

学 位 審 査 報 告 書

(ふりがな) 氏 名	いこま ひであき 生駒 英晃
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 号
学位授与の日付	平成 年 月 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理学研究科 数学・数理解析 専攻
(学位論文題目) The Faltings-Moriwaki modular height and isogenies of elliptic curves (ファルティンクス・森脇モデューラー 高度と楕円曲線の同種写像)	
論 文 調 査 委 員	(主査) 森脇 淳 教授 河野 明 教授 並河良典 教授

(論文内容の要旨)

1983 年に発表されたファルティングスのモデル予想の解決は、当時数学界において画期的なことであった。さらに、ファルティングスはその論文においてモデル予想のみならず、テート予想、シャファレヴィッチ予想も同時に証明を与えた。この論文において重要な役割を果たしたのが、ガロア表現の理論と高さ関数の理論である。ガロア表現の理論は数論的内容であるが、高さ関数の理論は代数幾何学的な要素である。高さ関数の理論の側面において、重要になってくるのが、ネロンモデルから定まるアーベル多様体のモジュラー高度である。これはアーベル多様体のモジュライ空間の理論から、モジュラー高度が有界のアーベル多様体は有限個のみであるという著しい特徴をもつ。したがって、その有界性を示すことで、シャファレヴィッチ予想、テート予想、モデル予想の示そうというのがファルティングスのアイデアである。しかしながら、豊かな性質をもったモジュラー高度は、従来、代数体上定義されたアーベル多様体のみに定義されていたものであったが、最近、森脇により、アラケロフ幾何を用いることで、豊かな性質をもったモジュラー高度が有理数体上有限生成な体上定義されたアーベル多様体上にまで拡張された。生駒氏の博士論文は、森脇によるモジュラー高度の有界性を示すことで、有理数体上有限生成な体上でのシャファレヴィッチ予想、テート予想、モデル予想を考えようという試みである。具体的には、生駒氏は以下のような結果を得た。

定理 K は有理数体上有限生成な体とし、 A は K 上のレベル 12 構造をもつ楕円曲線とする。このとき、以下の性質をもつ代数体 $K_1, \dots, K_n$ が存在する。

- (1) A と同種な K 上の楕円曲線 B は、任意の $i=1, \dots, n$ について、代数体 K_i 上に楕円曲線としての特殊化 B_i をもつ。
- (2) A と同種な K 上の楕円曲線 B について、

$$h_{\text{mod}}(A) - h_{\text{mod}}(B) = C(K_1, \dots, K_n, K) \sum_i (h_{\text{mod}}(A_i) - h_{\text{mod}}(B_i))$$

が成り立つ。ここで、 $C(K_1, \dots, K_n, K)$ は $K_1, \dots, K_n$ と K の偏極から定まる定数で、

$h_{\text{mod}}(\cdot)$ はファルティングス・森脇によるモジュラー高度である。

この定理は、楕円曲線という制限があるものの、有理数体上有限生成な体上の楕円曲線でのテート予想を示すには十分の結果であり、博士論文としての十分に価値のある内容である。

(論文審査の結果の要旨)

論文内容の要旨でも述べたように、生駒氏は、博士論文で、有理数体上有限生成な体上定義された同種な楕円曲線のファルティングス・森脇によるモジュラー高度の差の評価を与えている。これは、それ上でのテート予想等を解く上で極めて重要な評価式になる。実際、生駒氏のその評価式でそれ上でのテート予想を解決することができるものであり、内容のある結論である。評価式そのものは極めて簡潔なものであるが、それを導くためには、数々の困難が伴う。

まず、考えられるのがファルティングス・森脇によるモジュラー高度の定義の難しさである。それを定義するためには、定義体の偏極、すなわち、定義体を関数体とする射影算術多様体とその上の豊富なエルミート可逆層の対を固定する必要がある。生駒氏のアイデアは豊富なエルミート可逆層のゼロでない小さい切断から定まる部分多様体を考えることによって帰納的に証明しようというものである。しかしながら、このアイデアを実行するには、技術的な種々の障害が伴う。一つ目は、よい小さい切断を如何にうまくとるかということであり、二つ目は小さい切断から定まる部分多様体上でのアーベル多様体のよいモデルを如何にしてとれるかという問題である。一番目の問題については比較的よい解答があるが、二番目の問題については、必ずしもうまく取れないことがあることが、ドゥヨン・オルトに例によりわかる。しかしながら、生駒氏はこの困難を、算術多様体の爆発により回避し、結論を得ている。しかも、その爆発は制御されたものである必要があり、これらの技術的要請から、生駒氏の結果は楕円曲線に限られる。しかしながら、そこに用いられている高度な手法・アイデアは博士論文として、十分に評価できるものであると判断した。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。