 付近にほぼ 8 関数的に鋭いピークを持つ。2次元乱流では, エンストロフィーも非粘性の運動の定数であるため, 高波数領域へのエネルギーの流れに伴って低波数領域へのエネルギーの流入がある。この



t	E	S	P
0	1	1×10^3	1.05×10^6
0.3	0.89	0.73	2.62
0.6	0.82	0.45	1.79
1.0	0.76	0.24	0.92

図1. エネルギー・スペクトル

計算例でも明らかに時間と共に低波数領域の励起が見られる。2次元乱流では、3次元乱流のコルモゴロフのスペクトルに対応して、 k^{-3} 領域が存在すると考えられている。図1でも $40 \leq k \leq 60$ の範囲にはほぼ準定常と見られる領域があるが、 k^{-3} よりはむしろ k^{-4} に近いようである。これはレイノルズ数

が充分高くない、又取り入れている波数領域が不足しているためかも知れない。又 P/S から決まる波数 k_c 附近で折れ曲がりが見られ、 $k < k_c$ で一定の構造を持つような領域が見られるが、その性質はあまり明らかではない。

§ 4. 平行平板間の二次元乱流に対する定式化

§ 2 で提案した方法を、平行平板間の二次元ポアズイユ乱流に適用する。基本領域 Ω としては、 $-l \leq x \leq l, -1 \leq y \leq 1$ の矩形領域を取る。

問題は、粘性率 ν の流体に一定の圧力差

$$\omega = p(x=-l) - p(x=l) \quad (27)$$

を加えたときの流れを求めることである。この場合統計集団を指定するパラメータとしては、 E, S, P 以外に平板間の流量 Q も考えに入れなければならない。すると (21), (22), (23) に対応して

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \theta \rangle &= \frac{\omega}{2} + \langle \tau \rangle \end{aligned} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle E \rangle &= \omega \langle \theta \rangle - 2\nu \langle S \rangle \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle S \rangle &= -2\nu \langle P \rangle \end{aligned} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle P \rangle &= \langle F \rangle - 2\nu \langle G \rangle \end{aligned} \right. \quad (31)$$

が基本方程式系である。ここに $\tau = 2\nu \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_{y=1}$ である。この場合の平均 $\langle \rangle$ は $\langle \rangle_{\theta, E, S, P}$ の意味とする。但し圧力差が一

定の ω ということからもう一つ条件が加わる。壁の上では

$$\nabla P|_{y=\pm 1} = -2\nabla^2 u|_{y=\pm 1} \quad (32)$$

が成り立つが、これを x 方向に平均して

$$\omega = -2\nu \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx|_{y=\pm 1} \quad (33)$$

を得る。よって平均を取るときの場合、(33) を満たすように選ぶ ω とする。

この問題では、条件 (33) のもとで方程式系 (28) ~ (31) の定常解を求めることが主目的となる。特にホワズイユ流

$$u_p(y) = \frac{\omega}{4\nu} (1-y^2) \quad (34)$$

に対しては

$$\tau = -\frac{\omega}{\epsilon}, \quad Q = \frac{\omega}{3\nu}, \quad S = \frac{\omega^2}{8\nu^2}, \quad P = F = G = 0$$

となり、(28) ~ (31) の一つの定常解となる。Navier-Stokes 方程式の単独の解では、(34) 以外に (28) ~ (31) の定常解は存在しないが、集団平均として (28) ~ (31) の右辺が 0 になるような統計集団が求めらるべきである。この場合にも定常状態は ω の値にかかわらず存在するであろうから

$$\langle P \rangle = 0$$

となるが、(31) についてはホワズイユ流と違って

$$\langle F \rangle = 2\nu \langle G \rangle \neq 0$$

となるであろう。

さて実際の計算にあたっては、相空間 $H(\Omega)$ を具体的に

に構成しなけければならない。そこで速度場 $u(x, y)$ を

$$u(x, y) = U(y) \hat{e} + u'(x, y) \quad (35)$$

に分解する。 $\hat{e}$ は x 方向の単位ベクトルである。平行成分 $U(y)$ は x 軸に関して対称で

$$Q = \int_{-1}^1 u_x dy = \int_{-1}^1 U dy$$

を満たすように決めるものとする。ここでは平行成分 $U(y, t)$ を

$$U(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \phi_n(y), \quad \phi_n(y) = 1 - y^{2n} \quad (36)$$

で展開する。乱流の部分 $u'(x, y, t)$ は、流れの関数 $\psi(x, y, t)$ を導入して

$$\psi(x, y, t) = \sum_{\alpha=1}^4 \sum_N \beta_{\alpha}^N(t) \psi_{\alpha}^N(x, y) \quad (37)$$

とする。 $u'_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $u'_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ である。 N は整数の対 (n, m) $n, m = 1, 2, \dots$ を意味するとし、更に (n, m) を適当に順に並べた番号も表わすとする。 $\psi_{\alpha}^N(x, y)$ は次のように定義する。

$$\begin{cases} \psi_1^N = \cos(k_n x) C_m(y) \\ \psi_2^N = \cos(k_n x) S_m(y) \\ \psi_3^N = \sin(k_n x) C_m(y) \\ \psi_4^N = \sin(k_n x) S_m(y) \end{cases} \quad (38)$$

ここに $k_n = \frac{n}{2} \pi$, $n \geq 1$ である。 $C_m(y)$, $S_m(y)$ は Chandrasekhar-Reid 関数で、それぞれ次式で定義される。

$$C_m(y) = \cosh \lambda_m y / \cosh \lambda_m - \cos \lambda_m y / \cos \lambda_m$$

$$S_m(y) = \sinh \mu_m y / \sinh \mu_m - \sin \mu_m y / \sin \mu_m$$

但し λ_m, μ_m はそれぞれ $\tanh \lambda + \tan \lambda = 0$, $\coth \mu - \cot \mu = 0$ の m 番目の正値実数解とする。 $C_m(y)$, $S_m(y)$ は次のような性質を持つ, すなわち

$$(i) \quad C_m(\pm 1) = C'_m(\pm 1) = S_m(\pm 1) = S'_m(\pm 1) = 0$$

$$(ii) \quad \int_{-1}^1 C_m(y) C_n(y) dy = \int_{-1}^1 S_m(y) S_n(y) dy = \delta_{mn}$$

$$\int_{-1}^1 C_m(y) S_n(y) dy = 0$$

$$(iii) \quad C_m''''(y) = \lambda_m^4 C_m(y), \quad S_m''''(y) = \mu_m^4 S_m(y)$$

(i) の性質のため (38) で定義した流れの関数は, 境界上で粘着の条件を満たす。 (A_m, B_m^N) を座標とする空間を考えると, この空間内の一点は連続の式及び境界上での粘着の条件を満たす一つの流れの場に対応する。そこでこの空間を相空間 $H(Q)$ として採用すればよい。具体的計算, 特に非線形項 $\langle F \rangle$ をどのように取扱うかは別の機会に譲る。