

2 次元流の複素特異性について

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

1. はじめに

実数の範囲内で正則であっても、引数を複素数に解析接続して複素面で見ると特異点を持っているという関数は少なくない。例えば、 $f(x) = 1 / (1 + x^2)$ という関数は実数 x に対しては正則であるが、これを複素数に拡張した $f(z) = 1 / (1 + z^2)$, $z = x + i y$ は $z = \pm i$ に特異点を持っている。ここでは複素面における特異点（あるいは線又は面）の性質を「複素特異性」と呼ぶことにする。

複素特異性はこれまで速度場の間欠性、^{1,2)} 運動方程式の解の発散、³⁻⁶⁾ 運動の可積分性、⁷⁾ 乱流のエネルギースペクトル⁸⁾ 等に関連して議論されている。ここでは 2 次元ナビエ・ストークス流のもつ特異性の形について考えてみたい。

2. 複素特異点とスペクトル

z と z^* ($*$ は複素共役を表す) に α 位の特異点を持っている実関数

$$f(x) = \frac{1}{(x-Z)^\alpha} + \frac{1}{(x-Z^*)^\alpha} \quad (1)$$

$$Z = X + iY, \quad Y > 0 \quad (2)$$

を考える。この関数のフーリエ変換

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx \quad (3)$$

の波数の大きいときの漸近的振る舞いは

$$\tilde{f}(k) \propto |k|^{\alpha-1} e^{ikX - |k|Y} \quad (4)$$

$$|k| \rightarrow \infty$$

となり、フーリエ係数の絶対値は指数関数的に減衰し、減衰率は特異点の虚部の絶対値で与えられる。

特異点が複数個ある場合 (図 1) には、各特異点からの寄与があるが、波数が大きい極限における漸近形には実軸に最も近い特異点が効いてくるので (4) 式の X, Y に実軸に最も近い特異点の実部と虚部を代入すればよい。従って、パワー・スペクトルの $|k| \rightarrow \infty$ の極限における指数関数的減衰率を調べることによって実軸に最も近い特異点の虚部が求められるのである。

3. フィルターをかけたスペクトル

前節で述べたようにパワー・スペクトルの波数の大きいところでの指数関数的減衰率から実軸に最も近い特異点の虚数座標が分かる。しかし、

それだけからは実軸に最も近い特異点以外の特異点については何も分からない。

そこで、特異点の空間分布を調べるために関数にフィルターをかけてみよう。さて、フィルター関数として中心が x_c で広がりが d であるガウス型の関数

$$g_{x_c}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} d} \exp\left[-\left(\frac{x-x_c}{d}\right)^2\right] \quad (5)$$

をとろう。関数 $f(x)$ とフィルター関数 g_{x_c} の積

$$h(x) = f(x) g_{x_c}(x) \quad (6)$$

は x_c の d 近傍でのみ値を持つようにフィルターされた関数である。このフーリエ変換

$$\tilde{h}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{ikx} dx \quad (7)$$

の波数の大きいときの漸近形は、 $f(z)$ の特異点を $Z (= X + iY)$ とすると、

$$\tilde{h}(k) \propto \exp\left[ikZ - \frac{(Z-x_c)^2}{d^2}\right] \quad (8)$$

$$\text{ただし} \quad \left(\frac{kd}{2} - \frac{Y}{d}\right)^2 - \left(\frac{x_c - X}{d}\right)^2 \gg 1$$

と表される。従って、パワー・スペクトルの漸近形は

$$|\tilde{h}(k)|^2 \propto \exp\left[-2|k|Y + \frac{2}{d^2}(Y^2 - (X-x_c)^2)\right] \quad (10)$$

となる。すなわち、パワー・スペクトルの指数的減衰率が特異点の虚数部 Y を与える。また、特異点の実部 X が フィルター関数の中心 x_c から離れるとスペクトルの絶対値は急速に小さくなる。このフィルターの効果は、フィルター関数の幅 d が小さいほど大きい。このフィルターの方法は、Burgers 方程式の解の特異点の運動が調べるために既に用いられた。⁶⁾

4. 二次元ナビエ・ストークス流の数値計算

さて、二次元ナビエ・ストークス流の複素特異性について調べよう。

二次元非圧縮粘性流体の運動は渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x_1, x_2)} = \nu \nabla^2 \omega \quad (11)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (12)$$

で記述される。ここに、 $\omega(x_1, x_2)$ は渦度、 $\psi(x_1, x_2)$ は流れ関数、 ν は動粘性係数 ∇^2 は二次元ラプラシアンである。この方程式を初期条件

$$\psi(x_1, x_2; 0) = -\frac{1}{2}(\sin x_1 \sin x_2 + \sin 2x_1 \sin 2x_2) \quad (13)$$

から出発して、周期境界条件のもとで解く。ただし、基本周期領域は $0 \leq x_1, x_2 < 2\pi$ とする。

流れに対称性を仮定し、⁹⁾ 流れ関数を次のようにフーリエ sine 展

開する。

$$\varphi(x_1, x_2; t) = \sum_{k_1, k_2 = -\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \tilde{\varphi}(k_1, k_2; t) \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \quad (14)$$

ここに、 N は空間の分解精度を表わす自然数で、高速フーリエ変換が使えるように 2 のべきを選ぶ。

非線形項の計算は、擬スペクトル法を用いて行い、アライアジング相互作用は、いわゆる $2/3$ 則によって完全に落とす。¹⁰⁾ このため、計算に現われる最大波数は、 $N/2$ ではなくて $N/3$ となる。フーリエ変換に用いたモードの数は $N = 1024$ 、また時間発展は Leap-frog 法で時間刻みは $\Delta t = 10^{-3}$ 、粘性率は $\nu = 3 \times 10^{-4}$ である。

5. 流れ場の時間発展

図 2 は、流れ関数の時間変化である。流れは $x_1 = \pi$, $x_2 = \pi$ について反対称なので、基本領域 $0 \leq x_1, x_2 \leq \pi$ における流れ場が示してある。格子状の領域は流れ関数の値が正、白い領域は負の部分を表わしている。流体は全体として時計回りに回転している。

図 3 は渦度の時間発展である。図の中心 $(x_1, x_2) = (\pi/2, \pi/2)$ 付近で等渦度線は時間の経過とともにだんだん引き伸ばされていく様子が分かる。

図 4 は $-\nabla^2 \omega$ の変化である。図の中心付近の等高線の引き伸ばしがよりはっきりと現われている。

図 5 は $t = 2$ において、二点 $(0.2\pi, 0.8\pi)$ と $(0.8\pi, 0.2\pi)$ を結ぶ線分上の ψ , ω , $-\nabla^2 \omega$ の断面である。 ψ のグ

ラフからは全く分からないが、 ω , $-\nabla^2\omega$ のグラフでは中央 ($\pi/2$, $\pi/2$) のところに鋭いピークが見られる。この付近に複素特異点があると予想される。

6. 特異点の分布

図 6 は $t = 2$ におけるエネルギー・スペクトルを片対数で表示したものである。波数の大きいところの直線部分はスペクトルが指数関数的に減衰していることを示している。減衰率は約 0.13 で実面 $[(x_1, x_2)$ 面] に最も近い特異点の虚部が 0.07 の程度であることを示している。

さて、特異点の空間分布を調べるために、流れ関数に二次元フィルター関数

$$g_{x_c y_c}(x, y) = \frac{1}{\pi d^2} \exp\left[-\frac{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}{d^2}\right] \quad (15)$$

を掛けて、そのパワー・スペクトルをとってみる。

図 7 は図 4(c) の中心付近の拡大図である。フィルター関数の中心 (x_c, y_c) をこの範囲で動かしてみてもスペクトルを計算した。

図 8 は幾つかの (x_c, y_c) に対するフィルターを掛けたスペクトルである。波数の大きいところで指数的に減衰しているのが分かる。図 8(c) は図 7 の中心におけるスペクトルであるが、この場合指数的に減衰している部分が最も広い。

各 (x_c, y_c) について指数的減衰率を計算して実面に最も近い特異点の虚部 δ ($= \min \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2}$, ここに Y_1, Y_2 はそれぞれ変数 z_1, z_2 についての特異点の虚部) を求めると、図 9 のような等高線が

得られる。図の中央で値が最も小さい。右上がりの細長い領域の外側における δ の値は今のスペクトルからは判定できなかった。図 7 と比べてみると、実面に近い特異点は $-\nabla^2 \omega$ の値の大きいところに並んでいることが分かる。

図 10 は δ の分布を立体的に示したものである。全体としては直線 $x_1 = x_2$ に並行で放物形をしている。この直線の方から見ると中が凹んでいるのが特徴である。

図 11 は放物形の正面から見た断面である。黒丸は計算値である。実線は最小自乗法で求めた形で、

$$\delta = 0.056 \left| \frac{z}{\pi} \right|^{2,3} + 0.079 \quad (16)$$

と表される。

7. 特異点方程式

二次元ナビエ・ストークス方程式 (11), (12) を複素数に拡張し次のように書く。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(z_1, z_2)} = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \omega \quad (17)$$

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \psi \quad (18)$$

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2 \quad (19)$$

流れ関数 ψ の特異曲面を $f(z_1, z_2) = 0$ とし、特異面の近くで

$$\psi(z_1, z_2; t) = \psi_s(f) + \psi_r(z_1, z_2; t) \quad (20)$$

$$|\psi_s(f)| \rightarrow \infty \quad (f \rightarrow 0 \text{ のとき}) \quad (21)$$

とする。このとき (18) は特異面の近くで

$$\begin{aligned} \omega = & - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \right] \frac{d^2 \psi_s}{df^2} \\ & - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} \right) \frac{d \psi_s}{df} \end{aligned} \quad (22)$$

と近似される。また、(17) で特異性の最も強い項を拾うと、

$$\begin{aligned} & - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \right] \frac{\partial f}{\partial t} \frac{d^3 \psi_s}{df^3} \\ = & 2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} + \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \right) \frac{\partial f}{\partial z_2} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \right) \frac{\partial f}{\partial z_1} \right] \frac{d \psi_s}{df} \frac{d^2 \psi_s}{df^2} \\ & + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial \psi_r}{\partial z_2} - \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{\partial \psi_r}{\partial z_1} \right) \frac{d^3 \psi_s}{df^3} \\ & - 2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \right] \frac{d^4 \psi_s}{df^4} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

非粘性 ($\nu = 0$) の場合は、 $d^3 \psi_s / df^3$ 及び $d \psi_s / df \cdot d^2 \psi_s / df^2$ に比例する項が釣り合うためには

$$\psi_s = \ln f \quad (24)$$

で、これを (23) に代入すると

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \right] \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} + \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \right) \frac{\partial f}{\partial z_2} \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \right) \frac{\partial f}{\partial z_1} \right. \\ & \quad \left. - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{\partial \psi_r}{\partial z_2} - \frac{\partial f}{\partial z_2} \frac{\partial \psi_r}{\partial z_1} \right) \right] \quad (25) \end{aligned}$$

のような関係式が得られる。

これを一般的に解くのは難しいので、特別な場合として対称点の近傍での振る舞いを調べてみよう。今、 f と ψ_r を原点に関して点対称な関数

$$\left. \begin{aligned} f(z_1, z_2) &= f(-z_1, -z_2) \\ \psi_r(z_1, z_2) &= \psi_r(-z_1, -z_2) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

として原点の回りで次のようにテイラー展開する。

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + f_{20} z_1^2 + f_{11} z_1 z_2 + f_{02} z_2^2 + \dots \\ \psi_r &= \psi_0 + \psi_{20} z_1^2 + \psi_{11} z_1 z_2 + \psi_{02} z_2^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ただし、 $f_{20} = f_{11} = f_{02} = 0$ ではないとする。(27) を (25) に代入すれば、

$O(z_1^2)$ の項より

$$(4f_{20}^2 + f_{11}^2) \frac{df_0}{dt} = f_{11} (f_{11}^2 - 4f_{20}f_{02}) \quad (28)$$

$O(z_1 z_2)$ の項より

$$4f_{11}(f_{20} + f_{02}) \frac{df_0}{dt} = -2(f_{20} - f_{02})(f_{11}^2 - 4f_{20}f_{02}) \quad (29)$$

$O(z_2^2)$ の項より

$$(4f_{02}^2 + f_{11}^2) \frac{df_0}{dt} = -f_{11} (f_{11}^2 - 4f_{20}f_{02}) \quad (30)$$

が得られる。

仮定より、 f_{20} 、 f_{11} 及び f_{02} の全ては同時に零ではないから (28) と (30) より

$$\frac{df_0}{dt} = 0 \quad (31)$$

で、この時、次の二つの場合がある。

(a) $f_{11} = 4f_{20}f_{02}$ の場合。

$f_{20} = a$, $f_{11} = 2ab$, $f_{02} = b$ と置くと、

$$f = f_0 + (az_1 + bz_2)^2 + \dots \quad (32)$$

となる。

(b) $f_{11} = 0$, $f_{20} = f_{02} (= f_1)$ の場合は、

$$f = f_0 + f_1(z_1^2 + z_2^2) + \dots \quad (33)$$

となる。

8. 特異点のモデル

第 6 節で調べた δ の分布を与える特異点の形は特異点方程式の解になっているはずであるが、一般解を求めることは今のところできないので、ここでは関数 f を天下り式に与えて、それによって与えられる δ の形を数値計算の結果と比べてみよう。

図 9 ~ 図 11 のような δ の分布が出てくる f の形を前節の展開をも考慮しつつ試行錯誤でいろいろ試みた結果、次の関数に思い至った。

$$f(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{a}\right)^2 - 1 + 2i \left[c^2 + \left(\frac{z_1}{a}\right)^2 \left(\frac{z_2}{b}\right)^2 \right] \quad (34)$$

ここに、

$$a \approx 0.1, \quad b \approx 1.3, \quad c^2 \approx 0.08 \quad (35)$$

である。

関数 f の 3 つの断面の概観が図 12 (a), (b), (c) に示してある。それらが図 9 ～ 図 11 と極めてよく似た形になっていることに注目したい。

(34) の関数と特異点方程式の関係が当面の課題である。

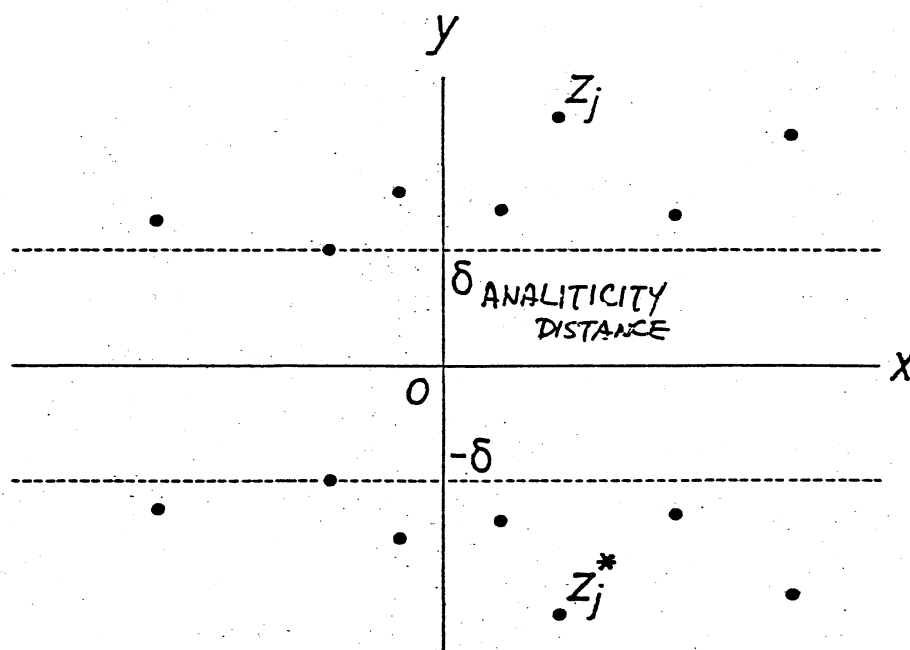


図 1. 特異点の分布

引用文献

- [1] U. Frisch and R. Morf: Phys. Rev. A23 (1981) 2673.
- [2] R.H. Kraichnan: Phys. Fluids 10 (1967) 2080.
- [3] C. Sulem, P.L. Sulem and H. Frisch: J. Comp. Phys. 50 (1983) 138.
- [4] U. Frisch, A. Pouquet, P.L. Sulem and M. Menegozzi: J. Mec. Theor. Appl. Special issue. (1983) 191.
- [5] R.H. Morf, S.A. Orszag, D.I. Meiron, U. Frisch and M. Menegozzi: Lecture Notes in Phys. 141 (1981) 292.
- [6] S. Kida: J. Phys. Soc. Japan 55 (1986) 1542.
- [7] O. Thual and U. Frisch: Combustion and non-linear phenomena, Les Houches, 1984 (ed. P. Clavin, B. Larrouturou and P. Pelce) Editions de Physique.
- [8] S. Kida: Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19 (1983) 1033.
- [9] M.E. Brachet and P.L. Sulem: Proc. 9th Intern. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Sacley, Lecture Notes in Physics (eds. Soubbaramayer and J.P. Boujot, Springer-Verlag), vol. 218, pp. 103 - 108.
- [10] S.A. Orszag: Stud. Appl. Math. 50, 293 (1971).

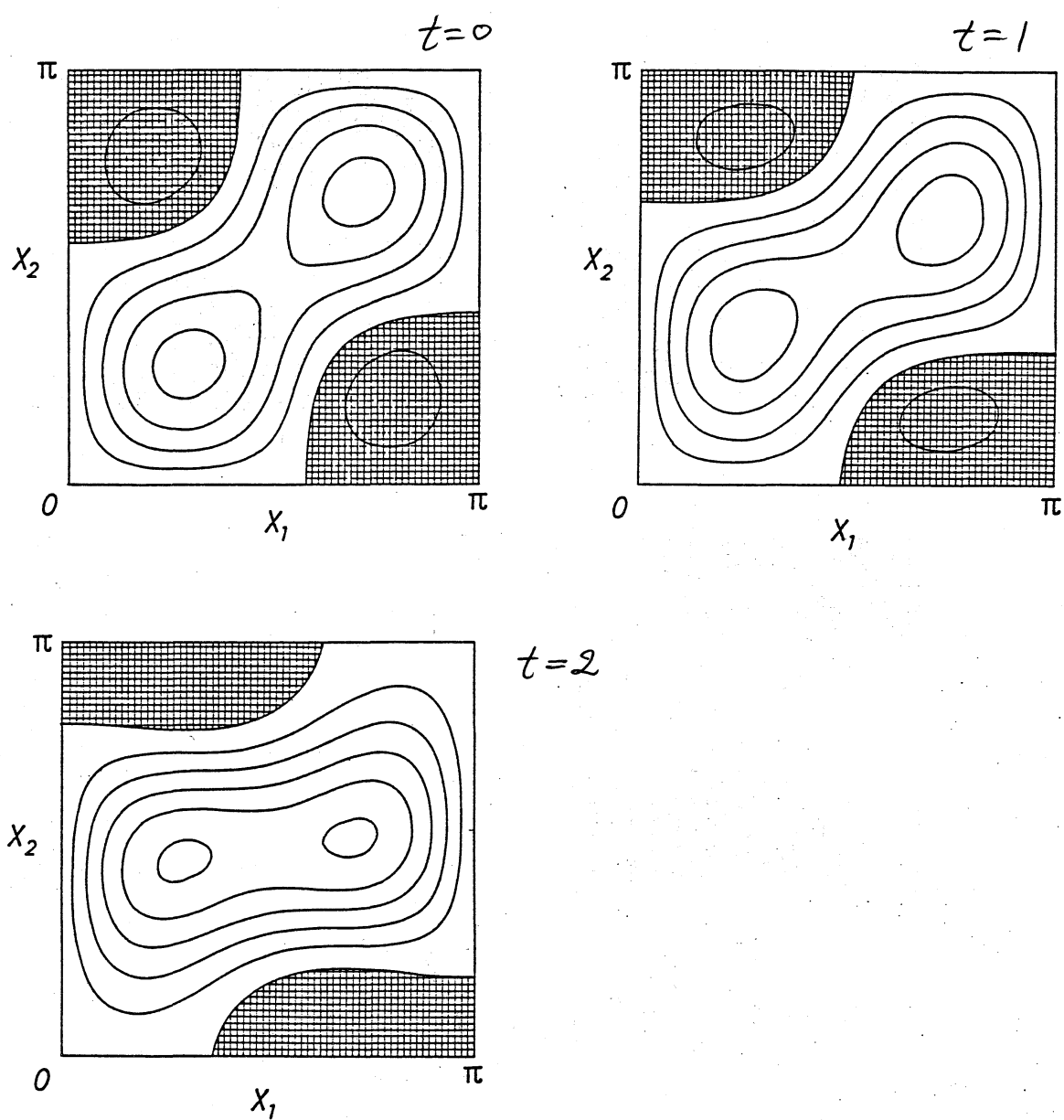


図2 流れ関数の時間変化

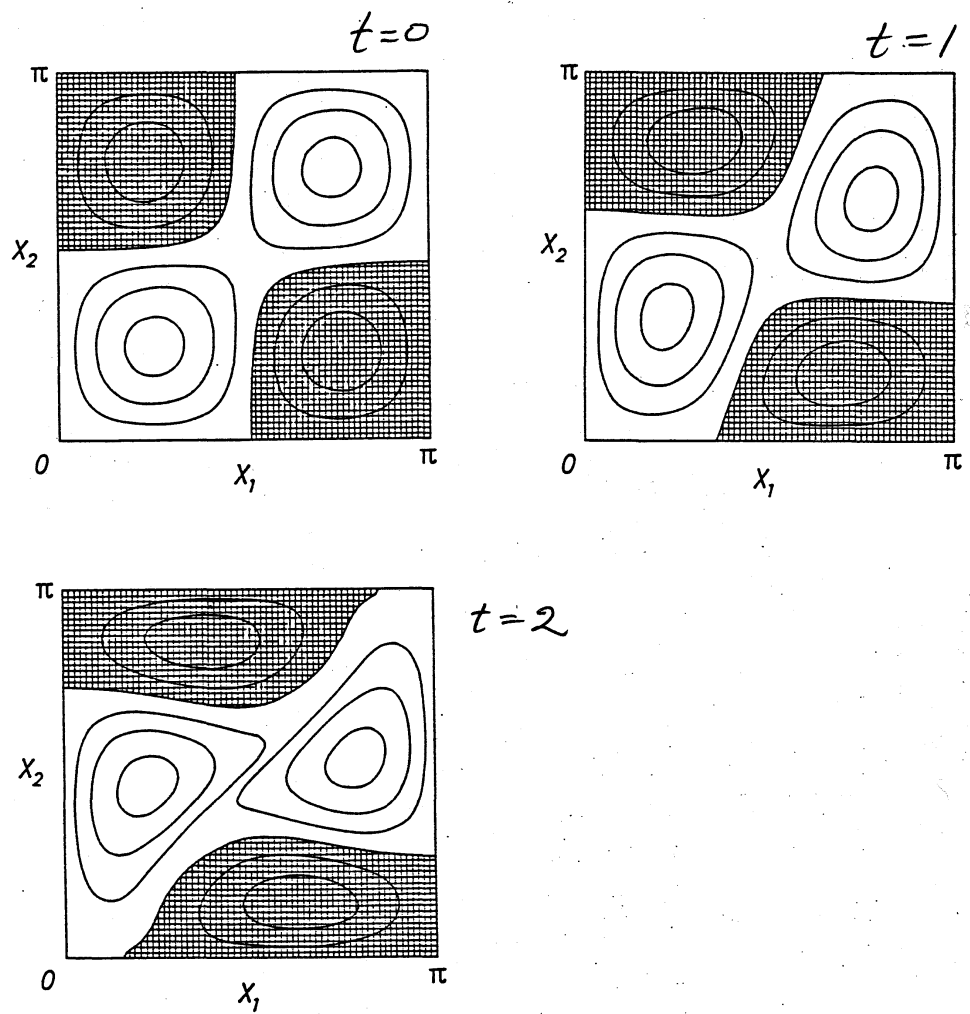


図2. 流山関数の時間変化

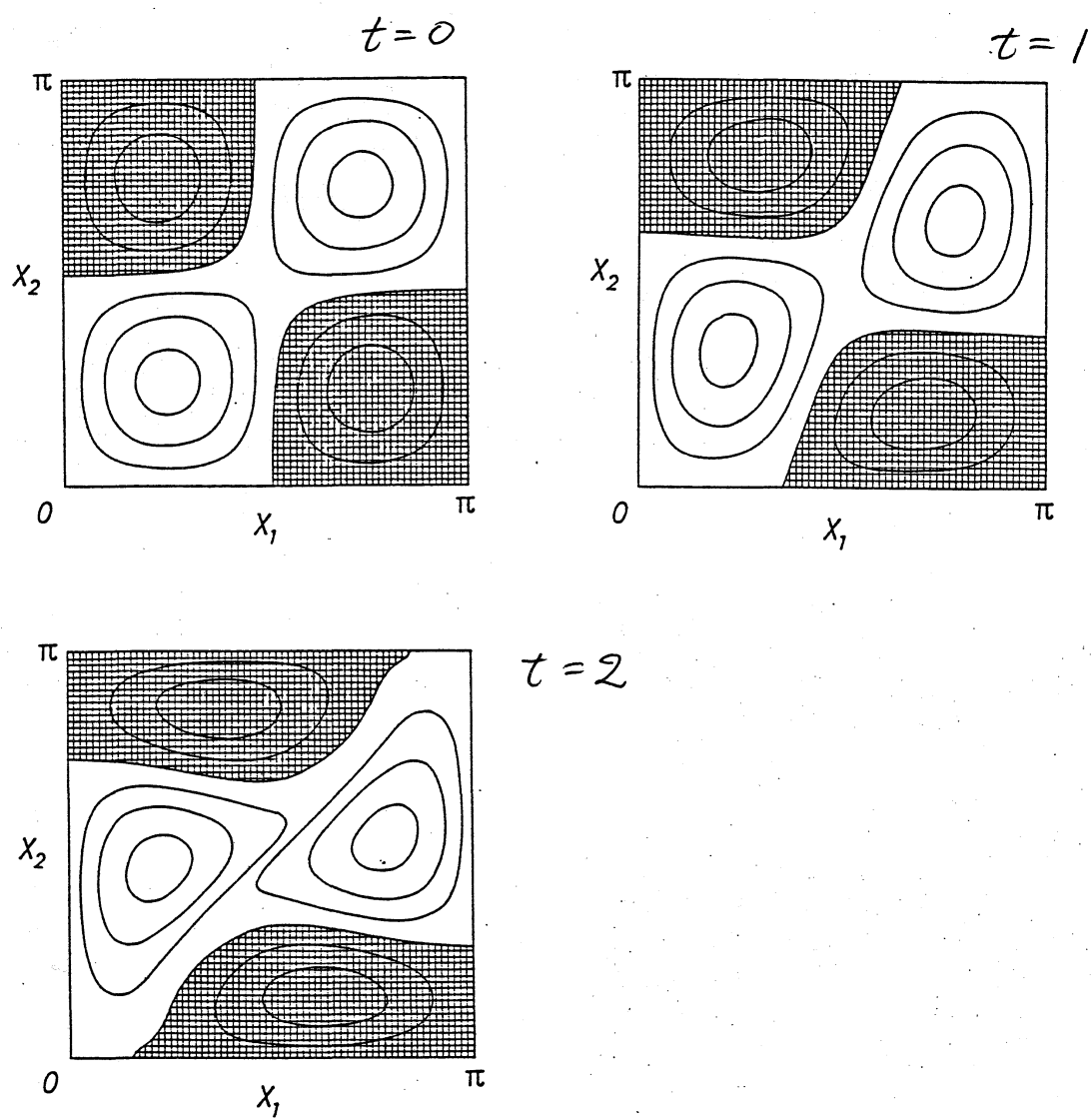


図3. 渦度の時間変化

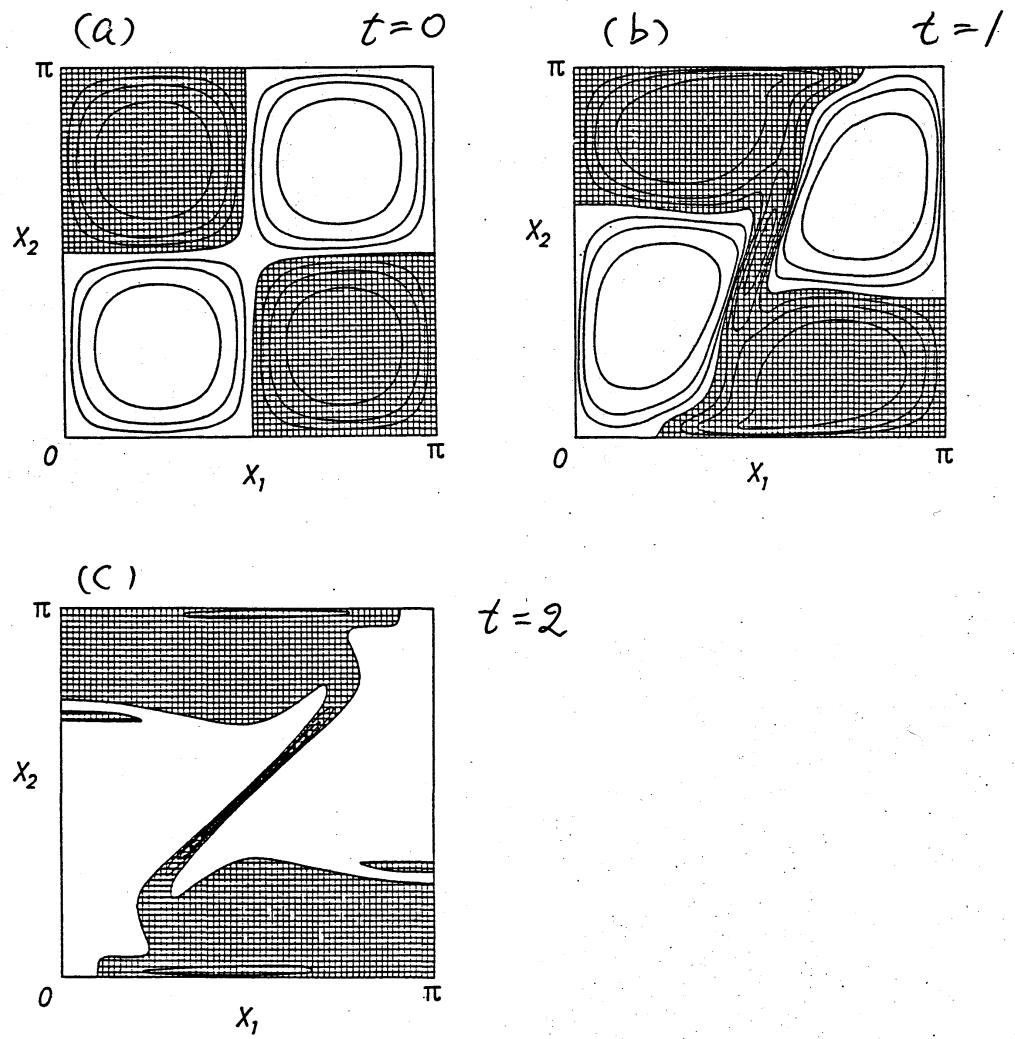


図4. $-\nabla^2 \omega$ の時間変化

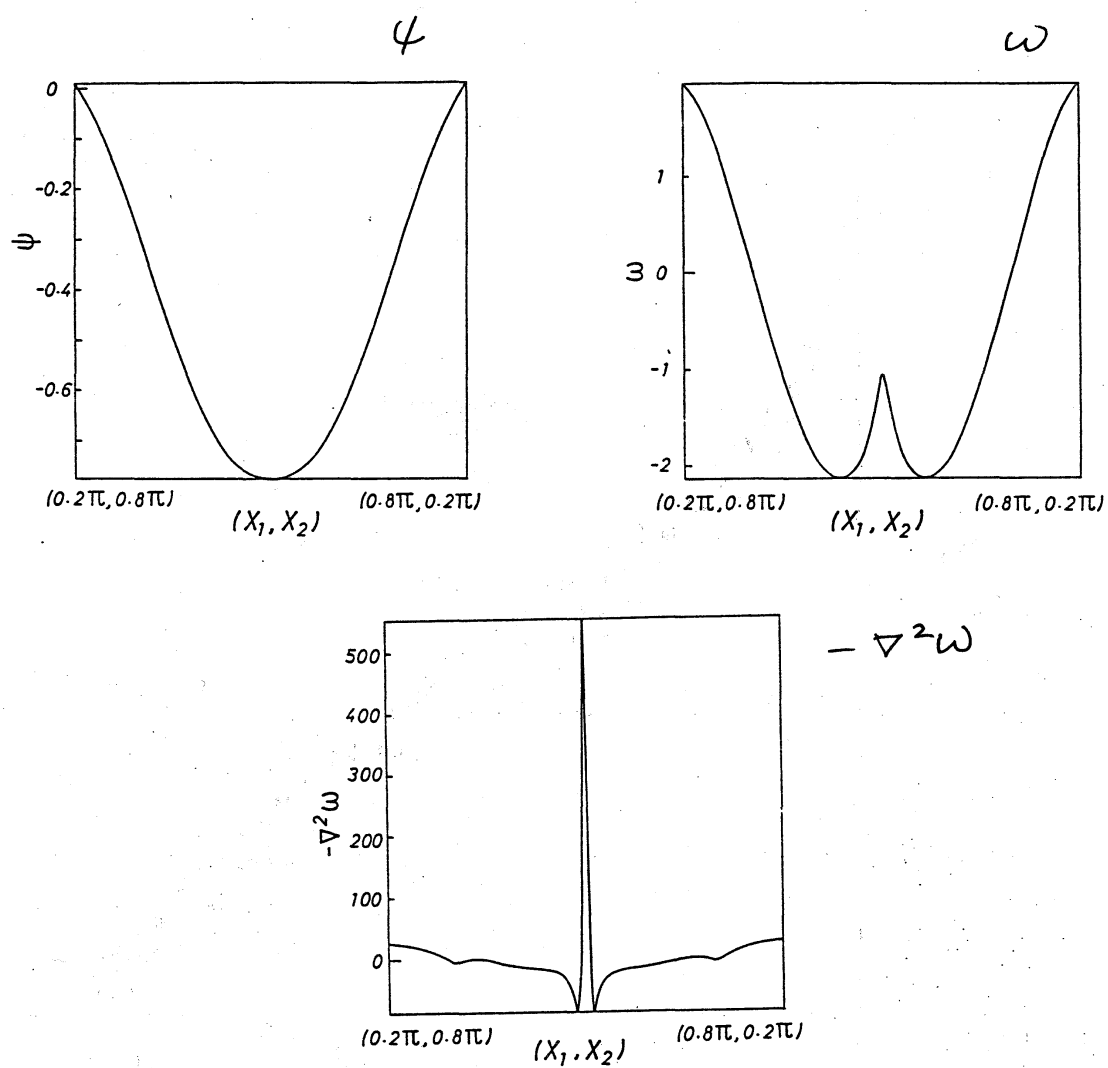


図5. $t=2$ における ψ , ω , $-\nabla^2\omega$ の断面

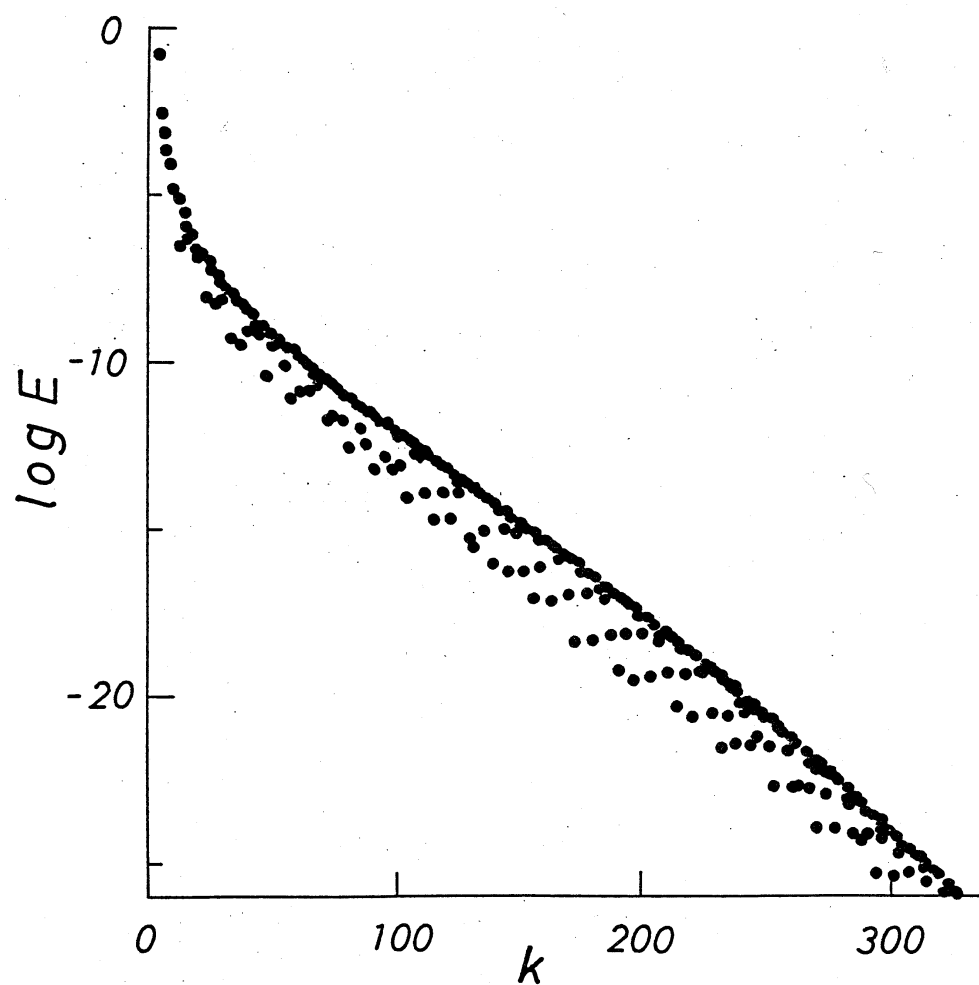


図 6. $t=2$ におけるエネルギー スパクトル.

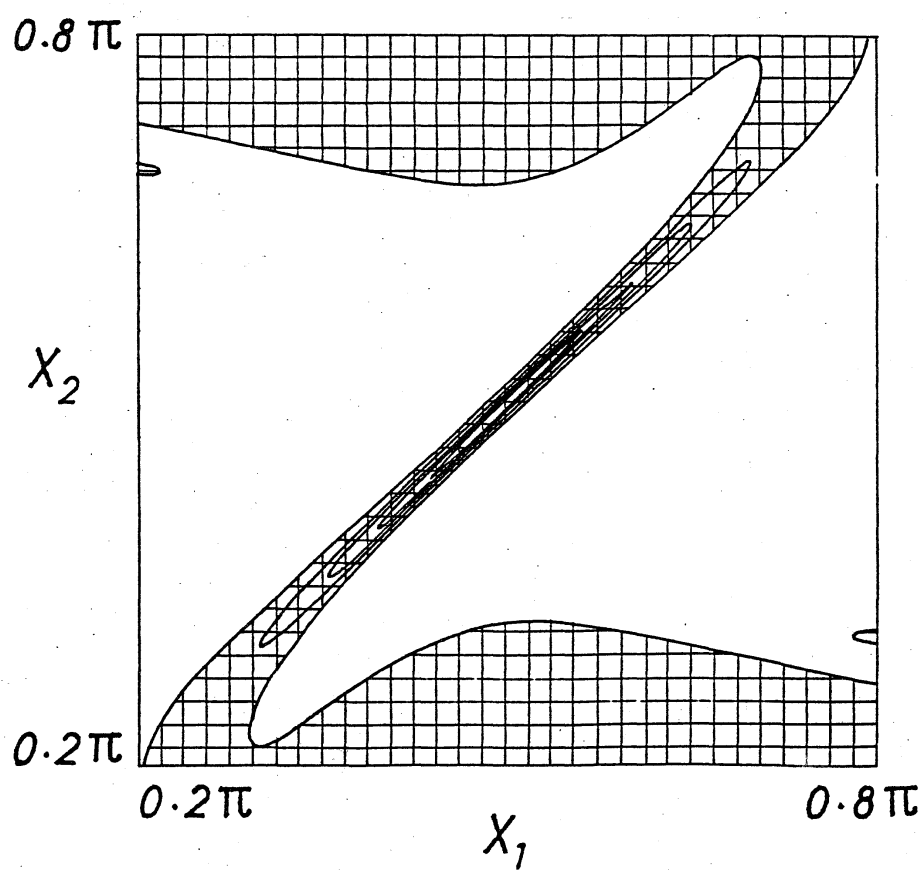
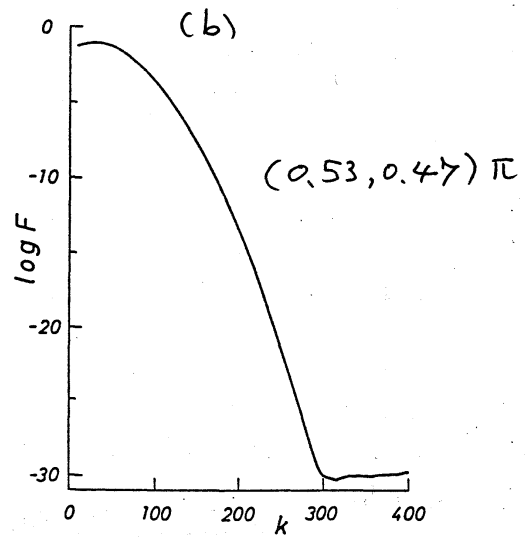
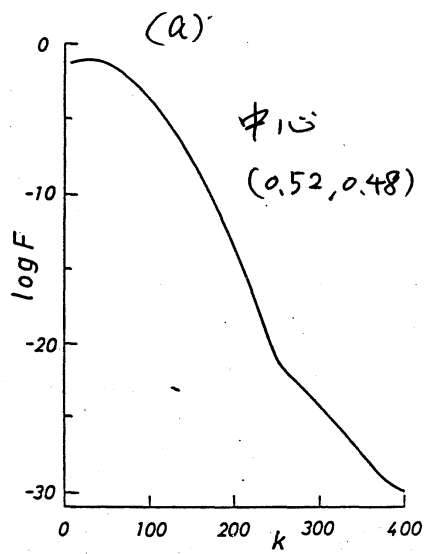
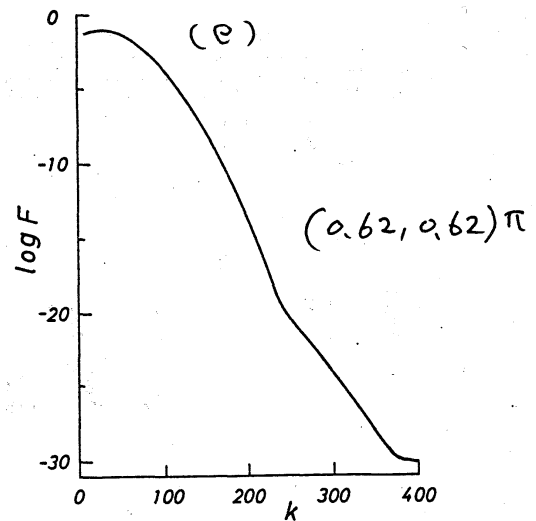
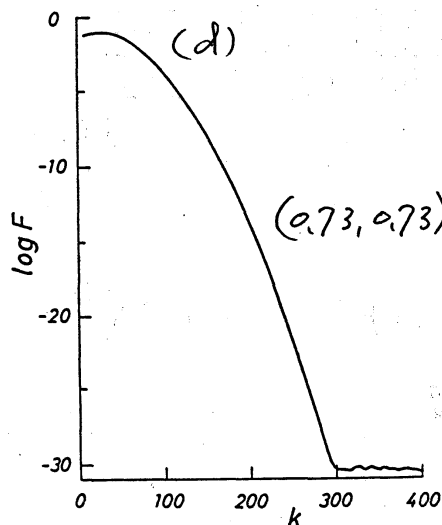
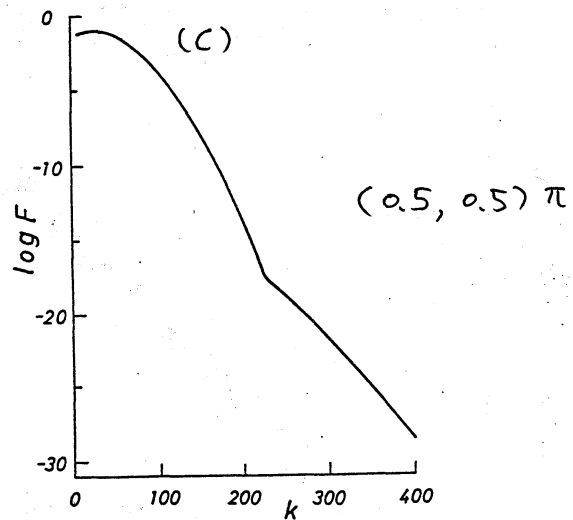


図 7. $t=2$ における $-\nabla^2 \omega$ の等高線.



例 8.

フィルタ-と
接続した
スペクトル



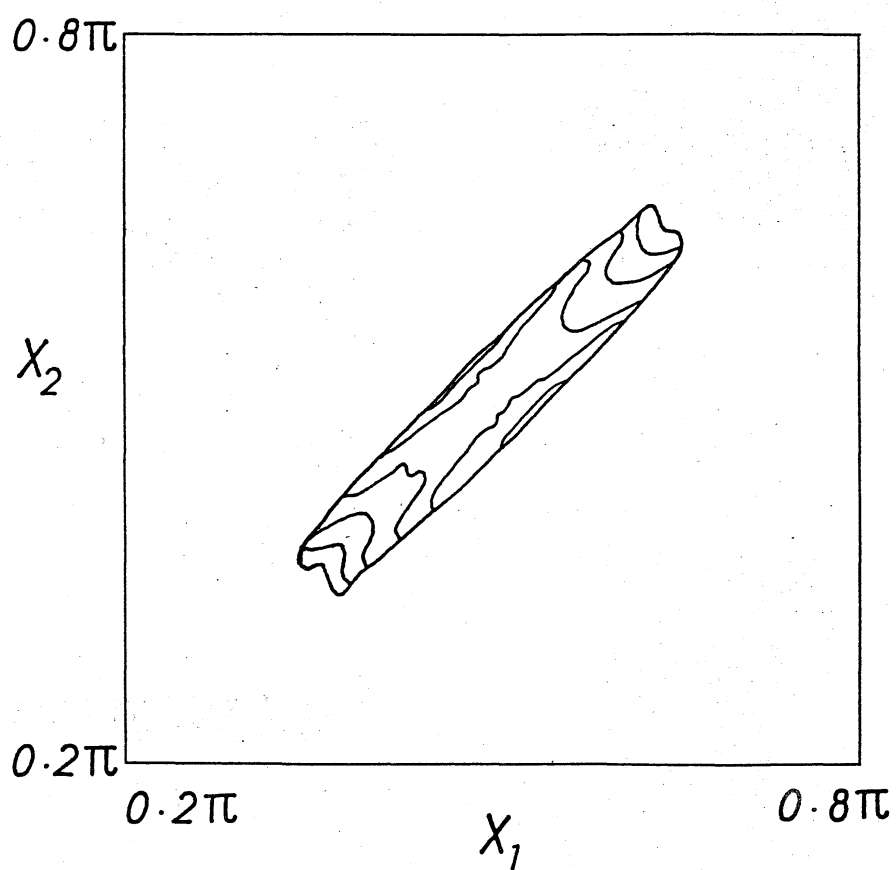
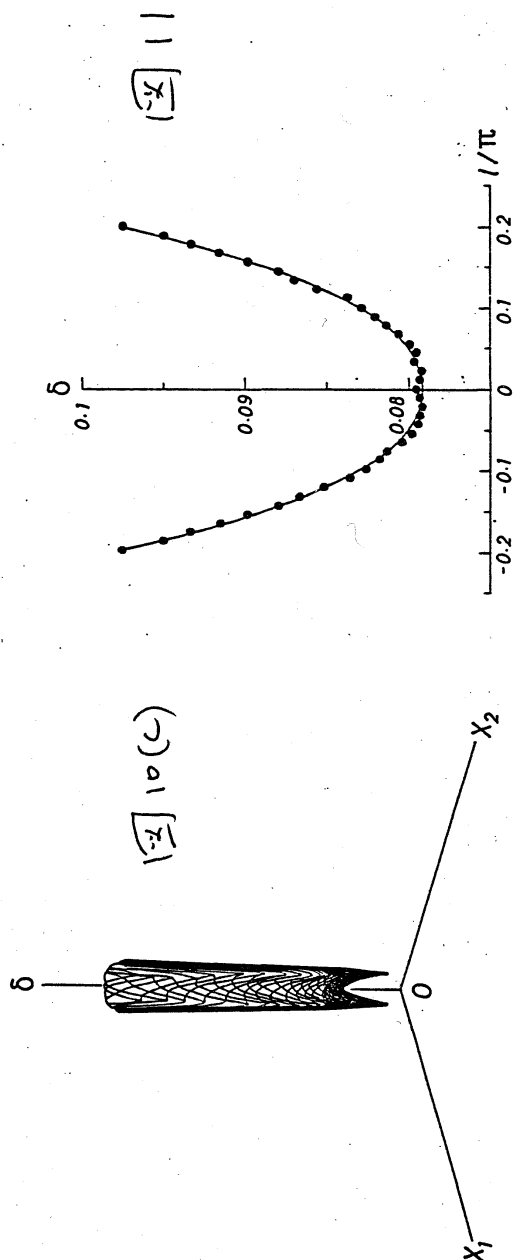
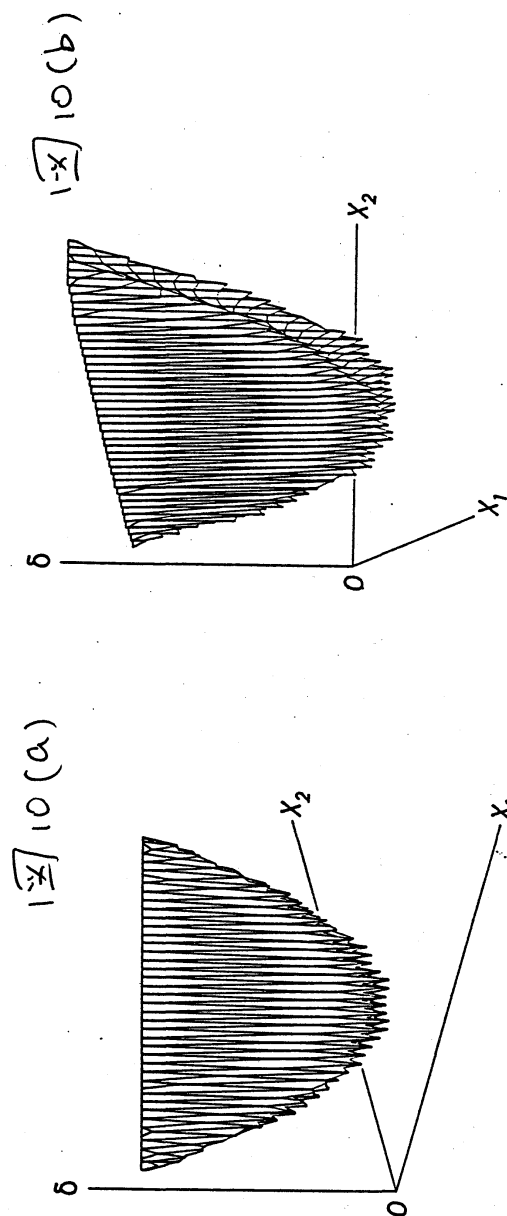


図9. δ の等高線



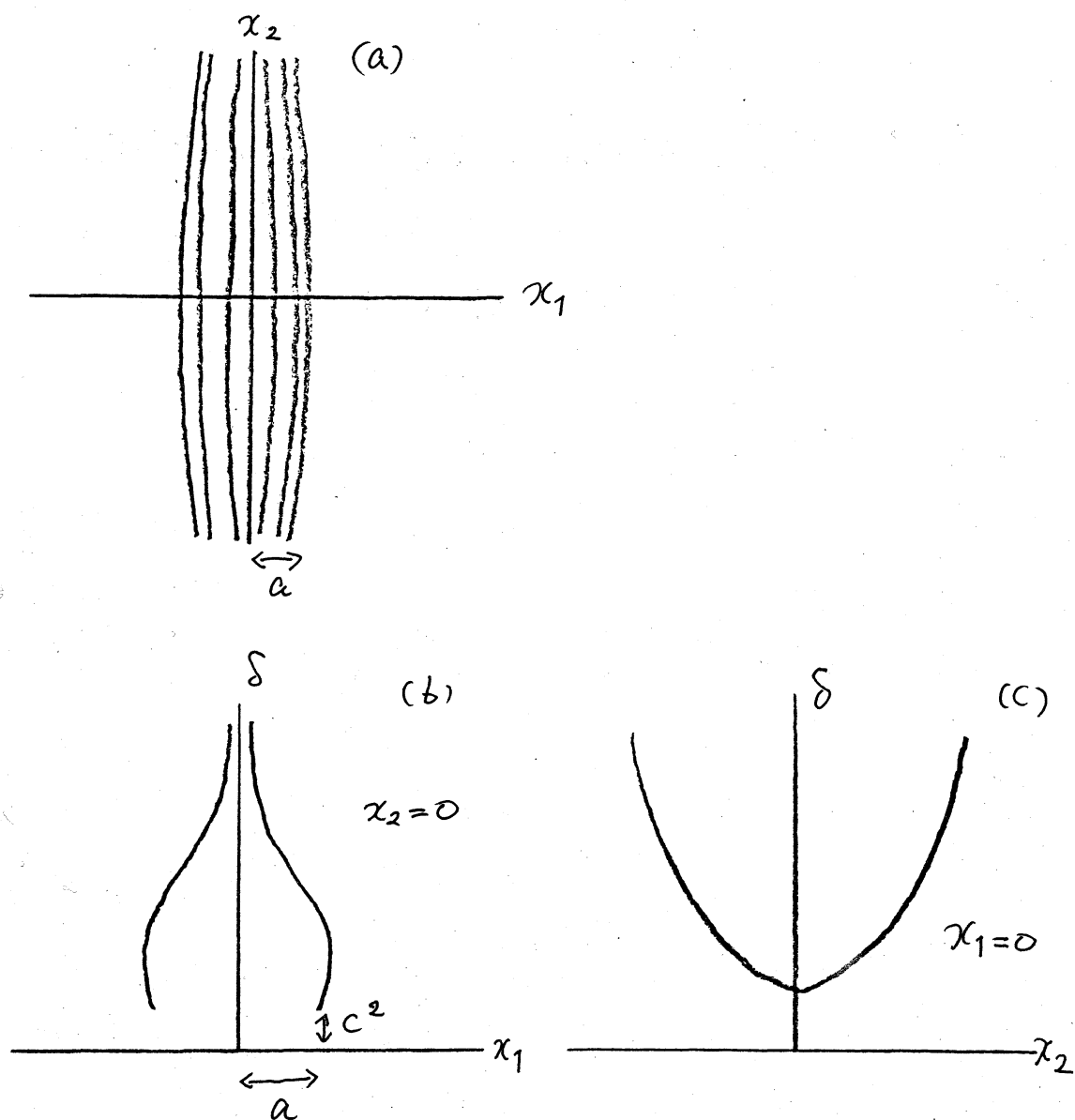


図 12. 特異点のモデル関数 の示す δ の分布.