

天体物理の諸問題に対する

一般変分原理による取扱

東大 理 海 野 和 三 郎

§1 揺動の最小仕事

巨視的な物理状態はそのまわりでおこる揺動の確率が極大値をとるときに平衡であり、系はその方向に進化する。この原理により、古典力学・熱力学を一般変分原理の形に定式化できる。これは Prigogine と Glansdorff (*Physica* 31, 1242, 1965) によって行われた。この変分原理を天体物理の二つの問題に適用して、その方法が広く応用できるものであることを示す。

平衡状態を基準にとり、これに揺動 δ を与えたとき、これに必要なエネルギーは不可逆過程を考へると一義的ではない。熱力学第2法則により、その最小値が存在し、これを揺動の最小仕事とよび、 $\delta W_{\min}$ とかくことにする。単位質量あたり、

$$\delta W_{\min} = \frac{1}{2} \left[\frac{C_V}{T} (\delta T)^2 + \left| \left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_T \right| (\delta v)^2 + (\delta u)^2 \right], \quad (1)$$

(Landau, Lifshitz; *Statistical Physics*, 1958, §20, §111)。

但し, C_v : 定積比熱, T : 絶対温度, P : 圧力, $v = \frac{1}{\rho}$: 比体積, $\mathbf{u}$: 速度ベクトル である。この δW_{min} を T でわり符号を変えたものが揺動のエントロピー δS であり, これは確率の対数に比例したものであることは統計力学で知られている。したがって (1) は平衡, $\delta = 0$ で確率が極大になっていることを示す。

系の進化の条件としては, 平衡で

$$\frac{d}{dt} \delta W_{min} = 0, \quad (2)$$

であり, それ以外では左辺は負である。系が巨視的物理に従って変化しているときにも, 揺動の時間尺度は小さいことを考慮して, 実現する変化に対しても (2) を要求するものと考えらる。更にはこれを系の全質量で積分して,

$$\delta \mathcal{F} \equiv - \int \frac{d}{dt} \delta W_{min} dm = 0 \quad (3)$$

またすべての時間にあたって (3) が成立として時間積分をとり,

$$\delta \mathcal{Q} \equiv \delta \int \mathcal{F} dt = - \int \delta W_{min} dm = 0. \quad (4)$$

§ 2 保存法則

(1) を保存則を用いて書きかえれば, 物理過程との対応がわかる。質量, 運動量, 熱エネルギーの保存を次式で表す。

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \mathbf{F}, \quad (6)$$

$$T \frac{dS}{dt} = \epsilon - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{H}. \quad (7)$$

F は重力等の外力で、粘性力を含めるとよいが天体の場合は通常無視される。 S は単位質量あたりのエントロピー、 ϵ は熱エネルギー発生率、 H は輻射等の熱流量である。左辺に適當な変分量を乗じて加えると、

$$\begin{aligned} (l.h.s) &= -\frac{\delta P}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \rho \delta u \cdot \frac{du}{dt} - \frac{\rho}{T} \delta T \cdot T \frac{dS}{dt} \\ &= -\rho \left[\frac{C_v}{T} \frac{dT}{dt} \delta T + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \frac{d\rho}{dt} \delta \rho + \frac{du}{dt} \cdot \delta u \right] \\ &= -\rho \frac{d}{dt} \delta W_{min} - \rho \left[\frac{C_v}{T} \frac{dT^{(B)}}{dt} \delta T + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \frac{d\rho^{(B)}}{dt} \delta \rho + \frac{du^{(B)}}{dt} \cdot \delta u \right] \quad (8) \end{aligned}$$

オ1行からオ2行へうつすには熱力学の関係式を用いた。(8)のついた量は基準状態の量で、 $T = T^{(B)} + \delta T$, etc. (8)に対応する右辺を考慮すると、(3)より (δ の高次を無視)

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathcal{F} &= \int dm \left[\frac{\delta P}{\rho} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho^{(B)}}{dt} + \text{div } u \right\} + \delta u \cdot \left\{ \frac{du^{(B)}}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad } P - F \right\} \right. \\ &\quad \left. + \delta (\ln T) \left\{ C_v \frac{dT^{(B)}}{dt} - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \frac{T}{\rho^2} \frac{d\rho^{(B)}}{dt} - \epsilon + \frac{1}{\rho} \text{div } H \right\} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

この変分式の Euler 方程式は $\delta \mathcal{F} = 0$ で、これは基準状態をきめる式である。したがって Euler 方程式では (8) のついた量とつかない量と区別をなくしてよい。これは (5) (6) (7) の保存則に外ならない。(9) の右辺が全微分形にかければ、ポテンシャル $\mathcal{F}$ が一義的にきまり、変分原理が完成するが、特例の場合以外では不可能である。しかし Euler 方程式を正しく与えることを目的とするかぎり、その目的にかなう $\mathcal{F}$ は求められる。最も簡単には、

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \int \frac{dm}{\rho} \left[P \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho^{(B)}}{dt} + \text{div } u \right\}^{(B)} + u \cdot \left\{ \rho \frac{du}{dt} + \text{grad } P - \rho F \right\}^{(B)} \right. \\ &\quad \left. + \ln T \left\{ C_v \rho \frac{dT}{dt} - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \rho \epsilon + \text{div } H \right\}^{(B)} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

實際に一般変分原理を用いて逐次近似の計算を進めたり、
変分パラメーターを含む解析的な近似解を求めたりする場合
には、(9)の $\{ \cdot \}$ の中には変分を含む項があることを考慮して、
(9)とでききだけ全微分に近い形にこたえて、 δ をはずして(δ のつかぬ量には(B)をつける) F_1 を求めれば、(10)を用いるよ
り精度がよい。それは問題の性格によってそれぞれ技巧が要
る真なので、こゝでは立入らない。

§3 恒星モデルの数値計算法

恒星内部に N 個の同心球を考へ、 $m^{(i)}$ を i 番目の球の質量
とする。 $m^{(i)}$ -球の表面について、その半径 $r^{(i)}$ 、温度 $T^{(i)}$ がよえ
うければモデルは決定する。平衡恒星については(10)より、

$$F_1 = \sum_{i=1}^N \int_{m^{(i-1)}}^{m^{(i)}} dm \left[\frac{\partial F_1}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{Gm}{r^2} \right\}^{(B)} + \frac{T_1}{T_0} \left\{ -\rho \epsilon + \frac{\partial}{\partial m} (4\pi r^2 H_r) \right\}^{(B)} \right]. \quad (11)$$

但し、 $r = r_0 + r_1$, $T = T_0 + T_1$ とし、 $r_0^{(i)}$, $T_0^{(i)}$ は近似値で既知であり、
 F_1 は F の近似値に対する補正である。

$r_1^{(i)}$, $T_1^{(i)}$ を変分原理から求める問題を考へる。その際 $[m^{(i-1)}, m^{(i)}]$
区間の r_1 は $r_1^{(i-1)}$ と $r_1^{(i)}$ を m につき直線で結んだ値をとるとする。

$$\frac{\delta F_1}{\delta r_1^{(i)}} = 0, \quad \frac{\delta F_1}{\delta T_1^{(i)}} = 0, \quad (i=1, \dots, N-1) \quad (12)$$

より得る式は、 r_1 と T_1 の高次を無視すれば、 $r_1^{(i-1)}$, $r_1^{(i)}$, $r_1^{(i+1)}$,
 $T_1^{(i-1)}$, $T_1^{(i)}$, $T_1^{(i+1)}$ を未知数とする 2 本の 1 次方程式である。定数
項として 0 次近似解の誤差が入ってくる。こゝから $2(N-1)$ 個の

式と中心と表面での境界条件の式とで、未知数が決定される。係数でつくられるマトリックスは対角要素とその近傍の要素だけが0でないことを利用すれば計算機を用いて解くことは困難ではない。この点については Henggey の方法と同じである。

§ 4 安定性一般論

平衡状態の安定性をしらべるために、物理量に添字0をつけて平衡を示し(誤りあそびがあるときは0をはずす)、1で変化量を示す。変位 η と ξ とかき、また相対変化 η, ξ, θ を次式で定義する。 $P = P_0(1+\eta)$, $\rho = \rho_0(1+\eta)$, $T = T_0(1+\theta)$ 。変化量の時間変化を e^{nt} で表す。 n は一般に複素数である。複素変数で扱うために、位相の $90^\circ = \pi/2$ なる変化も同時に考慮して、

$$\mathcal{H} = R_0 \int dm \left[n^{(B)} \frac{\rho}{\rho} \omega^* \left\{ \eta + d\omega \xi \right\}^{(B)} + n^* \xi^* \left\{ n^2 \xi + \frac{1}{\rho} \text{grad}(P\eta) + \text{grad} \psi \right. \right. \\ \left. \left. + \eta \text{grad} \psi + 2n (\Omega \times \xi) \right\}^{(B)} + \theta^* \left\{ n (C_V T \theta - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right) \frac{T}{P} \eta) - \epsilon_1 + \left(\frac{1}{\rho} d\omega H \right)_1 \right\}^{(B)} \right] \quad (13)$$

但し角速度 Ω で回転している座標系によって記述した。 ψ は遠心力を含めた重力ポテンシャルである。この式で変分を行うのは $\{ \}$ の外の $\omega^*, \xi^*, \theta^*$ および n^* (*は複素共役)である。 ω 等の固有函数に対して変分をとる方法と n に対して変分をとる方法とがあるが、ここでは後者に従い、前の方法による場合はあてて示す。

ω, ξ, θ は e^{nt} という因子を持つているから、(13)を n による

(7)

変分をとったときに、左が表に出る項と右に比例した形の項とがある。すなわち左（但し無限小）について成立つためには両者とも0でなければならぬ。これは、(4)の δ を δ で展開して最初の2項のみに変分をほどこすことと同一である。このようにすると仕事積分 $\int_V \rho \theta^* \text{div} \xi \, dm$ を δ と δ' の本の式を得る。これを等しいとみると、少し変形を行つた結果

$$\begin{aligned} & n n^* \int_V |\xi|^2 \, dr + 2 n n^* \Omega \cdot \int_V \rho (\xi^* \times \xi) \, dr + n \int_V \rho \left[\text{COT} |\theta|^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_+ |\eta|^2 - \right. \\ & \left. - \text{grad} \psi \cdot (\xi \text{div} \xi^* + \xi^* \text{div} \xi) - \frac{d \ln \rho}{d \psi} |\xi \text{grad} \psi|^2 \right] \, dr - 4 \left\{ \int_V \frac{d \omega(\rho \xi^*) d \omega'(\rho \xi')}{|r - r'|} \, dr \, dr' \right\} \\ & - \int_V \rho \theta^* \left[\epsilon_1 - \left(\frac{1}{\rho} \text{div} H \right)_1 \right] \, dr = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

断熱変化の場合は最後の積分が0で、 n について1次下がる。この場合は、Clement (Ap J. 140, 1045, 1964) が別の方法で求め、その式は β 星の n について通常の変分原理($\delta n = 0$)をみたすことを示した。それを用いて彼は回転星の非球対称振動を求め、その固有振動数が球対称振動と一致する場合のピートを研究して、 β Cep 星の脈動の説明をした。

非断熱の一般の場合については、 n の実部の符号により安定性が判別される。安定条件には3つの場合があることがわかったが、結果は長くなるので書かない。共通していることは、安定のためにはいかなる Dissipation Integral:

$$\text{Re} \int_V \rho \theta^* \left[\epsilon_1 - \left(\frac{1}{\rho} \text{div} H \right)_1 \right] \, dr < 0 \quad (15)$$

である。(15)がみたされないと熱不安定又は脈動不安定となる。

§5 恒星安定性

球対称の星について球対称でかつ星の中に節をしない変位を考える。今、固有函数の trial function として最も簡単に

$$\varpi = \varpi_0 e^{nt}, \quad x \equiv \frac{\Sigma}{r_0} = x_0 e^{nt}, \quad \theta = \theta_0 e^{nt} \quad (\varpi_0, x_0, \theta_0 \text{ は定数})$$

を考える。振巾 ϖ_0, x_0, θ_0 が変分パラメータである。勿論このような函数では局所的変化であることが本質的な不安定性、即ち核反応が薄い層で行なわれている場合の整不安定性や外層の対流不安定性は取扱えない。

変分のポテンシャル函数は (13) で与えられる。 $\delta\varpi_0, \delta x_0, \delta\theta_0$ を次に与える。

$$\eta_0 + 3x_0 = 0 \quad (16)$$

$$(n^2 I - 4|E_q|)x_0 - |E_q|\varpi_0 = 0 \quad (17)$$

$$4Lx_0 - \left\{ \frac{n}{3} \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho |E_q| + (\epsilon_p + x_p)L \right\} \eta_0 + \left\{ \frac{n}{3(\delta-1)} |E_q| - (\epsilon_T + x_T - 4)L \right\} \theta_0 = 0 \quad (18)$$

但し ϵ は $\frac{1}{\rho} \frac{d\epsilon}{d\ln T}$ にあたり、 $\text{grad } \psi = \frac{Gm}{r^2}$, $\epsilon = \epsilon_0 \rho^{\epsilon_p} T^{\epsilon_T}$, $\frac{1}{\rho} d\ln H =$

$$= -(\pi r^2)^2 \frac{4acT^4}{3x} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln m}, \quad x = x_0 \rho^{x_p} T^{x_T} \text{ を用い } E_0 \text{ まで}$$

$$I \equiv \int r^2 dm, \quad |E_q| \equiv \int \frac{Gm}{r} dm = \int \frac{3P}{\rho} dm = \int 3(\delta-1)C_V T dm, \quad \int \epsilon dm \equiv L \quad (19)$$

である。(16) - (18) に状態方程式より

$$\varpi_0 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T \eta_0 + \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \theta_0 \quad (20)$$

を加え、係数の行列式を 0 とおくと、変係数の n についての 3 次方程式が得られる。安定条件 (n の実部が負) は Hurwitz の定理によって、与えられた式で与えられる。

$$\left\{ 4 - 3 \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T \right\} (\epsilon_T + \kappa_T - 4) + \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho \left\{ 4 + 3 (\epsilon_\rho + \kappa_\rho) \right\} > 0 \quad (21)$$

$$(\gamma - 1) \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho^2 + \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T - \frac{4}{3} > 0 \quad (22)$$

$$(\gamma - 1) \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho (\epsilon_T + \kappa_T - 4) + (\epsilon_\rho + \kappa_\rho + \frac{4}{3}) < 0 \quad (23)$$

ここで (4) とし $\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T = 1$, $\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho = 1$ とおけば, それぞれ

$$\epsilon_T + \kappa_T + 3(\epsilon_\rho + \kappa_\rho) > 0 \quad (24)$$

$$\gamma - \frac{4}{3} > 0 \quad (25)$$

$$(\gamma - 1)(\epsilon_T + \kappa_T) + (\epsilon_\rho + \kappa_\rho) - 4(\gamma - \frac{4}{3}) < 0 \quad (26)$$

上から永年 (2 は熱) 安定性, 力学的安定性, 脈動安定性のため
の条件式である。標準的な値として, $\kappa_\rho = 1$, $\kappa_T = -3.5$ とは
 $\kappa_\rho = \kappa_T = 0$, $\epsilon_\rho = 1$, $\epsilon_T = 5 \sim 20$, $\gamma = \frac{5}{3}$ を用いれば, 脈動安定
性のみが満たされないことになる。これは ϵ_T が大きいこと
がきいていすが, 質量の非常に大きい星 ($M > 60 M_\odot$) の場合には
定性的に正しい。ケフエウス型脈動星などでは核反応のきく中
心部では脈動振幅が小さく, ϵ_T の項はきかない。外層に
いて水素やヘリウムの半電離の層があつて, そこで γ が小さいこ
とが脈動の原因になつてゐる。

結論として, 一般変分原理は流体力学と熱力学とを合わせた
領域の研究に一般的かつ見通しのよい手法を与えることが明
らかとなった。定性的な理論研究にも, 非線型の数値計算法
としてもつかえるので, その利用される範囲は非常に広いも
のといえる。