

選好空間を構成せずに議案行動より直接計算する 非対称 Banzhaf 指数の一考察

遠藤 理世, 鈴木 貴, 穴太 克則 (南山大学)

Riyo Endo, Takashi Suzuki and Katsunori Ano (Nanzan University)

1 はじめに

非対称 Shapley-Owen 指数に対して, 選好空間を構成せずに議案行動データより直接計算する指数が Matsui and Uehara(2000) によって提案されている. 本文中で述べるが選好空間に関しては非対称 Banzhaf 指数において問題点があることが知られている. 議案行動データより直接計算する考え方はより非対称 Banzhaf 指数に有効であると考え, 本論説ではこれを Modified Banzhaf 指数として提案する.

2 参議院のデータについて

参議院のデータを使用するにあたって, 1998 年参議院議員選挙後の各議員の所属政党を調べ, 第 143 回, 第 144 回, 第 145 回国会の各議員の賛成, 反対のデータを調べた. 議会においては, 基本的に各議員は賛成するのも反対するのも自由であるが, 実際には党議拘束により, ほとんどの場合同じ政党に属する議員は同じ行動をとると考えられる. そこで政党を 1 人の投票者として考え, その議席数を重みとする重みつき多数決ゲームを考える.

以下では議論を簡単にするため, 6 大政党である自民党, 民主党, 公明党, 共産党, 社民党, 自由党をとり上げる. 6 人重みつき多数決ゲームとして考え, それぞれを a, b, c, d, e, f とおく. 6 大政党以外に属している議員がすべて反対したとしても議案を通過させることができる最小票数, すなわち全 252 議席の過半数である 127 を必要票数として考える.

表 1, 表 2 はそれぞれ 1998 年 2 月, 1999 年 2 月における参議院の各政党の議席数である.

表 1: 1998 年 2 月における参議院の各政党の議席数

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
127	118	38	24	14	20	11

表 2: 1999 年 2 月における参議院の各政党の議席数

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
127	104	51	23	23	13	12

また, 参議院で 6 大政党が各議案に対して賛成, 反対のどちらの態度をとったかというデータを以下に示す. 表 3 と表 4 はそれぞれ, 1998 年 2 月, 1999 年 2 月における参議院の各政党の議案に対する反応データである. ただし, 全会一致で可決された議案が 1998 年 2 月のデータでは 53 件, 1999 年 2 月のデータでは 92 件あり, これらはすべて除いてある.

表 3: 1998 年 2 月における参議院の 6 大政党の各議案における政党の反応

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)	件数
B	Y	Y	Y	N	Y	Y	50
C	Y	N	N	N	Y	N	12
D	Y	N	Y	N	Y	Y	6
E	Y	Y	Y	N	Y	N	2
F	Y	Y	N	N	Y	Y	1
G	Y	N	Y	Y	Y	Y	1
H	Y	Y	Y	N	N	N	1
I	Y	Y	N	N	Y	N	1
J	Y	Y	Y	N	N	Y	1
K	N	Y	Y	Y	N	Y	1
合計							76

(参議院会議録 1998 年 1 月 12 日～1998 年 6 月 18 日より)

表 4: 1999 年 2 月における参議院の 6 大政党の各議案における政党の反応

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)	件数
B	Y	Y	Y	N	Y	Y	63
C	Y	N	Y	N	Y	Y	26
D	Y	N	Y	N	N	Y	17
E	Y	Y	Y	N	N	Y	17
F	Y	N	N	N	Y	Y	5
G	N	Y	N	Y	Y	N	4
H	Y	Y	Y	N	Y	N	1
I	Y	N	N	N	N	Y	1
J	Y	N	Y	Y	N	Y	1
K	N	Y	Y	Y	Y	Y	1
L	N	Y	N	N	N	N	1
合計							137

(参議院会議録 1998 年 7 月 30 日～1999 年 8 月 13 日より)

3 Banzhaf 指数

よく知られた Banzhaf 指数を説明しよう. ある提出された議案に対して, 投票者全員が賛成か反対かを明らかにしているときに, 自らの投票態度を賛成から反対に, ないしは反対から賛成に変えることにより全体の結果をも変えることのできる投票者を, この賛成, 反対の組合せにおけるスウィング (swing) という.

各投票者のスウィングとなる回数の期待値をもって, その投票者の Banzhaf 指数といい, 各投票者の Banzhaf 指数を並べたベクトル $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ を単に Banzhaf 指数という.

投票者の数を一般に n とする. 投票者 i を含む勝利提携のうち, i が抜けると敗北提携に変わるような勝利提携を考えればよい.

したがって, 投票者 i の Banzhaf 指数は

$$\beta_i = \frac{2 \times |\{S \subseteq N : S \in W, S - \{i\} \in L\}|}{2^n}$$

表 5: 投票者 i がスウィングになる場合
投票者 i の投票態度 全体の結果

賛成 → 反対	可決 → 否決
反対 → 賛成	否決 → 可決

$$= \frac{|\{S \subseteq N : S \in W, S - \{i\} \in L\}|}{2^{n-1}}$$

と与えられる。ここで、 $|\cdot|$ は集合 $\cdot$ の要素の数を表す。

1999 年 2 月における参議院の Banzhaf 指数による影響力分析

1999 年 2 月における参議院のデータを用いて、各政党の Banzhaf 指数を求める。

自民党を例にあげて考えると、自民党 (a) が抜けることにより勝利提携から敗北提携に変わる提携は $\{ab\}, \{ac\}, \{ad\}, \{abc\}, \{abd\}, \{abe\}, \{abf\}, \{acd\}, \{ace\}, \{acf\}, \{ade\}, \{adf\}, \{aef\}, \{abcd\}, \{abce\}, \{abcf\}, \{abde\}, \{abdf\}, \{abef\}, \{acde\}, \{acef\}, \{adef\}, \{abcde\}, \{abcdf\}, \{abcef\}, \{abdef\}, \{acdef\}, \{abcdef\}$ である。

よって、自民党の Banzhaf 指数は、

$$\beta_a = (3 + 10 + 10 + 5 + 1)/(2^{6-1}) = 29/32 = 0.90625$$

となる。他の政党も同様に求められ、結果をまとめると次の表 6 のようになる。

表 6: 1999 年 2 月における参議院の各政党の Banzhaf 指数

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
BZ	0.906	0.094	0.094	0.094	0.031	0.031

1998 年 2 月における参議院の Banzhaf 指数による影響力分析

同様にして、各政党の Banzhaf 指数を求めた結果は以下の表 7 の通りである。

表 7: 1998 年 2 月における参議院の各政党の Banzhaf 指数

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
BZ	0.969	0.031	0.031	0.031	0.031	0.031

4 非対称 Banzhaf 指数 … Shenoy の方法

m 次元立方体 $[-1, 1]^m$ の選好空間を考える。何らかの手法により各政党がこの m 次元立方体に配置されるとしよう。この m 次元立方体の境界面を半径 $1/2$ の球 $B_{1/2}^m$ の球面に、 m 次元立方体の内部を球 $B_{1/2}^m$ の内部に、そして立方体中のある座標を原点からの方向を変えず、かつ m 次元立方体上の方向が同じベクトルはその大きさの比を維持しながら写像する関数 f を考える。議案を原点を通るベクトル ξ で表す。この議案 ξ に対し、点 $x^i = (x_1^i, \dots, x_m^i) \in B_{1/2}^m$ に位置する投票者 i が賛成に投じる確率 p_ξ^i を $p_\xi^i = \xi_1 x_1^i + \dots + \xi_m x_m^i + 1/2$ によって定義する。 p_ξ^i はベクトル ξ と $B_{1/2}^m$ の球面との交点のうち ξ の方向と反対側にある点を ξ' としたとき、 ξ' と x^i から ξ に下ろした垂線の足との距離を意味する。さて、議案 ξ が与えられたとき、投票者全体の組合せの集

合 N の中で勝利提携 S に属す投票者が賛成し、属さない投票者が反対する組合せが生じる確率は $\prod_{i \in S} p_i^i \prod_{i \in N-S} (1 - p_i^i)$ で与えられる。この組合せに対してスウィングになる投票者を求めることができる。したがって 1 人の投票者を fix したとき、議案 ξ のとき、この投票者がスウィングになる賛成、反対の組みが生じる確率を計算できる。この確率を、この投票者の非対称 Banzhaf 指数という。以上が Shenoy の定義である。

1999 年 2 月における参議院の非対称 Banzhaf 指数による影響力分析

選好空間を求めるために、因子分析を用いてみた。図 1 は因子分析によって得られた結果で、原点から最も遠くに位置する共産党を基準として、半径 $1/2$ の円 $B_{1/2}^2$ に写した結果である。これに

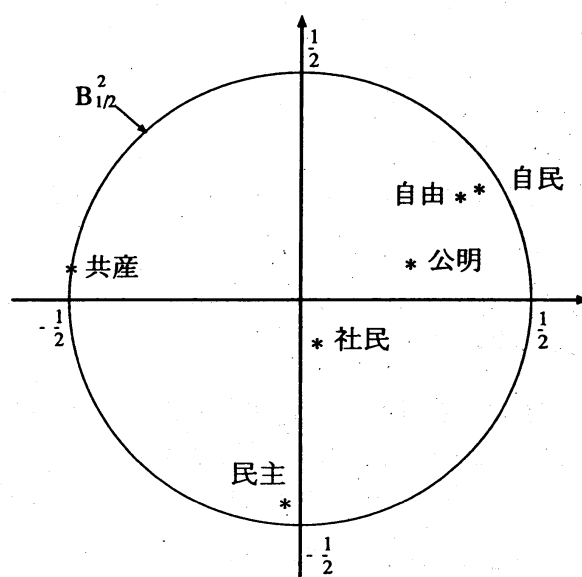


図 1: f により写された各政党の位置

基づいて求めた 2 次元での非対称 Banzhaf 指数は以下のようになる。

表 8: 1999 年 2 月における各政党の非対称 Banzhaf 指数

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
NB	0.832	0.168	0.183	0.1	0.063	0.06

1998 年 2 月における参議院の非対称 Banzhaf 指数による影響力分析

図 2 は因子分析によって得られた結果で、原点から最も遠くに位置する共産党を基準として、半径 $1/2$ の円 $B_{1/2}^2$ に写した結果である。

これによって、1999 年 2 月の場合と同様に、非対称 Banzhaf 指数を求められ、結果は表 9 である。

表 9: 1998 年 2 月における各政党の非対称 Banzhaf 指数

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
NB	0.972	0.038	0.040	0.022	0.062	0.040

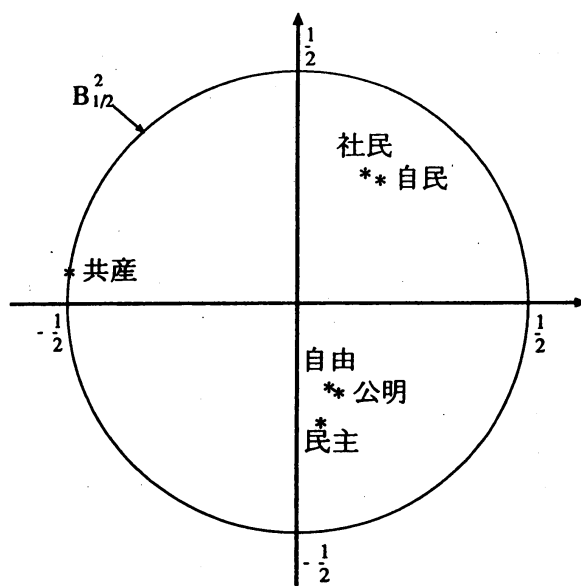


図 2: f により写された各政党の位置

考察

- 1998 年 2 月における参議院の分析結果について
 - 自民党は他のどの政党と提携しても過半数を越すことが可能であるため、圧倒的な影響力を持っている。しかし、それに次ぐ議席数をもつ民主党よりも社民党の方が大きな影響力をもっており、自社さ・連立政権であることが反映されている。
- 1999 年 2 月における参議院の分析結果について
 - ここでも自民党の影響力は圧倒的である。しかし、議席数が民主党の半分以下である公明党の影響力の方が民主党の影響力よりも高い値を示している。これは後の連立政権の影響だと考えられる。同じ連立政権に加わっている自由党の影響力が小さい。自由党の議席数が 6 政党の中でも最も少ないために、非対称 Banzhaf 指数にはあまり反映されていない。

非対称 Banzhaf 指数の問題点

- 非対称 Banzhaf 指数ではまず、政党を m 次元立方体にプロットし、さらにそれを関数 f を用いて、半径 $1/2$ の球に写す。しかし、これらの記述が曖昧で、方法は不明確である。
- 投票力指数の中で、より現実を表しているといわれている非対称の指数を求めるためには、何らかの方法でデータから選好空間を求め、その選好空間を用いて指数を計算することが必要である。しかし、選好空間を求めるのにはさまざまな多変量統計解析法が考えられ、どの方法を選び、選好空間を形成するかによって、結果となる指数の値が変わってくる。非対称 Banzhaf 指数では議案をベクトルで表す必要があるため、今回は因子分析を用いたが、分析に用いたデータは 0-1 データであるため、本来、因子分析には向かない。

Shenoy の非対称 Banzhaf 指数の選好空間には上述した問題がある。これが選好空間の構成をスキップしてデータから直接指数を求めてみようという動機である。

5 Modified Banzhaf 指数

ここでは、選好空間を用いずにデータから直接求める投票力指数として、非対称 Banzhaf 指数を改良した新しい指数を提案し、この指数を Modified Banzhaf 指数と呼ぶことにする。

Modified Banzhaf 指数では、各政党の議案に対する反応データを基にして考える。議案に対して賛成または反対を示している政党で、過半数に達する意見を述べたグループの政党のみが重みをもつゲームとして、対称な Banzhaf 指数を計算する。これを各議案に対して行い、最終的にすべてについて足し合わせたものを、その政党の Modified Banzhaf 指数とする。

投票者 i の Modified Banzhaf 指数は、

$$MB_i = \sum_{S \in W} p(S) \beta_i(S)$$

で与えられる。ただし、 S はある議案タイプを表し、 $p(S)$ はその議案タイプが起こった確率、 $\beta_i(S)$ はその議案タイプをひとつの重みつき多数決ゲームとみなしたときの投票者 i の Banzhaf 指数である。

1999 年 2 月における参議院の Modified Banzhaf 指数による影響力分析

Matsui and Uehara(2000) の η 指数の場合と同様に、表 2 と表 4 のデータを用いて、Modified Banzhaf 指数による参議院における各政党の影響力分析を行う。まず、各議案についての Banzhaf 指数を求める。議案 B では、共産党を除く 5 人の重みつき多数決ゲームとして考えられるので、議案 B についての Banzhaf 指数は次のようになる。

表 10: 議案 B における各政党の Banzhaf 指数

自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
0.8125	0.2308	0.2308	0	0.0625	0.0625

次に議案 G について考える。議案 G では自民党、公明党、自由党の 3 人の重みつき多数決ゲームとして与えられるので、議案 G についての Banzhaf 指数は次のようになる。

表 11: 議案 G における各政党の Banzhaf 指数

自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
0.5	0	0.5	0	0	0

また、賛成・反対のグループともに過半数を越さない議案 I と議案 K は除いて考える。

他の議案に対しても、議案 B, G と同様にして求められ、その結果は次のようになる。

各議案において、それぞれの議案数を全議案数で割ったものでその議案の起こる確率を表すとする。全議案数は 135 であるから、議案 B は確率 63/135 で起こるとする。以下、同様に考え、それぞれの議案について得られた Banzhaf 指数を各政党ごとに足し合わせると Modified Banzhaf 指数が求められ、その結果は表 13 のようになる。

1998 年 2 月における参議院の Modified Banzhaf 指数による影響力分析

1999 年 2 月の場合と同様に、表 1 と表 3 のデータを用いて、各政党の Modified Banzhaf 指数を求める。1998 年 2 月のデータでは、1999 年 2 月のデータの議案 I のように賛成のグループ、反対のグループともに過半数を越えないタイプの議案は存在しなかったため、すべての議案について元になる Banzhaf 指数を求めることができる。議案タイプごとの各政党の Banzhaf 指数を求

表 12: 議案における各政党の Banzhaf 指数

議案	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)	議案数
B	0.8125	0.1875	0.1875	0	0.0625	0.0625	63
C	0.625	0	0.375	0	0.125	0.125	26
D	0.5	0	0.5	0	0	0	17
E	0.75	0.25	0.25	0	0	0	17
F	0.25	0	0	0	0.25	0.25	5
G	0.5	0	0.5	0	0	0	4
H	0.75	0.25	0.25	0	0	0	1
J	0.75	0	0.25	0.25	0	0	1
L	0.8125	0	0.1875	0.1875	0.0625	0.0625	1

表 13: 1999 年 2 月参議院における各政党の Modified Banzhaf 指数

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
MB	0.698	0.121	0.243	0.003	0.063	0.063

めた結果は表 14 の通りである。

ここでも各議案において、それぞれの議案数を全議案数で割ったものでその議案の起こる確率を表すとする。全議案数は 76 であるから、各議案数を 76 で割って表す。このようにして得られた Modified Banzhaf 指数は表 15 の通りである。

考察

- 1999 年 2 月、参議院の第 1 党である自民党は、公明党・自由とともに連立政権を組んでいた。Modified Banzhaf 指数でも、公明党が第 1 党である自民党に次ぐ影響力を持つことを示しており、この状況がよく反映されている。
- 1998 年 2 月での自民党は、社民党・さきがけとともに連立政権をつくっていた。Modified Banzhaf 指数の結果を見ると、社民党は議席数は参議院で 4 番目でありながらも、その影響力は自民党に次ぐ大きさをもっていることがわかる。

参考文献

- [1] Banzhaf, J. F. III, *Weighted voting doesn't work : a mathematical analysis*, Rutgers Law Review, Vol.19, pp.317-343, 1965.
- [2] Matsui, T. and Uehara, Y, *A note on Asymmetric Power Index for Voting Games*, 2000 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会 秋期研究発表会 アブストラクト集, pp.42-43, 2000.
- [3] Owen, G. , *Political games*, Naval Research Logistics Quarterly, Vol.22, pp.741-750, 1971.
- [4] Owen, G. , *"Game theory"*, 3rd ed., Academic Press, 1995.
- [5] Shenoy, P. P. , *The Banzhaf index for political games*, Mathematical Social Sciences, Vol.2, pp.299-315, 1982.
- [6] 小野理恵, 武藤滋夫, 「投票システムのゲーム分析」, 日科技連, 1998.

表 14: 議案における各政党の Banzhaf 指数

議案	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)	議案数
B	0.9375	0.0625	0.0625	0	0.0625	0.0625	50
C	0.5	0	0	0	0.5	0	12
D	0.875	0	0.125	0	0.125	0.125	6
E	0.875	0.125	0.125	0	0.125	0	2
F	0.875	0.125	0	0	0.125	0.125	1
G	0.9375	0	0.0625	0.0625	0.0625	0.0625	1
H	0.75	0.25	0.25	0	0	0	1
I	0.75	0.25	0	0	0.25	0	1
J	0.875	0.125	0.125	0	0	0.125	1
K	0.5	0	0	0	0.5	0	1

表 15: 1998 年 2 月参議院における各政党の Modified Banzhaf 指数

	自民 (a)	民主 (b)	公明 (c)	共産 (d)	社民 (e)	自由 (f)
MB	0.850	0.054	0.060	0.001	0.146	0.055

[7] 参議院会議録, 1998 年 1 月 12 日～1999 年 8 月 13 日.