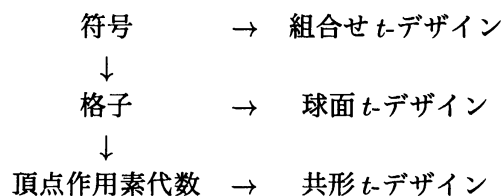


A design-theoretic analogy between codes, lattices, and vertex operator algebras

山形大学・地域教育文化学部 三枝崎 剛
Tsuyoshi Miezaki
Faculty of Education, Art and Science
Yamagata University

1 はじめに

次の表のように、符号・格子・頂点作用素代数から、組合せ t -デザイン・球面 t -デザイン・共形 t -デザインが構成される：



特に, extremal Type II と呼ばれるクラスは, 高い t の t -デザインの例を与える. では, extremal という仮定を外した際, どの程度デザインに関して類似した性質があるか. 本稿ではこの問題を考えて行く.

以下では 3 つのデザインを扱うが, どのデザインを考えているかは, 文脈から明らかなので, 殆どの場合単に t -デザインと呼ぶ事にする.

2 格子と球面デザイン

球面デザインは次で定義される：

定義 2.1. $X \subset S^{n-1} (\subset \mathbb{R}^n)$, $|X| < \infty$: 球面 t -デザイン $\stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{1}{|X|} \sum_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$
for $\forall$ polynomials $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ of degree $\leq t$

幾つか基本的な性質及び例を挙げる：

— 球面デザインに関する基本的なこと —

- $X \subset S^{n-1}(r)$: t -デザイン $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{r}}X \subset S^{n-1}$: t -デザイン.
- X : t -デザイン $\Rightarrow X$: $(t-1)$ -デザイン $\Rightarrow X$: $(t-2)$ -デザイン $\dots$.
- $\forall t, n \in \mathbb{N}, \exists X = t$ -デザイン in S^{n-1} .
- X が t -デザイン $\Leftrightarrow \sum_{\mathbf{x} \in X} P(\mathbf{x}) = 0$ for $\forall P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq t$ (もし $X = -X$ (antipodal) なら, j が偶数のみ調べればよい).
- 正 n 角形は $(n-1)$ -デザイン.
- E_8 -型ルート系は 7-デザイン.

球面デザインを構成する方法は, いくつもあるが, ここでは格子を用いた方法を考える.
格子に関する言葉を復習しよう:

— 格子に関する基本的なこと —

- $L(\subset \mathbb{R}^n)$: n -次元格子 $\Leftrightarrow \exists$ basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ of $\mathbb{R}^n$ such that $L = \{k_1 \mathbf{v}_1 + \dots + k_n \mathbf{v}_n \mid k_i \in \mathbb{Z}\}$.
- $L^* := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbb{Z}, \forall \mathbf{x} \in L\}$.
- L が self-dual $\Leftrightarrow L^* = L$.
- L が even if $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in 2\mathbb{Z}$.
- L が Type II $\Leftrightarrow L$: self-dual かつ even.
- L の最小ノルム $\min(L)$: $\min\{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in L\}$.
- L のノルム m の shell: $(L)_m = \{\mathbf{x} \in L \mid (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = m\}$.

格子の shell は球面上に存在しているので, 格子から球面デザインを構成するとは, その shell から球面 t -デザインを構成しようというものである.

格子のデザインを調べる際に有用な, theta series に関する性質を纏める:

— 格子の (harmonic) theta series —

- 格子 L と $P(\mathbf{x}) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ の Harmonic theta series: $\vartheta_{L,P}(q) := \sum_{\mathbf{x} \in L} P(\mathbf{x}) q^{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sum_{m \geq 0} a_m^{(P)} q^m$, where $q = e^{\pi i \tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$, $a_m^{(P)} = \sum_{\mathbf{x} \in (L)_m} P(\mathbf{x})$.
- $(L)_m (\neq \emptyset)$ が t -デザイン $\Leftrightarrow a_m^{(P)} = 0$ for every $P \in \text{Harm}_{2j}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq 2j \leq t$.

このことから, $1 \leq 2j \leq t$ に対し harmonic theta series の q^m の係数が消えていれば $(L)_m$ は t -デザインである事がわかる.

一つ例を見てみよう:

例 2.1. $L = \mathbb{Z}^2$ とおく. すると $(L)_1 = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, $(L)_2 = \{(\pm 1, \pm 1)\}$. テータ級

数は,

$$\vartheta_L(q) = \vartheta_{L,1}(q) = 1 + 4q + 4q^2 + \cdots.$$

次の事実,

$$\bullet \text{ Harm}_2(\mathbb{R}^2) = \langle P_2 = x^2 - y^2 = \text{Re}(z^2), 2xy = \text{Im}(z^2) \rangle.$$

を用いると, $\vartheta_{L,P_2}(q) \equiv 0$, 即ち $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $(L)_m$ は 3-デザインとなることがわかる.

実は L が Type II のとき, 次が知られている:

定理 2.1 ([6, 11, 12]). L : n -次元 Type II 格子 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vartheta_{L,P}(q) \text{ はモジュラー形式でウェイトは } n/2 + \deg(P), \\ \vartheta_{L,P}(q) \in \mathbb{C}[E_4(q), E_6(q)]. \end{cases}$$

これを用いると, 次のことがわかる:

系 2.1. $\exists n$ -次元 Type II 格子 $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{8}$.

系 2.2 ([13]). L : n -次元 Type II 格子 $\Rightarrow \min(L) \leq 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2$.

この不等式が等号となる際, 格子は extremal と呼ばれる:

定義 2.2. $\bullet L$: n -次元 Type II 格子.

$$L \text{ が extremal} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \min(L) = 2\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 2.$$

これらのことを用いると, 例えば, L が 24-次元 Type II 格子なら, 全てのシェルで 3-デザインが次のようにしてわかる:

例 2.2. $\bullet L$: 24-次元 Type II 格子, $P \in \text{Harm}_2(\mathbb{R}^{24})$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vartheta_{L,P}(q) \text{ はモジュラー形式でウェイトは } 12 + 2 = 14, \\ \vartheta_{L,P}(q) \in \mathbb{C}[E_4(q), E_6(q)]. \end{cases}$$

$\bullet$ しかしウェイトが 14 となるカスプ形式は存在しない.

$$\Rightarrow \vartheta_{L,P} = 0, \text{ i.e., } \sum_{x \in (L)_{2m}} P(x) = 0 \text{ for all } P(x) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n), j = 2.$$

$\Rightarrow (L)_{2m}$ は 3-デザイン.

Extremal な Type II 格子に関しては次が成立する:

定理 2.2 ([14, 15]). $\bullet L$: extremal な n -次元 Type II 格子.

$\Rightarrow (L)_{2m}$ は次の値 t の t -デザインとなる:

$$t = \begin{cases} 11 & n \equiv 0 \pmod{24} \\ 7 & n \equiv 8 \pmod{24} \\ 3 & n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

この事より, n が 24 の倍数のときは, 11-デザインが得られる. 更に, 格子の shell から 12-デザイン以上は構成できないと予想されており, extremal な Type II 格子は, デザインという視点から見て大変美しい対象だという事がわかる. そして存在もあまり知られていない. $\dim n = 24m$ のときの extremal な Type II 格子のリストを提示する:

n	# extremal even uni. lattice
24	1 (Leech lattice Λ_{24})
48	≥ 4 ($P_{48p}, P_{48q}, P_{48n}, P_{48m}$)
72	≥ 1
≥ 96	?
≥ 164000	0

ここで、球面 t -デザインの概念を拡張する：

定義 2.3 ([8]). $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. X が球面 T -デザイン $\Leftrightarrow$

$$\sum_{\mathbf{x} \in X} P(\mathbf{x}) = 0$$

holds for all $P(\mathbf{x}) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ with $j \in T$.

注意 2.1. • t -デザインは $\{1, 2, \dots, t\}$ -デザインのことである.

- T_4 を 4 の倍数以外の自然数からなる集合とする: $T_4 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, \dots\}$.
すると, $(\mathbb{Z}^2)_m (\neq \emptyset)$ は T_4 -デザイン.

講演中に、次の結果を紹介しましたが、これは完全に誤りでした。お詫びして訂正いたします。

定理 2.3 ([9]). L : n -次元 Type II 格子 $\Rightarrow (L)_{2m}$ は T_4 -デザイン.

3 符号と組合せデザイン

組合せデザインは次で定義される：

定義 3.1. • $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $X^{\{k\}} = \{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \mid \alpha_i \in X, \alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)\}$.

- $\mathbb{B} \subset X^{\{k\}}$.

$(X, \mathbb{B})$: 組合せ t -デザイン $(t(v, k, \lambda)) \Leftrightarrow \text{For } \forall T \in X^{\{t\}}, \#\{B \in \mathbb{B} \mid T \subset B\} = \lambda (> 0)$.

例 3.1. • $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\mathbb{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}\}$.
 $\Rightarrow (X, \mathbb{B})$ は 1-デザイン $(1-(7, 2, 2))$.

- $\mathbb{B} = \{\{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$. $\Rightarrow (X, \mathbb{B})$ は 2-デザイン $(2-(7, 3, 1), \text{unique})$.

球面デザインに関して、次のことを紹介した：

球面 t -デザインの同値条件

X が球面 t -デザイン $\Leftrightarrow \sum_{\mathbf{x} \in X} P(\mathbf{x}) = 0$ for $\forall P(\mathbf{x}) = P(x_1, \dots, x_n) \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$,
 $1 \leq j \leq t$.

この類似が組合せデザインにも存在し、次のようなものである：

定理 3.1 ([4]). $\mathbb{B} \subset X^{\{k\}}$ が組合せ t -デザイン $\Leftrightarrow \sum_{x \in \mathbb{B}} \tilde{f}(x) = 0$ for all $f \in \text{Harm}_k$,
 $1 \leq k \leq t$.

ただし、定理中の記号は次で定義される：

—— 離散調和解析に関すること ——

- $X := \{1, 2, \dots, n\}$, 2^X を X の全ての部分集合.
- $\mathbb{R}2^X$, $\mathbb{R}X^{\{k\}}$: 2^X , $X^{\{k\}}$ の元で張られる実ベクトル空間.
- $\gamma(z) := \sum_{y \in X^{\{k-1\}}, y \subset z} y$.
- $\text{Harm}_k := \ker(\gamma|_{\mathbb{R}X^{\{k\}}})$.
- $\mathbb{R}X^{\{k\}}$ の元 f を次のように書く $f = \sum_{z \in X^{\{k\}}} f(z)z$
- $f \in \mathbb{R}X^{\{k\}}$ は $\tilde{f} \in \mathbb{R}2^X$ に次のようにして拡張される: for all $u \in 2^X$, $\tilde{f}(u) = \sum_{z \in X^{\{k\}}, z \subset u} f(z)$.

一つ例を見てみよう：

例 3.2. 次のように $X, \mathbb{B}$ をおく: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$\mathbb{B} = \{\{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$.

すると $(X, \mathbb{B})$ は組合せ 2-デザインであった. 従って, Harm_2 の元で和を取ると消えるはずで, 例えば, $\sum_{x \in \mathbb{B}} \tilde{f}(x) = 0$, for $f := \{1, 3\} - \{2, 3\} - \{1, 4\} + \{2, 4\} \in \text{Harm}_2$.

格子から球面デザインが構成できたように, 符号から組合せデザインが構成できる. その紹介のために, 符号に関する言葉を復習しよう：

—— 符号に関する基本的なこと ——

- $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.
- C : 長さ n の符号 $\Leftrightarrow C$ は $\mathbb{F}_2^n$ の部分空間.
- $C^\perp = \{x \in \mathbb{F}_2^n \mid x \cdot y = 0 \ (\forall y \in C)\}$.
- C が self-dual $\Leftrightarrow C = C^\perp$.
- ウェイト of $x = (x_i)$: $\text{wt}(x) = \#\{i \mid x_i \neq 0\}$.
- C が Type II $\Leftrightarrow C$: self-dual かつ $\text{wt}(x) \equiv 0 \pmod{4} \ (\forall x \in C)$.
- C の最少距離 $\min(C)$: $\min\{\text{wt}(x) \mid (0 \neq)x \in C\}$.
- C のノルム m の shell: $\{c \in C \mid \text{wt}(c) = m\}$.

符号から組合せデザインを構成するとは, $\mathbb{F}_2^n$ と 2^X の自然な同一視の下で, その shell からデザインを構成しようというものである.

格子の球面デザインを調べる際に有用であった harmonic theta series の類似がある：

Harmonic weight enumerators

- 符号 C と $f \in \text{Harm}_\ell$ の harmonic weight enumerator: $w_{C,f}(x, y) := \sum_{c \in C} \tilde{f}(c) x^{n-\text{wt}(c)} y^{\text{wt}(c)} = \sum_{m \geq 0} a_m^{(f)} x^{n-m} y^m$, where $a_m^{(f)} = \sum_{x \in (C)_m} \tilde{f}(x)$.
- C の weight enumerator: $w_C(x, y) := \sum_{c \in C} x^{n-\text{wt}(c)} y^{\text{wt}(c)} = \sum_{m \geq 0} |(C)_m| x^{n-m} y^m$.
- $w_{H_8}(x, y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$.
- $C_m (\neq \emptyset)$ が t -デザイン $\Leftrightarrow a_m^{(f)} = 0$ for every $f \in \text{Harm}_j$, $1 \leq j \leq t$.

更に Hecke-Schoeneberg の結果の類似も以下の用に存在する：

定理 3.2 ([5, 3]). C を長さ n の Type II 符号, $f \in \text{Harm}_k$ とおく.

すると, $\begin{cases} w_{C,f}(x, y) = (xy)^k Z_{C,f}(x, y) \\ Z_{C,f}(x, y) \text{ は次数 } n-2k \text{ で, } Z_{C,f}(x, y) \in I_{G,\chi_k}, \end{cases}$
 ただし,

$$I_{G,\chi_k} = \begin{cases} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 0 \pmod{4} \\ P_{12} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 2 \pmod{4} \\ P_{18} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 3 \pmod{4} \\ P_{30} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

ただし, 記号などは以下で定義される：

Invariants

$$\bullet G = \left\langle T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\bullet \chi_k(T_1) = (-1)^k, \chi_k(T_2) = \sqrt{-1}^{-k}.$$

- $I_G := I_{G,\chi_0} = \mathbb{C}[x, y]^G : G$ の不変式環,
 $I_{G,\chi_k} : G$ の χ_k に関する双対不変式環.

これらの空間は次のようによくわかっている [3]：

$$I_{G,\chi_k} = \begin{cases} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 0 \pmod{4} \\ P_{12} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 2 \pmod{4} \\ P_{18} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 3 \pmod{4} \\ P_{30} \langle P_8, P_{24} \rangle & \text{if } k \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

ただし, $P_8(x, y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8$, $P_{24}(x, y) = x^4y^4(x^4 - y^4)^4, \dots$

これより, 次が得られる：

系 3.1. $\exists$ 長さ n の Type II 符号 $\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{8}$.

系 3.2 ([7]). C : 長さ n の Type II 符号 $\Rightarrow \min(C) \leq 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4$.

すると Type II 格子と同様 Type II 符号に関しても extremal という概念が定義できる：

定義 3.2. • C : 長さ n の Type II 符号.

$$C \text{ が extremal } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \min(C) = 4\lfloor \frac{n}{24} \rfloor + 4.$$

Extremal な Type II 符号に関しては次が成立する：

定理 3.3 ([2]). • C : 長さ n の extremal な Type II 符号
 $\Rightarrow (C)_m$ は次の値 t の t -デザイン：

$$t = \begin{cases} 5 & n \equiv 0 \pmod{24} \\ 3 & n \equiv 8 \pmod{24} \\ 1 & n \equiv 16 \pmod{24}. \end{cases}$$

さて、組合せ t -デザインの概念は次のように拡張された：

定義 3.3 ([4, 3]). $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とおく. X が組合せ T -design $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum_{x \in X} \tilde{f}(x) = 0$ holds for all $f \in \text{Harm}_j, j \in T$.

注意 3.1. • t -デザインは $\{1, 2, \dots, t\}$ -デザインのことである.

更に我々は組合せ T -デザインの概念を更に拡張した：

定義 3.4 ([9]). • $X \subset X^{\{k\}} \cup X^{\{\ell\}} (k \neq \ell)$.

X が 2 つのウェイトに関する組合せ t -デザイン $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ for any $T \in X^{\{t\}}, \#\{W \in X \mid T \subset W\} = \lambda$.

$T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とおく. X が 2 つのウェイトに関する組合せ T -デザイン $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum_{x \in X} \tilde{f}(x) = 0$ holds for all $f \in \text{Harm}_j, j \in T$.

すると次が成立する事がわかった：

定理 3.4 ([9]). • C : 長さ n の Type II 符号 $\Rightarrow (C)_m \cup (C)_{n-m}$: 2 つのウェイトに関する組合せ T_2 -デザイン.

特に $(C)_m \cup (C)_{n-m}$ は 2 つのウェイトに関する組合せ 1-デザイン.

これは次の結果の別証を与えている：

系 3.3 ([1, 10]). $(C)_{n/2}$ は T_2 -デザイン. 特に $(C)_{n/2}$ は 1-デザイン.

4 頂点作用素代数と共形デザイン

組合せ T -デザイン, 球面 T -デザインの類似として, 我々は共形 t -デザインの概念を次のように拡張した：

定義 4.1 ([9]). $T \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とおく. X が共形 T -デザイン $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{tr}|_X o(v) = 0$ holds for all $v \in \text{Ker } \pi = \bigoplus_{n>0} (V)_n$ of weight $j \in T$.

注意 4.1. t -デザインは共形 $\{1, 2, \dots, t\}$ -デザインのことである.

この新たに定義された T -デザインに関しても, 幾つかのことを証明したが, 詳しくはプレプリント [9] をご参照下さい.

5 まとめ

t -デザインに関することを, T -デザインに拡張することで, 成立する事を見てきた. この概念は, harm に関する性質を細かく見ていることから, どのような集合 T のデザインになるか調べる事で, 符号・格子・頂点作用素代数を深く理解することが出来ると期待する. しかし, T -デザインになる T の決定は, 述べなかったが Lehmer 予想とデザイン理論の対応などを鑑みても, 難しい問題である.

本稿では, まず第一歩として, Type II というクラスに限って考えてきた. 今後更に Type II, 或いは他のクラスに対して, T を解析して行くことは, 符号・格子・頂点作用素代数の研究, 或いは, その類似性を高めるという意味でも大切と考えている.

参考文献

- [1] W. O. Alltop, Extending t -designs, *J. Combin. Theory Ser. A* **18** (1975) 177-186.
- [2] E. F. Assmus, Jr. and H. F. Mattson, Jr., New 5-designs, *J. Combinatorial Theory* **6** (1969), 122-151.
- [3] C. Bachoc, On harmonic weight enumerators of binary codes, *Des. Codes Cryptogr.* **18** (1999), no. 1-3, 11-28.
- [4] Ph. Delsarte, Hahn polynomials, discrete harmonics, and t -designs, *SIAM J. Appl. Math.* **34** (1978), no. 1, 157-166.
- [5] A.M. Gleason, Weight polynomials of self-dual codes and the MacWilliams identities. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 3, pp. 211-215. Gauthier-Villars, Paris, 1971. 94A10 (05B30)
- [6] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983.
- [7] C.L. Mallows, A.M. Odlyzko and N.J.A. Sloane, Upper bounds for modular forms, lattices, and codes, *J. Algebra* **36** (1975), 68-76.
- [8] T. Mieziaki, On a generalization of spherical designs, *Discrete Math.* **313** (2013), no. 4, 375-380.
- [9] T. Mieziaki, A design-theoretic analogy between codes, lattices, and vertex operator algebras, preprint.
- [10] An upper bound of the value of t of the support t -designs of extremal binary doubly even self-dual codes, preprint.
- [11] B. Schoeneberg, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. (German) *Math. Ann.* **116** (1939), no. 1, 511-523.
- [12] B. Schoeneberg, "Elliptic modular functions: an introduction," Translated from the German by J. R. Smart and E. A. Schwandt. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 203. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.
- [13] C.L. Siegel, Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen (German), *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* **1969** (1969), 87-102.
- [14] B. B. Venkov, Even unimodular extremal lattices. (Russian) Algebraic geometry and its applications. Trudy Mat. Inst. Steklov. 165 (1984), 43-48; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 165 (1985) 47-52.
- [15] B. B. Venkov, "Boris Réseaux et designs sphériques," (French) [Lattices and spherical designs] Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires, 10-86, Monogr. Enseign. Math., 37, Enseignement Math., Geneva, 2001.