

解析空間の blowing down について

京大 教研 藤本 明

X を analytic space, A を X の subspace, $f: A \rightarrow \bar{A}$ を別の analytic space $\bar{A}$ への proper surjective morphism とする。この時

問題: $\bar{A}$ を subspace として含む analytic space $\bar{X}$ と proper surjective morphism $\tilde{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{A}$ が存在して、1) $\tilde{f}(A) = \bar{A}$ かつ $\tilde{f}|_A = f$, 及び 2) $\tilde{f}|_{\bar{X}-A}$ は isomorphic, とする 2 つの条件が満たされるための (imbedding $A \hookrightarrow X$ に関する) 条件を求めよ。我々の主張する定理は、

定理: $A \subset X$ を locally principal とし、次の 2 つを仮定する。

- 1) $N_{A/X}^*$ は f -ample, 2) $R^i f_* N_{A/X}^{*\otimes \nu} = 0$ for every $\nu > 0$.

この時上の問題の解 $\tilde{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{A}$ が同型を除き一意に存在する。

ここで $N_{A/X}^*$ は A の X 内における conormal sheaf.

定理は $A \subset X$ が locally a complete intersection の場合でも 1) をしかるべき条件でおきかえれば成立する。証明は論文として発表する予定なので、ここでは条件 1) 2) について blowing down の一般論と関連させながら述べてみた。まず 1) は negativity condition

(2) L は projectivity condition と呼ぶべきであらう。一言で言えば、 f の各 fibre 上に A の X 内での normal bundle を制限した時、これが negative だ、という意味である。この時得られる morphism $\tilde{f}: X \rightarrow \bar{X}$ は projective morphism i.e. $\bar{X}$ の適当な ideal を center とする blowing up によって得られる。Bimeromorphic morphism は必ずしも ideal の blowing up ではないから、条件 1) は blowing down の必要条件ではない。^{定理 6.2} 特: $\dim \bar{A} = 0$ 、つまり $\bar{A}$ が点の場合は、2) は自動的に成立し、normal bundle が negative なら point は contractible であるという Grauert [2] の定理を与える。もともと Grauert の証明法は函数論的なのである。^加大雑把に言う方をすれば、normal bundle が negative $\Leftrightarrow$ normal bundle の 0-section として A は contractible $\Rightarrow$ 0-section の近傍は強擬凸、実際に強多重共調和函数 ψ on $N_{A/X}$ 、 C^∞ on $N_{A/X}$ $\Rightarrow A \subset X$ の近傍 U に $\psi|_U$ 、 C^∞ on U の強多重共調和 on $U-K$ 、 K コンパクト in U 。ここまではもちろん最後の $\Rightarrow$ が問題である。Grauert はここで、強擬凸 $\Rightarrow$ 正則凸 という Levi の問題の解と、正則凸 X と極大コンパクト A に対し、 A の point への contraction が存在する という Remmert の環元定理を前提としてゐる。実際 $A \subset X$ の point contraction と、強擬凸 n.b.d $A \subset U \subset X$ の存在は同値である。2, function theoretic の意味での point contraction の特徴づけを与えてゐる。従つて $\dim \bar{A} > 0$ の場合 (または relative contraction の場合 ~~と~~ と言ふ)。1) にかわる条件として、何か強擬凸 n.b.d の存在に

対応する条件 1) とは: " $\forall \bar{a} \in \bar{A}$ に対し $\exists U_{\bar{a}} \supset f^{-1}(\bar{a})$ in X and $\exists \Psi_{\bar{a}}: C^{\infty}_m U_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{C}$ such that $\Psi_{\bar{a}}|_{U_{\bar{a}} \cap A} = 0$ " が考えられる。しかしこれはシンボリックであって例: $L \rightarrow B$ is $H^1(B, L^*) \neq 0$ is a manifold B on a negative line bundle. $\pi: X \rightarrow L$ is, $0 \neq \xi \in H^1(B, L^*) \hookrightarrow H^1(L, \mathbb{C}_L)$ is a corresponding affine bundle, $A = \pi^{-1}(0\text{-section})$. // が容易に反例を与えよう。実際 $A \cong B \times \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$: complex line. $f: A \rightarrow \bar{A} = \mathbb{C}$ is a component of the projection. この時 X は f に沿って flow down するのは $\xi \neq 0$ から容易に結論される。一方 $N_{A/X}|_{f^{-1}(\bar{a})} \cong L$ is negativeであり、この時最初述べた定理の証明の途中において上の条件 " " をみたすような $U_{\bar{a}}$ と $\Psi_{\bar{a}}$ の存在が示される。このことから relative の場合には簡単な函数論的な特徴づけは存在しないことが予想される。一方条件 1) を除くという別の考え方をし、上の Grauert の定理を normal bundle E of A in X の 1 n.b.d. と読みかえて、 1 n.b.d. of A が contractible $\Rightarrow A$ in X is actually contractible という命題を考えれば、1) とは次のような formulation が考えられる。(a): $A \hookrightarrow X$ が与えられた時、 $A \hookrightarrow X$ が ν -n.b.d. ($\nu > 0$) で contractible なら、実際は contractible か? ある" は $A \hookrightarrow X$ is formal n.b.d. で A が contractible なら、 A は実際は contractible か。ところで Artin は [1] にあって、後者は algebraic space の category にあって証明した。しかも Artin はその応用として最初述べた定理 ~~を~~ algebraic space の category にあって証明したことを。

ここに注意しておく。彼の証明は, algebraic approximation theorem on henselian local ring を基礎とするもので、それ以前の blowing down の問題への 11 月 11 日の approach とは異なり見事なものである。その定理は [1] の言「^{ε 借れ} formal modification は converge する」ということ^になる。函数論的には formal n.b.d は holomorphically convex である。実際には

holomorphically convex な近傍が存在するかと「言」かえてもよい。Moisezon はこれに formal $\Rightarrow$ converge という命題が、modification は relative algebraic であるということを示唆する意味で、最重要なところにある。実際 $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$

が、modification は relative algebraic であるということを示唆する意味で、最重要なところにある。実際 $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$

が、modification は relative algebraic であるということを示唆する意味で、最重要なところにある。実際 $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$

が、modification は relative algebraic であるということを示唆する意味で、最重要なところにある。実際 $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$

(Chow's lemma. Raynaud-Grisson in the alg. case. Invent. 1971, Hironaka in the analytic case)。これが正式に formal category に拡張できるのは、最初の定理から逆に formal $\Rightarrow$ converge が従う。これを説明する。

formal Chow lemma. (望まぬ形)。 $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ は formal modification (Artin [1] の意味。 $\hat{X}: X \times A \rightarrow A$; completion, $\hat{X}$ formal anal. space) とするとき

$\exists \mathcal{I}$: ideal-sheaf on $\hat{X}$ is ideal of definition $\mathcal{I}_0$ of $\hat{X}$ (適当な $\mathcal{I} \in \mathcal{I}$ とし、 $s.t.$ $\hat{g}: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X} \in \mathcal{I}$ による blowing up ができる時、 $\exists \hat{\sigma}: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}$ morphism s.t. $\hat{f} \circ \hat{\sigma} = \hat{g}$ 。))

$\exists \mathcal{I}$: ideal-sheaf on $\hat{X}$ is ideal of definition $\mathcal{I}_0$ of $\hat{X}$ (適当な $\mathcal{I} \in \mathcal{I}$ とし、 $s.t.$ $\hat{g}: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X} \in \mathcal{I}$ による blowing up ができる時、 $\exists \hat{\sigma}: \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}$ morphism s.t. $\hat{f} \circ \hat{\sigma} = \hat{g}$ 。))

$\mathcal{I}$ は $\hat{\mathcal{I}}$ であるから, $\exists \mathcal{I}$: ideal sheaf on X s.t. $\hat{\mathcal{I}} = \hat{\mathcal{I}}(g)$. $\sigma: X_2 \rightarrow X$ は $\mathcal{I}$ を中心とする blowing up である. さらに $\hat{X}_2 \in \sigma_0^{-1}(g)$ に沿っての formal completion $\hat{\sigma}_0: \hat{X}_2 \rightarrow \hat{X}$ は induced map である. monoidal 変換の universality から $\sigma_{21}: \hat{X}_2 \rightarrow \hat{X}_1$ は induce される: これは容易. 一方 $\hat{\sigma}_0$ は $\hat{\mathcal{I}}(g)$ の blowing up であるから, σ_{21} は実は同型, つまり $\hat{X}_1 = \hat{X}_2$ の $\hat{\sigma}_0^{-1}(g)$ に沿っての formal completion と同型. $\therefore$ $\hat{\mathcal{I}}$ は blowing up であるから, 結局 $\sigma_0^{-1}(g)$ の X_2 内での normal bundle は negative になる. また次に $\hat{\mathcal{I}}$ のように条件 2) は $f: A \rightarrow \bar{A}$ の各 fibre の近傍での hol. fns が X の A に沿っての formal n.b.d. に沿っての $\hat{\mathcal{I}}$ の $\hat{\mathcal{I}}$ であるという ~~条件~~ 事実を意味するが, この条件は formal modification が存在するという条件から自動的に出る. 従って最初の定理を X_2 に対して用いることができ, ^{したがって} これから X に対する modification の存在を言うのは ~~容易~~ である. 次に条件 2) について説明する. $0 \rightarrow \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow 0$ から生じる exact sequence. $R^0 f_* \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow R^0 f_* \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow R^0 f_* \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow N_{X/\bar{A}}^{\otimes m}$ から, 条件 2) $\Rightarrow R^0 f_* \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow R^0 f_* \mathcal{O}_A^{\otimes m} \rightarrow 0$ exact. つまり上に述べた意味になる. ために $R^0 f_* \mathcal{O}_A^{\otimes m}$ は $U \subset \bar{A}$ に対し $T^*(A(m)/f(U), \mathcal{O}_{A(m)})$ に対応させる presheaf により定義される sheaf とする. (f は $A(m)$ 上では定義されていることに注意). このことは言うかえれば, map $f: A \rightarrow \bar{A}$ が $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \bar{A}$ であるという, $\hat{f}$ である. すると結局問題は $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \bar{A}$ が, $\hat{f}: U \rightarrow \bar{A}$, ($U: A$ の X 内での適当な近傍) に延びるかという formal convergence

の問題になる。この τ の convergence は, $0 \rightarrow \mathcal{G}_A^{n+1} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{G}_A^{n+1} \rightarrow 0$ から生ずる exact sequence. $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow \Gamma(A, \mathcal{O}_X/\mathcal{G}_A^{n+1}) \rightarrow H^1(U, \mathcal{G}_A^{n+1}) \rightarrow \dots$ (U と同様) からわかるように, $H^1(U, \mathcal{G}_A^{n+1}) = 0$ $n \gg 0$ なる n が満たされる。これを τ であるのが我々の場合 Nakano-Hironaka になる。

weakly l complete complex space と $\{a\}$ の positive ~~normal~~ ^{line} bundle に対する cohomology 消滅定理 ^[7] があった。そしてこの cohomology 消滅定理を適用するにあたり、条件 1) 2) のもとで A の各 fibre の近傍として weakly l complete であることが、 $\{a\}$ 上の $\mathcal{G}_A$ の positive sheaf になることを check するのが、我々の唯一の contribution があった。projectivity assumption から何らかの cohomology 消滅定理を用いて、projective の blowing down を導く証明法は標準的である。c.f. Kodaira [6]. Griffiths [3] V, また Hartshorne [4] Chap II Th 4.2. [6] τ は小平 vanishing.

[3] τ は Griffiths 自身による type (s, t) の line bundle に対する消滅定理が用いられる。さて条件 2) のかわりに、extension の存在 ($\bar{f}: X \rightarrow \bar{A}$) を仮定してしまう場合、定理は Knorr-Schneider [5] により証明された。しかしこの場合には τ のかわりに函数論的な特徴づけが存在する。[5], Siu [9].

つまり $f: X \rightarrow \bar{A}$ は convex map (i.e. $\forall \bar{a} \in \bar{A}$ に対し $\exists U \ni \bar{a}$ n.b.d. in $\bar{A}$, $\exists \psi: C^\infty f_4$ on $f^{-1}(U)$, $\exists C \in \mathbb{R}$ s.t. 1) ψ は strong subharmonic on $\{x \mid \psi(x) > C\}$, かつ 2) $\forall C' > C$ に対し $f^{-1}(\{x \mid \psi(x) \leq C'\})$ は proper) である時, $\exists g: \bar{X} \rightarrow \bar{A}$: Stein map (i.e. $\forall \bar{a} \in \bar{A}$ に対し $\exists V \ni \bar{a}$ n.b.d. in $\bar{A}$, s.t. $g^{-1}(V)$ is Stein) $\exists \sigma: X \rightarrow \bar{X}$ morphism

with $f_*\mathcal{O} = \mathcal{O}$ s.t. $\sigma_*\mathcal{O}_\pi = \mathcal{O}_\pi$. $\therefore a \rightarrow b$ の modification $\rightarrow$ obstruction は finite part に (1) の $\mathcal{O}_\pi$ に (2) の $\mathcal{O}_\pi$ による $\rightarrow$ なる。

最後は blowing down の変形 π_1 による $\rightarrow$ なる。 strictly pseudoconvex manifold の変形 π_1 は strictly pseudoconvex π_1 。 $\{a$ family は 1 convex map $\rightarrow$ なる。 $\therefore$ blowing down が (1) の π_1 による結果に $\rightarrow$ なる。 i.e.

point contraction の変形 π_1 は point contraction π_1 なる。 relative case 1:

ある π_1 は 次の定理が知られて $\rightarrow$ なる: monoidal 変換 の変形 π_1 は

monoidal 変換。 (しかし一般にはこの事実に対する反例が P^3

の例にある。 π_1 affine bundle $X_t: t \in H^1(L, \mathcal{O}_L)$ $0 \leq |t| < 1$, π_1 定義

して得られる。 この例 π_1 は X_0 は relative に blowing down 可能 π_1 なる

X_t $t \neq 0$ π_1 は π_1 による $\rightarrow$ なる。 これは不可能である。

文 献

- [1] M. Artin: Algebraization of formal moduli: II, Ann. of Math., 91 (1970), 88-135.
- [2] H. Grauert: Über modificationen und exzeptionelle analytischen mengen. Math. Ann. 146 (1962) 331-368.
- [3] P. Griffiths: The extension problem in complex analysis II, Amer. J. Math. 88 (1966) 366-446.
- [4] R. Hartshorne: Ample subvarieties of alg. varieties, Springer. lecture note No 156 (1970)
- [5] K. Knorr u. M. Schneider: Relativexzeptionelle Analytische Mengen. Erscheint demnächst.
- [6] K. Kodaira: On Kähler varieties of restricted type, Ann. of Math., 60 (1954), 38-48
- [7] S. Nakano: Vanishing theorems for weakly l-complete manifolds. to appear.
- [8] Y.T. Siu: The l-convex generalization of Grauert's direct im. theorem, Math. Ann. 190, 203-214 (1971)