

Martingale 積分について

東北大理 風 巻 記 号

本稿の前半で、local martingale の時間変更についての、
いくつかの結果を、後半は weak martingale の概念を導入
し、その基本的性質を述べて、weak martingale に関する確
率積分を考察する。

1. 時間変更による変換

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間、 $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ を $\mathcal{F}$ の sub σ -fields
の右連続単調増加な族とし、測度 0 の集合は $\mathcal{F}_0$ に属するもの
とする。この $(\mathcal{F}_t)$ に関する stopping times の class を $ST(\mathcal{F}_t)$
と書く。

定義 1. 次の条件をみたす $T = (\mathcal{F}_t, \tau_t)$ を時間変更と行う。

- (1) 各 τ_t が有限で、 $ST(\mathcal{F}_t)$ に属する。
- (2) 確率 1 で、sample path $t \rightarrow \tau_t(\omega)$ が右連続・単調
増加である。

特に、確率 1 で sample path $t \rightarrow \tau_t(\omega)$ が連続のとき、 T は

な martingale といふ。 $\mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$ あるいは $\mathcal{L}$ を local martin-
gales の全体とする。

定理 1. $M \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$, $T = (\mathcal{F}_t, \tau_t)$ が M -連続時間変数なる
とき, $TM = (M_{\tau_t}, \mathcal{F}_{\tau_t}) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\tau_t})$ である。

証明. $N_t = M_{\tau_t}$ とおく。定義より

$$S.T(\mathcal{F}_t) \ni \exists T_n \uparrow \infty; (M_{t \wedge T_n} I_{\{T_n > 0\}}) \in \mathcal{U}'(\mathcal{F}_t)$$

いふ。 $J_n \equiv \inf\{u \geq 0; \tau_u \geq T_n\}$ とおくと, これは $S.T(\mathcal{F}_{\tau_t})$
に属する。 $P\{J_n \uparrow \infty\} = 1$, $\{0 < J_n\} \subset \{0 < T_n\}$ であるか
ら, 従って

$$\forall n, (N_{t \wedge J_n} I_{\{0 < T_n\}})_{0 \leq t < \infty} \in \mathcal{U}'(\mathcal{F}_{\tau_t})$$

なることを証明すればよい。

$D_n \equiv \tau_{J_n-0}$, $E_n \equiv \tau_{J_n}$ とおくと, $t < J_n$ のとき

$$N_{t \wedge J_n} = M_{\tau_t \wedge T_n}$$

$t \geq J_n$ のとき

$$N_{t \wedge J_n} = M_{E_n}.$$

ところが, 仮定によつて, T が M -連続であるから

$$M_{E_n} = M_{T_n} \quad (\forall \omega \in \{D_n \leq E_n\})$$

$$\text{i.e. } N_{t \wedge J_n} = M_{\tau_t \wedge T_n} \quad \text{a.s.}$$

Doob's optional sampling theorem より

$$\forall n, (M_{\tau_t \wedge T_n} I_{\{\tau_n > 0\}}) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\tau_t}).$$

従って、定理が証明される。

$\mathcal{L}$ が時間変更に関して閉じていない点に注意を要する。

例 1. $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ を条件: $P\{\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} M_t = \infty\} = 1$ を満たす連続な martingale とする。たとえば、1次元 Brown 運動はこの条件を満たす。いま、 $\tau_t = \inf\{u \geq 0; M_u \geq t\}$ とおくと、 $T = (\mathcal{F}_t, \tau_t)$ は、 $M_{\tau_t} = t$ a.s. を満たす時間変更であり、明らかに、process $(t, \mathcal{F}_{\tau_t})$ は、 $\mathcal{L}$ に属さない。

以下、local martingale M 且、 $M_0 = 0$ と仮定する。

定理 2. $\forall M \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t) \quad \exists S = (\mathcal{F}_t, s_t)$ 連続な時間変更

$$\exists (1) \quad s_0 = 0, s_\infty = \infty \quad \text{a.s.}$$

$$(2) \quad SM : \text{martingale}$$

証明. 一般性を失うことなく $T_0 = 0$ 、若 T_n は有限である と仮定できる。このとき、 $s_t^n = T_{n-1} \vee (T_n \wedge t)$ 、とおくと $s_0^n = T_{n-1}$ 、 $s_\infty^n = T_n$ 且、 $S^n = (\mathcal{F}_t, s_t^n)$ は連続な時間変更を成す。 $\varphi_n : [n-1, n] \rightarrow [0, \infty]$ を単調増加な bijection とす

るとき

$$S_{g_n(n-1)}^n = S_0^n = T_{n-1} = S_{\infty}^{n-1} = S_{g_{n-1}(n-1)}^{n-1}$$

となるから, $S_t = S_{g_n(t)}^n$ if $n-1 \leq t < n$ が定義できて,

$$S_0 = S_{g_1(0)}^1 = S_0^1 = T_0 = 0$$

$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{g_n(n)}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\infty}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$$

従って, $S = (\mathcal{F}_t, S_t)$ は, 条件 (1) を満たす連続な時間変数である。 $\forall n$, $S_n = T_n$ なることに注意して, Doob's optional sampling theorem を用いると $(M_{S_t}, \mathcal{F}_{S_t})$ が martingale であることがわかる。

注意. S が正規であるかどうかは, こゝまでのところ不明である。

定理 3. $(\mathcal{F}_t)$ が擬左側連続のとき, 任意の局所自乗可積分 martingale $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ に対し, 正規時間変数 $T = (\mathcal{F}_t, \tau_t)$ が与えて, $TM = (M_{\tau_t}, \mathcal{F}_{\tau_t})$ が自乗可積分な martingale となる。

証明. Meyer の定理から, 単調増加で連続な process (A_t)

が存在し、 $(M_t^2 - A_t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$. $\therefore \lambda_t = t + A_t$,
 $\theta_t = \inf\{u \geq 0; \lambda_u > t\}$ とおくと、 $\mathbb{H} = (\mathcal{F}_t, \theta_t)$, $\Lambda = (\mathcal{F}_{\theta_t}, \lambda_t)$
 が、いづれも正規時間変換をなす。 $\lambda_{\theta_t} = t$ より、 $\theta_t \leq t$,
 $A_{\theta_t} \leq t$, 又、Doob's optional sampling theorem より、

$$(M_{\theta_t}^2 - A_{\theta_t}) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_{\theta_t}).$$

従って、

$$\exists \beta_n \uparrow \infty, \beta_n \in S.T(\mathcal{F}_{\theta_t}) ; (M_{\theta_t \wedge \beta_n}^2 - A_{\theta_t \wedge \beta_n})_{0 \leq t < \infty} \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_{\theta_t})$$

従って、 $E[M_{\theta_t \wedge \beta_n}^2] = E[A_{\theta_t \wedge \beta_n}] \leq t$, 同様にして、 $\{M_{\theta_t \wedge \beta_n}\}_{n=1,2,\dots}$
 は一様可積分となる。ゆえに $\mathbb{H}M$ は martingale である。
 さらに、Fatou's lemma より、 $M_{\theta_t} \in L^2 \quad \forall t \geq 0$. 従って
 $\mathbb{H}M$ は自乗可積分な martingale である。 故に $M = \Lambda(\mathbb{H}M)$
 が成立する。

2.- Weak martingales

定義3. 次の条件を満たす process $M = (M_t, \mathcal{F}_t) \in$ weak
 martingale とする:

$$S.T(\mathcal{F}_t) \ni \exists T_n \uparrow \infty \quad \exists M^n = (M_t^n, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}^1, n=1,2,\dots$$

$$; \quad M_t = M_t^n \quad \text{if } t < T_n$$

local martingale は weak martingale である。 然し、

の逆は一般に成立しない。たとえば、有界かつ連続な weak martingale M を必ずしも martingale とはいえない。

例 2. $X = (X_t)$, $X_0 = 0$, は a Poisson process of parameter λ , $X_n, 0 \leq t$, から生成される $\mathcal{F}_t$, S は X の first jump time とするとき, $P\{S > t\} = e^{-\lambda t}$ となる。簡単な計算から

$$E[S - \frac{1}{\lambda} | \mathcal{F}_t] = \begin{cases} t & \text{if } t < S \\ S - \frac{1}{\lambda} & \text{if } t \geq S \end{cases}$$

を得る。これは、適当な確率空間上で、互に独立な

Poisson processes $X^n = (X_t^n)$, $X_0^n = 0$, of parameter n^{-3} , $n = 1, 2, \dots$ を考えよう。 $\mathcal{F}_t$ は $\{X_n, 0 \leq t, n = 1, 2, \dots\}$ から生成される $\mathcal{F}_t$ とする。 Borel-Cantelli's lemma を用いると, X^n の first jump time S_n は, $n \rightarrow \infty$ のとき $+\infty$ に概収束する $\sim$ とわかる。従って、各 n に対し, $t < S_n$ のとき

$$E[S_n - n^{-3} | \mathcal{F}_t] = t$$

が成立する $\sim$ と注意すると, process $(t, \mathcal{F}_t)$ の weak martingale なる $\sim$ とわかる。この process は, local martingale ではない。

定理 4. $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ が weak martingale のとき、任意の時間変数 $T = (T_t, \tau_t)$ に対し, TM が又 weak martingale となる。

証明. 定義より,

$$S.T(\mathcal{F}_t) \ni \exists T_n \uparrow \infty, \exists (M_t^n) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t) ; M_t = M_t^n \text{ if } t < T_n$$

より, $S_n \equiv \inf\{u \geq 0; \tau_u \geq T_n\} < \infty$. $S_n \in S.T(\mathcal{F}_{\tau_n})$ である.

$$S_n \uparrow \infty, \{t < S_n\} \subset \{\tau_t < T_n\}$$

とわかる。Doob's optional sampling theorem から

$$\forall n, (M_{\tau_t}^n) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_{\tau_t})$$

より, $M_{\tau_t} = M_{\tau_t}^n$ if $t < S_n$. 従って, M は weak martingale である。

定理 5. Process $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ が, 次の条件をみたすとき, weak martingale となる:

$$S.T(\mathcal{F}_t) \ni \exists R_n \uparrow \infty, \exists (M_t^n, \mathcal{F}_t) \text{ weak martingales} \\ ; M_t = M_t^n \text{ if } t < R_n$$

証明. 各 M_t^n が weak martingale であるから

$$S.T(\mathcal{F}_t) \ni \exists R_n', \exists (\hat{M}_t^n, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{M}^1 \\ ; M_t^n = \hat{M}_t^n \text{ if } t < R_n', P\{R_n' < R_n\} < 2^{-n}.$$

Borel-Cantelli's lemma より, $R_n' \uparrow \infty$ と仮定できる。

$T_n \equiv R_n \wedge R_n'$ は, $S.T(\mathcal{F}_t)$ に属し

$$T_n \uparrow \infty, M_t = \hat{M}_t^n \text{ if } t < T_n$$

とわかる。従って, M は weak martingale である。

注意. 確率空間によらず, weak martingale と martingale が一致するところがある。次に, その重要な例を示す。

$\Omega \equiv \mathbb{R}_+$, Ω の linear Borel sets から成る σ -field を $\mathcal{F}^0$, S を identity mapping $\omega \rightarrow S(\omega) \in \mathbb{R}_+$ とし, さらに $\mathcal{F}_t^0$ を $S \wedge t$ によって生成される σ -field とする。簡単のため, Ω 上の確率測度 $\mathbb{P}$ を, $\mathbb{P}\{S > t\} = e^{-t}, t \geq 0$ によって定める。 $\mathcal{F}^0, \mathcal{F}_t^0$ の $\mathbb{P}$ -completion を $\mathcal{F}, \mathcal{F}_t$ と書く。

よって, いま $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ を任意の weak martingale とする。

i.e. $S.T(\mathcal{F}_t) \ni \exists T_n \uparrow \infty \quad \exists (M_t^n) \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t) ; M_t = M_t^n \text{ if } t < T_n$
各 T_n は有界と仮定できる。このとき

$$\bar{R}_t \ni \exists a_n \uparrow \infty \quad ; \quad \begin{cases} \text{(i)} & T_n \gg S \quad \text{a.s. if } S \leq a_n \\ \text{(ii)} & T_n = a_n \quad \text{a.s. if } S > a_n \end{cases}$$

が成立する。 $a \leq t < a$ のとき

$$M_a^n = E[M_t^n | \mathcal{F}_a] = M_t^n I_{\{S \leq a\}} + E[M_t^n | \mathcal{F}_a] I_{\{S > a\}}$$

従って, $M_t^n = M_a^n \text{ if } S \leq a$ なる

$$\forall n, \forall t, \quad M_t^n = M_{t \wedge S}^n \quad \text{a.s.}$$

ところで, M_t^n, M_t は, $\{S > t\}$ 上で constant C_t^n, C_t となるから,

$$M_t^n = M_S^n I_{\{S \leq t\}} + C_t^n I_{\{S > t\}}$$

$$M_t = M_S I_{\{S \leq t\}} + C_t I_{\{S > t\}}$$

と書ける。 $t < a_n$ のとき, $\{a_n < S\} \subset \{t < S\}$ 。従って, $\{a_n < S\}$

上で, $M_t = M_t^n$ となるから, $M_t^n = M_S^n I_{\{S \leq t\}} + C_t I_{\{S > t\}}$ となる。

ゆえに, $A \leq t < A_n$ のとき

$$\int_{A, \infty[} M_t^n dP = \int_{A, \infty[} M_A^n dP = C_A e^{-A}$$

よって, $\int_{A, t]} M_S^n dP = C_A e^{-A} - C_t e^{-t}$, $(A \leq t < A_n)$ が成立する。

従って, $M_S^n I_{[0, A_n]} = M_S^{n+k} I_{[0, A_n]}$ が示さねばならぬ。 $t < A_n$ のとき,

$M_S^n I_{\{S \leq t\}} = M_S^n I_{\{S \leq t\}}$ とする。従って, $t < A_n$ のとき,

$M_t = M_t^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$, に注目すると, M が実は martingale

なることがわかる。

なお, 任意の t に対し, mapping $\omega \rightarrow M_t(\omega)$ が左側連続の

とき,

$$M_S(\omega) = - \lim_{h \downarrow 0} \frac{C_\omega - C_{\omega-h} e^h}{h}, \quad \omega > 0$$

となる。

この公式は, (4) があればえられて, martingale を作る際に便利である。

3.- Weak martingale に関する確率積分

定義 4. 次の条件を満たす process $H = (H_t, \mathcal{F}_t)$ を locally bounded predictable process とする:

$S.T.(\mathcal{F}_t) \ni \exists S_n \uparrow \infty$; $(\forall n), (H_{t \wedge S_n} I_{\{S_n > 0\}}, \mathcal{F}_t)$ bounded predictable process

この processes の全体を $\mathcal{P}$ で示す。

たとえば, 左側連続な process は, $\mathcal{P}$ に属する。

確率 1 の sample path が右連続単調増加 の 点 $t=0$ で 0 と なる process の全体を $\mathcal{V}^+$ とし, $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^+$ とおく。

定義 5. Process $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$ が, $X_t = X_0 + M_t + A_t$; $(M_t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_t)$, $(A_t) \in \mathcal{V}$ と書けるとき, semi-martingale と いう。

Doleans-Meyer [1] に従い, 任意の $H \in \mathcal{P}$ に対し, semi-martingale X に関する確率積分 $H \circ X$ を

$$(H \circ X)_t = H_0 X_0 + (H \circ M)_t + (H \circ A)_t$$

と定義する。ここで, $H \circ M$ は local martingale M に関する確率積分, $H \circ A$ は右 ω を fix したときの Stieltjes 積分で定義されたものである。

以下, $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$ を weak martingale, T_n, M_t^n を定義 3 の条件を満たす stopping time, 一様可積分な martingale とする。

補題 3. 任意の n に対し, $M^{T_n} \equiv (M_{t \wedge T_n}, \mathcal{F}_t)$ は semi-martingale である。

証明. 一般性を失うことなく

$$\forall n, \quad M_t^n = M_{t \wedge T_n}^n$$

を仮定する。いま, $\hat{M}_t^n \equiv E[(M_{T_n}^n)^+ | \mathcal{F}_t]$,

$\bar{H}_t^n \equiv E[(M_{T_n}^n)^- | \mathcal{F}_t]$ とおくと, $\bar{H}^n, \bar{H}^n$ はそれぞれ $\mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$ に属する.

従って, $\bar{Y}_t^n \equiv \bar{H}_t^n I_{\{t < T_n\}}$, $\bar{Y}_t^n \equiv \bar{H}_t^n I_{\{t < T_n\}}$ は, class (D) に属する potential を作る. Meyer の Doob 分解定理を用いると

$$\bar{Y}_t^n = \bar{U}_t^n - \bar{V}_t^n, \quad \bar{Y}_t^n = \bar{U}_t^n - \bar{V}_t^n; \quad \bar{U}^n, \bar{U}^n \in \mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t), \bar{V}^n, \bar{V}^n \in \mathcal{V}^+$$

と分解される. $U_t^n \equiv \bar{U}_t^n - \bar{U}_t^n$, $V_t^n \equiv \bar{V}_t^n - \bar{V}_t^n$ とおくと, U^n は $\mathcal{M}^1(\mathcal{F}_t)$ に, V^n は $\mathcal{V}$ に属する. $M_t = U_t^n + V_t^n$ if $t < T_n$ から

$$M_t^{T_n} = M_{t \wedge T_n} = U_t^n + V_t^n + M_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}}$$

process $(V_t^n + M_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}}, \mathcal{F}_t)$ は $\mathcal{V}$ に属する. 従って, M^{T_n} は, semi-martingale である.

なお, $M_t^n = U_t^n + V_t^n + M_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}}$ とする. 補題 3 の証明中の記号は以後続けて用いることにする.

定理 6.

$$\left. \begin{array}{l} \forall M = (M_t, \mathcal{F}_t) \text{ weak martingale} \\ \forall H = (H_t, \mathcal{F}_t) \in \mathcal{Q} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \exists^1 (H \circ M) = ((H \circ M)_t, \mathcal{F}_t) \\ \text{weak martingale} \\ \ni (H \circ M)_t = (H \circ M^{T_n})_t \\ \text{if } t \leq T_n. \end{array}$$

証明. $H \in \mathcal{Q}$ に対し, 定義 4 の条件を満たす S_n は T_n と等しいと仮定できる. 補題 3 によって, M^{T_n} が semi-martingale

であるから.

$$(H \circ M^{T_n})_t = (H \circ U^n)_t + (H \circ V^n)_t + H_{T_n} M_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}}$$

従って, $(H \circ M^{T_n})_{t \wedge T_n} = (H \circ M^{T_{n+1}})_{t \wedge T_n}$ の成立がわかる. 次に

$$(H \circ M)_t \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (H \circ M^{T_n})_t$$

が定義でき, 明らかに, $t \leq T_n$ のとき $(H \circ M)_t = (H \circ M^{T_n})_t$ を

$$(H \circ M^n)_t = (H \circ U^n)_t + (H \circ V^n)_t + H_{T_n} M_{T_n} I_{\{T_n \leq t\}}$$

と作り, これは local martingale である.

$$(H \circ M)_t = (H \circ M^n)_t \quad \text{if } t < T_n$$

が成立する. 従って, 定理 5 から $(H \circ M)$ は weak martingale である. 一意性は, $(H \circ M^{T_n})$ の一意性より明らかである.

この process $(H \circ M)$ を, H の weak martingale M に関する確率積分と定義する.

ところで, martingale U^n の直交分解における連続な部分と $(U^n)^c$ と書くと, これは M^{T_n} の分解に独立に走る. 右 n に対し, $M_{t \wedge T_n}^{T_{n+1}} = M_t^{T_n}$ なることに注意すると, $(U^n)^c_{t \wedge T_n} = (U^{n+1})^c_{t \wedge T_n}$ を得る. 従って, $M_t^c \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (U^n)^c_t$ が定義でき,

$$M_{t \wedge T_n}^c = (U^n)^c_t$$

を成す. 換言すると, M^c は, 連続な local martingale.

そこで, $[M, M]_t \equiv \langle M^c, M^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta M_s)^2$ とおくと, 特に M の

local martingale のときは, Meyer の定義によるものが一致する。

$M_{t \wedge T_n}^c = (M^n)^c_t$ なることに注目すると

$$[M, M]_{t \wedge T_n} = \langle (M^n)^c, (M^n)^c \rangle_t + \sum_{s \leq t \wedge T_n} (\Delta M_s)^2$$

従って, 各 n に対し

$$[M^n, M^n]_t = \langle (M^n)^c, (M^n)^c \rangle_t + \sum_{s \leq t} (\Delta M_s^n)^2$$

従って, $t < T_n$ のとき $[M, M]_t = [M^n, M^n]_t$ が成立する。故に,

M, N は weak martingales のとき

$$[M, N] = \frac{1}{2} ([M+N, M+N] - [M, M] - [N, N])$$

とわかる。 $MN - [M, N]$ は weak martingale となる。さ

ら

$$[H \circ M, N]_t = \int_0^t H_u d[M, N]_u$$

の成立を容易に示すことができる。然しなお, local martingale

の場合のように $[M, M] = 0$ いても $M = 0$ とは限らない。たとえば,

例 1, 2 がそれである。この為, weak martingale に関する

確率積分を, $[,]$ を用いて characterize できる。

以上.

参考文献

- [1] C.D. Dade and P.A. Meyer, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales, Université de Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics, vol. 124

Springer, Heidelberg 1970

- [2] N. Kazamaki, Some properties of martingale integrals,
Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. VII, n°1, 1971, p 9-19
- [3] N. Kazamaki, Changes of time, Stochastic integrals
and weak martingales, Zeitschrift für Wahrschein-
lichkeitstheorie (to appear).