

Coxeter Groups に付随する, weighted homogeneous polynomial の microlocal structure

(with Appendix on GL(2))

矢野 環 (京大理 D.C.)

奥口 次郎 (")

Abstract.

有限 Coxeter System (W, S) の fundamental anti-invariant J の 2 乗を, fundamental invariants の 函数と与える: $f(x) = (J(x))^2$. f の複素平面の微局所構造は, S の部分系が生成し, W の部分群の共役類により特徴づけられる。本小文においては, f の共役類, fundamental invariants, f を不変にする Lie 環の (i.e. $x f \in \mathcal{O} f$) 等の構造を決定する。又, f^* は f の共役類^{*} 12, (W, S) の不変量 k_i により, $f(x) = \prod_{i=1}^l \prod_{k=1}^{k_i-1} (x + \frac{1}{2} + \frac{k}{k_i})$ と与えられると予想される。Appendix においては, GL(2) の invariant に由来する, simple な多項式の可能性についてを討論を述べる。

* cf [2]

§0. Introduction

§1. Coxeter System

§2. 基本定理

§3. A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ § A_ℓ , § B_ℓ , § D_ℓ .

§4. 例外型 § E_6 , § E_7 , § F_4

§5. Root System に対応する Coxeter groups.

§ $I_2(m)$ (G_2), § H_3 , § H_4 .

§0. Introduction

(W_ℓ, S) を既約有限 Coxeter System (cf §1), $V^* = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}\xi_i$ と
 γ の標準表現空間の dual space, $\xi_1, \dots, \xi_\ell$ は orthonormal basis
 とする. 基本不変式 (homogeneous) を $x_1, \dots, x_\ell$, $k_i = \deg \xi_i$,
 基本反不変式を J とおく. J^2 は不変式環, $f_{W_\ell}(x) = (J(\xi))^2$ と
 表示される. このとき,

holonomic system $\pi_\alpha \simeq \mathcal{O}[S]f^\alpha / (\alpha - \alpha) \mathcal{O}[S]f^\alpha$ の (α : generic)
 holonomy diagram は, γ の Lagrangians および, (W_ℓ, S) の
 S の subset S' が生じた群 $W_{S'}$ の 変換類 と対応し, γ の
 order は S' の diagram の頂点の数であり, $S'' \subset S'$, $S' \neq S$ は一
 つの元をはずしたものであるとき, 対応する Lagrangians は
 codimension 1 の交わりを持つ. さらに, γ の Lagrangians
 はすべて simple であり, order は S' の diagram より数えられる.

f_{w_λ} の λ 函数は (i.e. $P(0, x, D) f^{\lambda+1} = h(x) f^{\lambda+2}$ for $h(x)$)

$$h_{w_\lambda}(\rho) = \prod_{i=1}^l \prod_{k=1}^{k_i-1} \left(\rho + \frac{1}{2} + \frac{k}{k_i} \right)$$

と予想されている。

矢野は f_{A_ℓ} $2 \leq \ell \leq 6$ について, f_{A_ℓ} が simple であることを指摘し, 佐藤は任意の f_{A_ℓ} について構造を決定した。矢野は任意の Coxeter Group に対して, 対応する Lagrangians が simple となり, codim, order を決定し, 交わりも知ることができたことを示した (cf §2) 又, f_{w_λ} に関する micro local structure, f_{w_λ} を不変にする Lie 環について (基本不変式の決定も含む), 矢野-佐藤が構造を示した。(未決定のものもある。) 特に F_4 については, 図によるとこが多い。

A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ について, f_{w_λ} は, いかゆの判別式に等しいことがわかる。判別式は $\underline{\text{GL}}(2)$ 不変式であり,

$(\text{SL}(5) \times \text{GL}(4); \text{Id} \otimes \text{Id})$ なる prehomogeneous vector space においては, f_{w_λ} の orbit への localization をして,

$\underline{\text{GL}}(2)$ 不変式, 判別式と同じ weight を持つ, simple な多項式が求まられる。この様な多項式として, どのようなものがあるかという問題も佐藤が提出した。これについて, 佐藤-矢野-佐藤は部分的結果を得た。これについて Appendix において述べよう。

§1. Coxeter System

Coxeter System (W, S) とは群 W と W の生成元 s の集合 S の pair であり, $S = \{s_1, \dots, s_\ell\}$ とするとき, $\Gamma_{(s_i, s_j)}^{m_{ij}} = 1$.

$m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geq 2$ ($i \neq j$) $\rightarrow$ 基本関係である (とされる).

すなわち $m_{ij} = \infty$ も許す. $\mathbb{R}^l$ の basis $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ に対し

$$\sigma_i(e_j) = e_j + 2\omega \frac{\pi}{m_{ij}} \cdot e_i \quad \text{と定めて, } \sigma: W \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^l)$$

$s_i \mapsto \sigma_i$ は単射であり, W は $\sigma(W)$ と同一視できる.

(W, S) の graph とは, s_i に対応する l 個の頂点 $\bigcirc_{1 \leq i \leq \ell}$ と, $\{i, j\}$ を $m_{ij} \geq 3$ のときにのみ結び結ぶ線分 $\overset{m_{ij}}{\underset{\cdot}{\text{---}}} \text{---}$ とからなる. $m_{ij} = 3$ のときは数 $\times$ 線分の m_{ij} をはく. かつ σ_i のとき, (W, S) は既約である.

W が有限群となるためには, 行列 $(-\omega \frac{\pi}{m_{ij}})_{ij}$ が正定値であることが必要かつ十分. このとき, $\mathbb{R}^l$ に

$\langle e_i, e_j \rangle = -\omega \frac{\pi}{m_{ij}}$ により内積を入れれば, $\{e_i\}$ について正規直交基底とよぶことにより, $\sigma(W) \subset O(l)$ (直交群) とおける. 以後我々は有限 Coxeter group のみを扱う.

W は $O(l)$ の有限部分群と同一視し, σ_i と s_i を同一視する. (W, S) は, S の分割 $S = \bigsqcup S_i$ があり, S_i の生成した W の部分群を W_{S_i} とするとき, $\{W_{S_i}\}$ は既約 Coxeter System (W_{S_i}, S_i) であり, $W = \prod W_{S_i}$, しかるに W_{S_i} の表現空間 V_i について, $\mathbb{R}^l = \bigoplus V_i$ となる.

Theorem (1) $S(E^*)$ is a graded free R -module of rank $\#W_\ell$.

(2) There are homogeneous elements $x_1, \dots, x_\ell$ in R , such that

$$R \simeq R[x_1, \dots, x_\ell] \text{ and } k_i = \deg_{\xi} x_i = m_i + 1.$$

(3) $\prod k_i = \#W_\ell$, $\#H = \sum (k_i - 1) = \frac{1}{2} \ell h$.

(4) $S(E^*) \ni z$ is, $\forall s \in S$ is for (, $S(z) = -z$ is satisfied, and

反変変式 (cf. (1)). $D = \prod_{g \in H} e_g(\xi)$ (これは基本反不変式 (cf. (1)))

とすれば, 反不変式全体は RD に一致する。

(5) $\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \lambda D \quad \lambda \neq 0. \quad (\text{cf. [1]})$

(4) より $\boxed{f(x) = D^2}$ は不変式で, (3) より weighted homogeneous of type $(k_1, \dots, k_\ell; \ell h)$ である。これは考察の対象となる。

$k_1 = 2, 3 \leq k_2, W_\ell \subset \mathcal{O}(E^*)$ より, $x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \dots + \xi_\ell^2)$ である。

次に, f を不変にする Lie 環を構成しよう。

$$g_{ij}(x) = \sum_R \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \text{ とおく。 } W_\ell \subset \mathcal{O}(E^*) \text{ より, 同様}$$

W_ℓ -invariant である。よって

$$X_i = \sum g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

と定義する。 ξ 座標では $X_i = \sum \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$ であり,

これは W_ℓ -inv. であることが、上記の如くに x 座標で表示

して $X_i D = \sum \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial D}{\partial \xi_k}$ は反不変

式であることがわかるので, (4) より $X_i D \in \mathbb{C}[x]D$.

$$\therefore X_i f = 2 (X_i D) D = c_i(\alpha) f$$

特に $\#_0 \quad X_i = \sum f_k \frac{\partial}{\partial f_k} = \sum k_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$ であり,

$$X_i f = k_i f.$$

$$\det(g_{ij}) = X^2 D^2 = X^2 f \quad \text{より, (v)} \quad X_1, \dots, X_d \text{ は } \mathcal{O}_X \text{ 上}$$

locally free, かつ

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^d \mathcal{O} X_i$$

と表わす, $\mathcal{V} = \{X: \text{vector field} \mid Xf \in \mathcal{O}f\}$ であり, $\mathcal{V}$ は

わかる. [3]. 但し, 後に $\mathcal{V}$ が, f^α の各 Lagrangians 上 simple holonomic system を与えることを示すので, このことは必ずしも必要ではない.

$\mathcal{V}$ が与える f^α の annihilators $X_i - c_i(\alpha) \partial$ の生成した $\mathcal{S}[\alpha]$ の ideal を $\mathcal{A}[\alpha]$ とおく.

$$\pi' = \mathcal{S}[\alpha] / \mathcal{A}[\alpha],$$

$$\pi'_\alpha = \mathcal{S} / \mathcal{A}[\alpha] \quad (\mathcal{A}[\alpha] = \{P(\alpha) \mid P(\alpha) \in \mathcal{A}[\alpha]\})$$

が以下の考察の中心である.

§2. 基本定理.

記号は前 § のままとする. 表現空間 E を複素化し, $V = \mathbb{C} \otimes E$

$$V^* = \mathbb{C} \otimes E^* \text{ とおく. } \text{map } (\xi) \mapsto (x) \text{ は, } f=0 \text{ の外では}$$

$$\begin{array}{ccc} (5) & V_{\xi}^* & \supset \{D=0\} \\ \downarrow & \downarrow W_{\ell} & \downarrow \\ (1) & \mathbb{C}_x^{\ell} & \supset \{f=0\}. \end{array} \quad \begin{array}{l} \# W_{\ell} \text{ 重なる covering になる.} \\ f(x) \text{ は weighted homogeneous of} \\ \text{type } (k_1, \dots, k_{\ell}; \ell h) \text{ である.} \\ (x) \text{ の dual 座標を } (y) \text{ とおく.} \end{array}$$

Theorem

(1) $\check{S} \check{S} f^{\lambda}$ ($\lambda \text{ generic} \in \mathbb{C}$) は $\check{S}$ の simple holonomic set よりなり, 特に原点 conormal における principal symbol は

$$\eta_1^{-\frac{1}{2}\ell h(\lambda + \frac{1}{2}) - \frac{\ell}{2}} \sqrt{d\eta_1 \dots d\eta_{\ell}}.$$

従って, $\text{order} = -\frac{1}{2}\ell h(\lambda + \frac{1}{2})$

$\{X_1, \dots, X_{\ell}\}$ は 原点 conormal における simple である.

(2) $\check{S} f^{\lambda}$ の holonomy diagram の各 Lagrangians は, 次の形に書ける. S の部分集合全体の集合に, 同値関係

$$S' \sim S'' \Leftrightarrow S' \text{ が } W_{\ell} \text{ 内で生成した部分群と } S'' \text{ の } S' \text{ とが } W_{\ell} \text{ 内で共役}$$

を含んで整列する*. $\check{S}$ の各類が一つの Lagrangian を表かし,

$\check{S}$ の codimension は $\#S'$, S' により定まる Coxeter system の

既約分母を $\Pi(W_i, S'_i)$, $\ell_i = \#S'_i$, Coxeter number of $W_i = h_i$ と

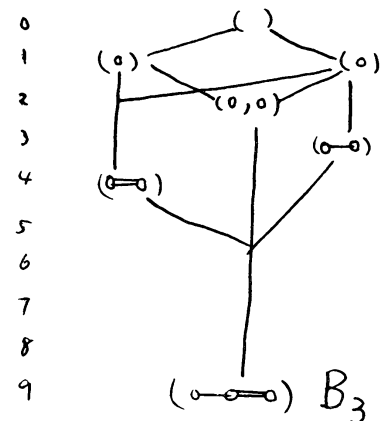
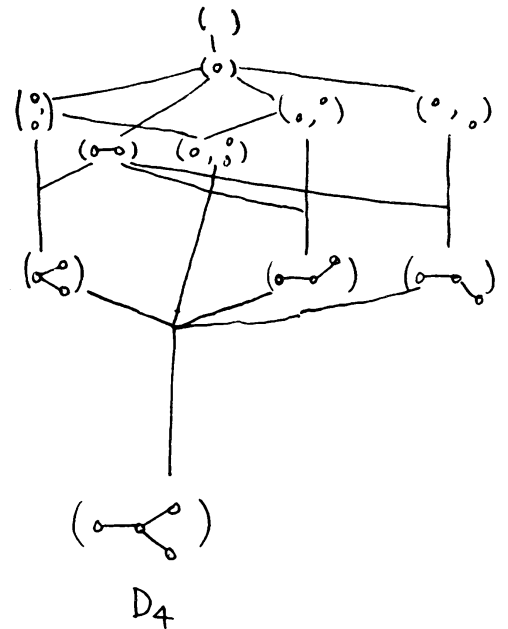
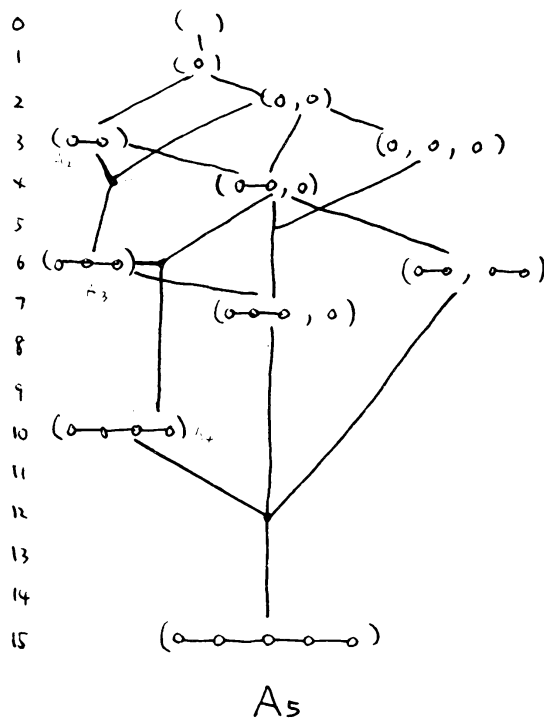
する. $\text{order} = -\frac{1}{2}(\sum \ell_i h_i)(\lambda + \frac{1}{2})$. 又, S'_i が一つの

既約分母を $\Pi(W_i, S'_i)$ とする. $\{S'_i\}$ とする.

* $A_{\ell}, E_6, H_3, H_4, I_2(2m+1)$ における S' と S'' が等しいとき共役になることは示す.

$\{S_{\lambda_j'}\}$ に対して Lagrangians 12, $S' \geq \frac{1}{13}(\cdot) \geq 3$ で交わり, $\lambda \neq \lambda'$ に対して, $\{S_{\lambda_j'}\}$ は S, S' に対する交わりは, 2 別々 ≥ 3 である.*

(2) の statement はかなり ≥ 4 以上であるが, 実例により意味を述べた。実際は holonomy diagram をおいて, 2 つの Lagrangian 12 で別々 2 点 $\frac{1}{13}$ 以上交わり ≥ 3 以上, S, S' へ ≥ 3 以上で代用させて ≥ 4 以上をいふ。



これでわかるように, 部分群の
変換類が関係するだけ, A 型以外は
複雑である。(たとえば D_5 では

$(\circ-\circ-\circ) \geq (\circ-\circ-\circ)$ は 変換になる)

* さらに交わりは ≥ 4 以上を示す。

以下いくつかの段階にかけて, Theorem 2 7.1 までいく.

$e_{\lambda_i}(\xi) = \varphi_i(\xi)$ とおく. diagram $(\circ \text{---} \circ \text{---})$ に

対し $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}$ に対し, $\{\varphi_{\lambda_{i_1}}(\xi) = \dots = \varphi_{\lambda_{i_j}}(\xi) = 0\}$ を

$F(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j})$ とし X -space に $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}$ に対応する α -normal を

$\Lambda(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j})$ と記す. 面分 F は $S' = \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}\}$ の生成した

部分群の固定点全体である. $S'' = \{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}\}$ に対して,

$gW_{S''}g = W_{S'}$ であり, $gF(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}) = F(k_{i_1}, \dots, k_{i_j})$ 又,

よくしられているように $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}$ を $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}$ と置き換えて, 面分全体の集合により,

W の orbit を一まとまりにし W に $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}$ に対応する S の部分集合を生成し S の部分群の共役類と一対一に対応する.

特に $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow W$, $V_\xi \Leftrightarrow \{e\}$. 又, Coxeter 群に
おいてよくしられているように, S の 1 個の元 s_i の共役類 σ_i の
かは, γ の diagram により奇数 s_i を $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}$ と置き換えて
得られているかどうかによる. 従って, 次元 1 の面分の
同値類は $A_n, D_n, E_n, H_3, H_4, I_2(2m+1)$ であり.

$B_n, F_4, G_2, I_2(2m)$ であり. (これは γ の
既約であるか, 2 つの既約因みにわかちよかに対応する.)

* γ の面分 $F(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j})$ に対して g の作用で γ を $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}$ と置き換えて得られる部分群は共役.
** γ は W で F に $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_j}$ に対応する σ_i の γ に対応する.

一般に, $\forall \xi \in H \setminus \{0\}$
 $e_g(\xi) = 0$ とするが,

$e_g((\text{grad}_\xi X_i)(\xi_0)) = 0$ は容易にわかる。すなわち, infinitesimal action $\xi \mapsto \xi + \varepsilon(\text{grad}_\xi X_i)(\xi)$ について $\{e_g(\xi) = 0\}$ は安定であり, よって 各 $F(\lambda_1, \dots, \lambda_j)$ は $X_1, \dots, X_j$ の作用で安定である。
 $\square$ $F(\lambda_1, \dots, \lambda_j)$ の generic point では, $\text{corank}(g_{ik}) = j$, 即ち $F(\lambda_1, \dots, \lambda_j)$ は $\mathcal{O}_Y = \sum \mathcal{O}_X X_i$ の orbit である。 $n = 2$ は, 一般

$A_2, B_2, D_2, F_4, G_2, H_3, I_2(n)$

について個々に示す。 $n=2$ の直接し, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, 一般に $n \geq 2$ の

べい方法で次元 1 の面分に ~~帰着~~ 帰着させる。

次元 1 の面分 F をとる。例として $\varphi_1(\xi) = \dots = \varphi_{l-1}(\xi) = 0$ とせよ。

この F/Wea generic point では $\text{rank}(g_{ik}) = 1$ である。実際, 前に

のべたことより, $\text{rank}(g_{ik}) \leq 1$ である。もし $\text{rank}(g_{ik}) = 0$

ならば, $X_1 = X_2 = \dots = X_l = 0$ となるが ($\because X_i$ の係数) より

$\xi_1 = \dots = \xi_l = 0$ を得るので矛盾である。 F の generic point で

さらに直交する $l-1$ 次元空間 V' をとるが, V' は $e_1, \dots, e_{l-1}$ の

生成したものである。従って V' において W の作用は $(S_1, \dots, S_{l-1})$

により与えられる Coxeter 群の作用であり, D の $V' \cap \alpha$ の軌道は

γ の基本反変形式になる。よって, F/Wea の generic point で, ξ

は Transversal な方向への localization π , $(W_{S'}, S')$ $S' = (s_1, \dots, s_{l-1})$

に對する π' となる。

* 特には, $\mathbb{C}^l \setminus \{0\}$ では $\text{corank}(g_{ik}) = 0$ より $\mathbb{C}^l \setminus \{0\}$ は $\mathcal{O} = \sum \mathcal{O}_X X_i$ の orbit.

又, 次元 2 の面分 F' , 例として $\eta_1 = \dots = \eta_{l-2} = 0$ として, F において
 次元 1 の面分を与える時, 従って F/W_x $\text{rank}(f_{ijk}) = 1+1=2$ である.
 よって, $\check{S}S \otimes \mathbb{F}^A$ には束が与えられるが, 面分 $/W_x$ の π_3 のもとに
 おさげられる.

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g_{ij} = k_j x_j \text{ であることから,}$$

$\alpha(X_1) - \alpha(X_l)$ の $T_{(0,1)}^*(\mathbb{C}^l)$ において simple であることは明らかで
 ある。(中村の lemma) - A の F/W_x の conormal i.e. $A(x_1, \dots, x_l)$
 において, A は l 個の Coxeter 群の既約部分群に等しい, simple な
 多項式の交差を共有する性質になるから simple である。

同様に conormal において principal symbol は, Lie 環の π_3

から, $\eta_2, \dots, \eta_l$ を含む $\alpha = \sum \alpha_i x_i$ によって, $k_1 = 2$,

$$\sum k_i = \frac{1}{2} l h + l \text{ を考慮すれば, } \eta_1 = \frac{1}{2} l h (1 + \frac{1}{2}) - \frac{l}{2} \sqrt{d\eta_1 - d\eta_l}$$

を得る。

次に交わりを考慮する。次元 1 の面分 F は, ある real numbers

$$(a_1, \dots, a_l) \text{ により } \{(a_1, \dots, a_l)t\} \text{ の } \pi_3 \text{ を (1) (2) (3) として,}$$

$$F/W_x \text{ は } \{(A_1 t^2, A_2 t^{k_2}, \dots, A_l t^{k_l})\} \text{ であり, ここに } A_i = \sum a_i^2 \neq 0.$$

$$\text{この tangent は } (2A_1 t, k_2 A_2 t^{k_2-1}, \dots, k_l A_l t^{k_l-1}) \text{ であり}$$

$$\text{conormal vector } (\eta_1, \dots, \eta_l) \text{ は } t \neq 0 \text{ において}$$

$$2A_1 \eta_1 + \sum k_i A_i \eta_i t^{k_i-2} = 0 \text{ を満たさなければならない.}$$

よって, F/W_x の conormal bundle と, $T_{(0,1)}^*(\mathbb{C}^l)$ の交わりは

$\eta_1 = 0$ によって与えられる。(これは principal symbol $\sum a_i^2$ によって与えられる)

従って、一般の F/w_k においては、それに対応するグラフ
 の連結成分ごとに、このような交わりがある。これ以外に
 交わりがなにかどうかについては、一般的には証明できて
 いらないが、 $A_k, B_k, G_2, I_2(m)$ については参考にしたが
 いける。 D_k は少しおもしろいかもしれない。 F_4 ^{H_3} については
 Lagrangian を求めているので、それについて ^{例示に基いて} _{他の例も採用して}
 みたい。 E, E_8 は不明である。

E_8 以外の n に対して $holonomy\ diagram$ は例示に基づいて
 ある。

§3. A_ℓ, B_ℓ, D_ℓ .

t に関する n 次式 $x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \dots + x_n$ の判別式を

$\Delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$ と記す.

$$f_{A_\ell} = \Delta(1, 0, x_2, \dots, x_{\ell+1})$$

$$f_{B_\ell} = x_\ell \Delta(1, x_1, x_2, \dots, x_\ell)$$

$$f_{D_\ell} = \Delta(1, x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1}, x_{\frac{\ell}{2}}^2).$$

と Δ を用いて表すことができる. $\Delta(1, x_1, \dots, x_{\ell-1}, yz)$ は simple で

あり, 特に $\Delta(1, x_1, x_2, yz)$ は prehomogeneous vector space

$(SL(3) \times SL(3) \times GL(2), \square \otimes \square \otimes \square)$ の codimension 4 の orbit

(order $-6s - \frac{8}{2}$) での localization によって与えられる.

$(SL(5) \times GL(4), \square \otimes \square)$ によって A_2, A_3, A_4 は与えられる.

$\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)$ は simple であり, $(GL(2), \square \otimes \square)$ の

relative invariant であり, $-f_{A_2}$ の Δ は, monic, i.e. $x_0 = 1$

とした上で, 上記のようになっている simple である.

後に決定される Lie 環の形から,

$$\Delta(1, 0, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}, x_3, \dots, x_{\ell+1})$$

$$x_\ell \Delta(1, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}, x_2, \dots, x_\ell), \Delta(1, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}, x_2, \dots, x_{\ell-1}, x_{\frac{\ell}{2}}^2)$$

$$\Delta(1, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}, x_2, \dots, x_{\ell-1}, yz)$$

は $T_{\text{rel}} X$ にそれぞれ simple であり, 2次元である.

基本変換式 (A_ℓ) $x_\nu = (\xi_1, \dots, \xi_{\ell+1})$ の ν 次基本対称式 $x(-)^\nu$

$$\text{ただし } \xi_{\ell+1} = -(\xi_1 + \dots + \xi_\ell), \quad 2 \leq \nu \leq \ell+1.$$

(B_ℓ) $x_\nu = (\xi_1^2, \dots, \xi_\ell^2)$ の ν 次基本対称式 $x(-)^\nu$

$$1 \leq \nu \leq \ell.$$

(D_ℓ) $x_\nu = B_\ell$ と同じものを $1 \leq \nu \leq \ell-1$, $x'_\ell = \xi_1 \dots \xi_\ell$.

よって Lie 環は, 次の対称行列 (A_ℓ) (B_ℓ) (D_ℓ) により

与えられる。ここで, $p_h(t) = t^h + x_1 t^{h-1} + \dots + x_h$ とおく。

$$(A_\ell) \quad (u^{\ell-1}, \dots, 1) (A_\ell) \begin{pmatrix} u^{\ell-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p_{\ell+1}(u)p'_{\ell+1}(v) - p'_{\ell+1}(u)p_{\ell+1}(v)}{u-v} \\ + \frac{1}{\ell+1} p'_{\ell+1}(u)p'_{\ell+1}(v) \end{pmatrix} \Big|_{x_1=0}$$

左辺の対称式に注意する。

$$(B_\ell) \quad (u^{\ell-1}, \dots, 1) (B_\ell) \begin{pmatrix} u^{\ell-1} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{u p'_\ell(u) p_\ell(v) - p_\ell(u) \cdot v p'_\ell(v)}{u-v}$$

$$(D_\ell) \quad (D_\ell) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{2x'_\ell} \end{pmatrix} (B_\ell) \Big|_{x_\ell = x'^2_{\frac{\ell}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{2x'_{\frac{\ell}{2}}} \end{pmatrix}$$

Lie 環 $\mathcal{U}$.

[A_ℓ]

[B_ℓ]

[D_ℓ]

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{\ell-1} \end{pmatrix} = (A_\ell) \begin{pmatrix} D_\ell \\ \vdots \\ D_{\ell+1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{\ell-1} \end{pmatrix} = (B_\ell) \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_\ell \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{\ell-2} \\ x'_{\frac{\ell}{2}-1} \end{pmatrix} = (D_\ell) \begin{pmatrix} D_1 \\ D \\ \vdots \\ D_{\ell-2} \\ D'_{\frac{\ell}{2}} \end{pmatrix}$$

Lie環が上の様に1を求め、 $j, k \geq 2$ は、例として (B_L) の

とき、次の様に示す。 $\psi(u) = \prod (u - \xi_i^2) = u^l + x_1 u^{l-1} + \dots + x_l$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{j,k} \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_i^2} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i^2} \right) u^{l-j} v^{l-k} &= \frac{1}{4} \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i^2} \psi(u) \frac{\partial}{\partial \xi_i^2} \psi(v) \\ &= \sum \xi_i^2 \frac{\psi(u)}{u - \xi_i^2} \frac{\psi(v)}{v - \xi_i^2} = \frac{\psi(u)\psi(v)}{u-v} \sum \left(\frac{\xi_i^2}{v - \xi_i^2} - \frac{\xi_i^2}{u - \xi_i^2} \right) \\ &= \frac{\psi(u)\psi(v)}{u-v} \left(\frac{v\psi'(v)}{\psi(v)} - \frac{u\psi'(u)}{\psi(u)} \right) \quad \left(\because \sum \frac{\xi_i^2}{u - \xi_i^2} = \sum \left(\frac{v}{u - \xi_i^2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. = u \frac{\psi'(u)}{\psi(u)} - l \right) \\ &= \frac{\psi(u)v\psi'(v) - u\psi'(u)\psi(v)}{u-v} \end{aligned}$$

我々は係数 α が都合上、上 -1 倍を $\alpha \rightarrow -\alpha$ とし、

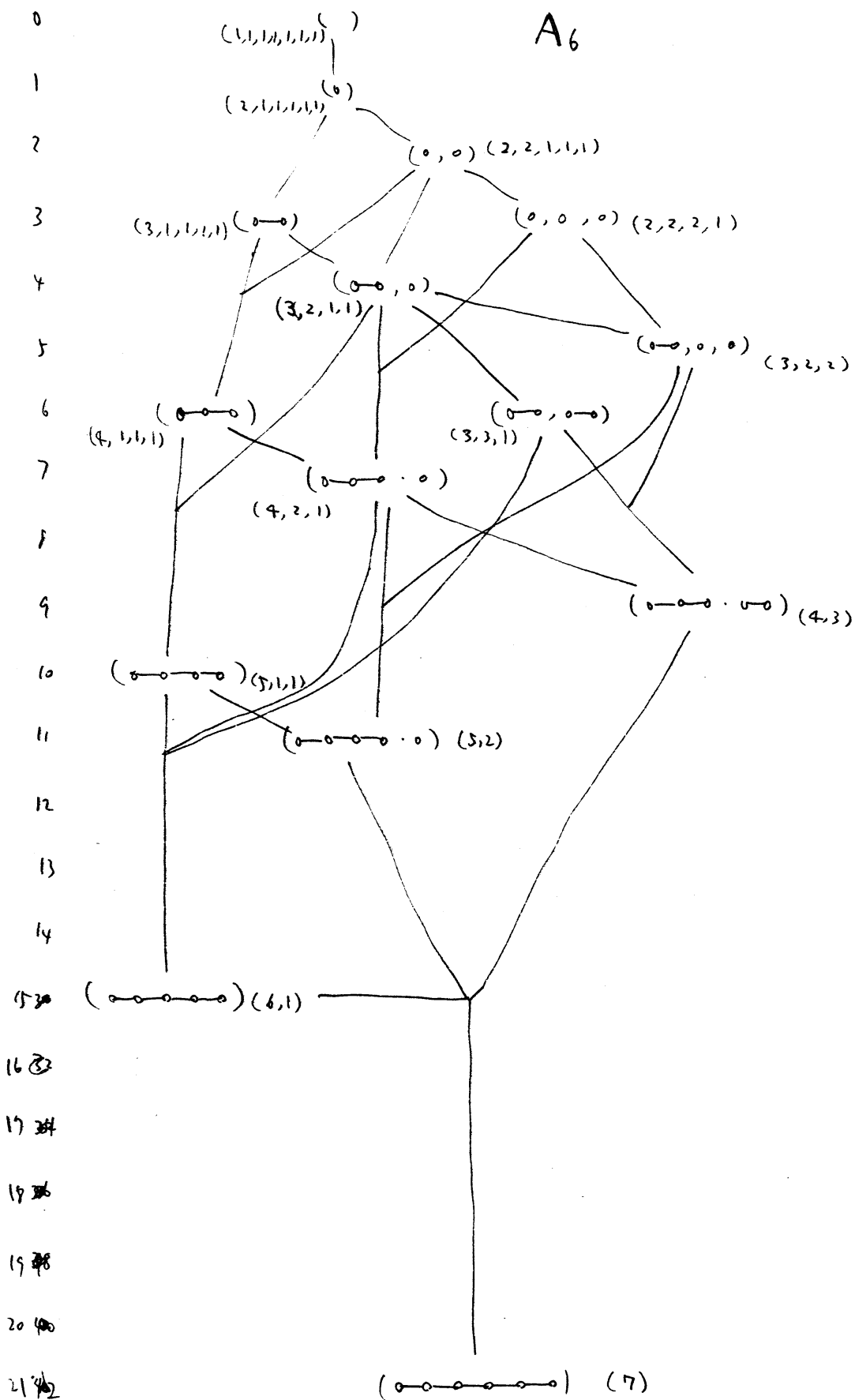
$\psi(u) = \prod (u - \xi_i) = u^l + x_1 u^{l-1} + \dots + x_l$ α 場合、同様に

$$\sum_{j,k} \left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \right) u^{l-j} v^{l-k} = \frac{\psi(u)\psi'(v) - \psi'(u)\psi(v)}{u-v}$$

であることに注意しておく。

(A_3)	$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$	(B_4)	x_1	$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$
	$3x_3$	$4x_4 - x_2^2$	$-\frac{1}{2}x_2x_3$		$2x_2$	$3x_3 + x_1x_2$	$4x_4 + 2x_1x_3$	$3x_1x_4$
	$4x_4$	$-\frac{1}{2}x_2x_3$	$2x_1x_4 - \frac{3}{4}x_3^2$		$3x_3$	$4x_4 + 2x_1x_3$	$3x_1x_4 + x_2x_3$	$2x_2x_4$
					$4x_4$	$3x_1x_4$	$2x_2x_4$	x_3x_4

(D_4)	x_1	$2x_2$	$2x_2'$	$3x_3$
	$2x_2$	$3x_3 + x_1x_2$	$\frac{3}{2}x_1x_2'$	$2x_1x_3 + 4x_2'^2$
	$2x_2'$	$\frac{3}{2}x_1x_2'$	$\frac{1}{4}x_3$	x_2x_2'
	$3x_3$	$2x_1x_3 + 4x_2'^2$	x_2x_2'	$x_2x_3 + 3x_1x_2'^2$



$$\xi \quad B_\ell \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \\ \xi_1 - \xi_2 \quad \xi_2 - \xi_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \\ \xi_{\ell-1} - \xi_\ell \quad 2\xi_\ell \end{array}$$

(ξ_i) の作用は $\xi_i \mapsto \pm \xi_i$ がある。

基底は $(n_0; n_1, \dots, n_k) \quad n_0 + n_1 + \dots + n_k = \ell \quad n_0 \geq 0, n_i \geq 1 \text{ for } i \leq k$

この基底は ℓ により代表される。 $(\text{codim} = n_0 + \sum_{i=1}^k (n_i - 1))$

$$\text{order} = - (n_0^2 + \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}) (\ell + \frac{1}{2}) \quad \text{is } 1/2, (\xi_i) \text{ is } 1/2$$

n_0 個は 0, 残りの n_i 個は n_i (non-zero) 等 ($\dots = 2 \text{ or } 3$)

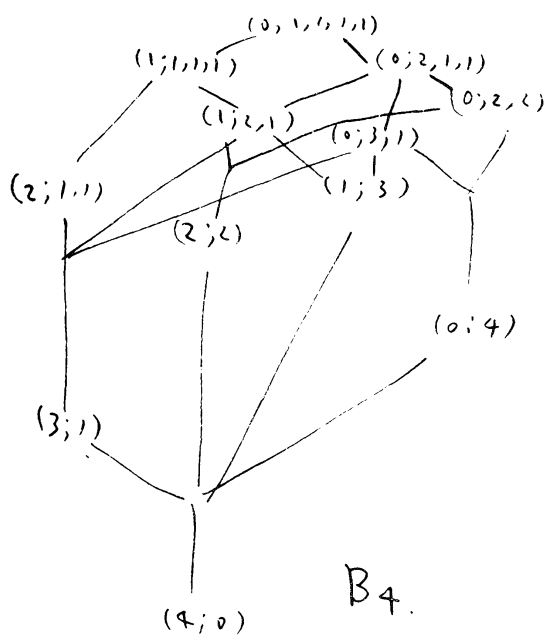
$(1; 1, \dots, 1)$ と $(; 2, 1, \dots, 1)$ とは $1/2$ と $1/2$ に diagram (0) である

が、基底である、 ξ_i の $\text{hypersurface } x_i = 0, \Delta(1, x_1, \dots, x_\ell) = 0$

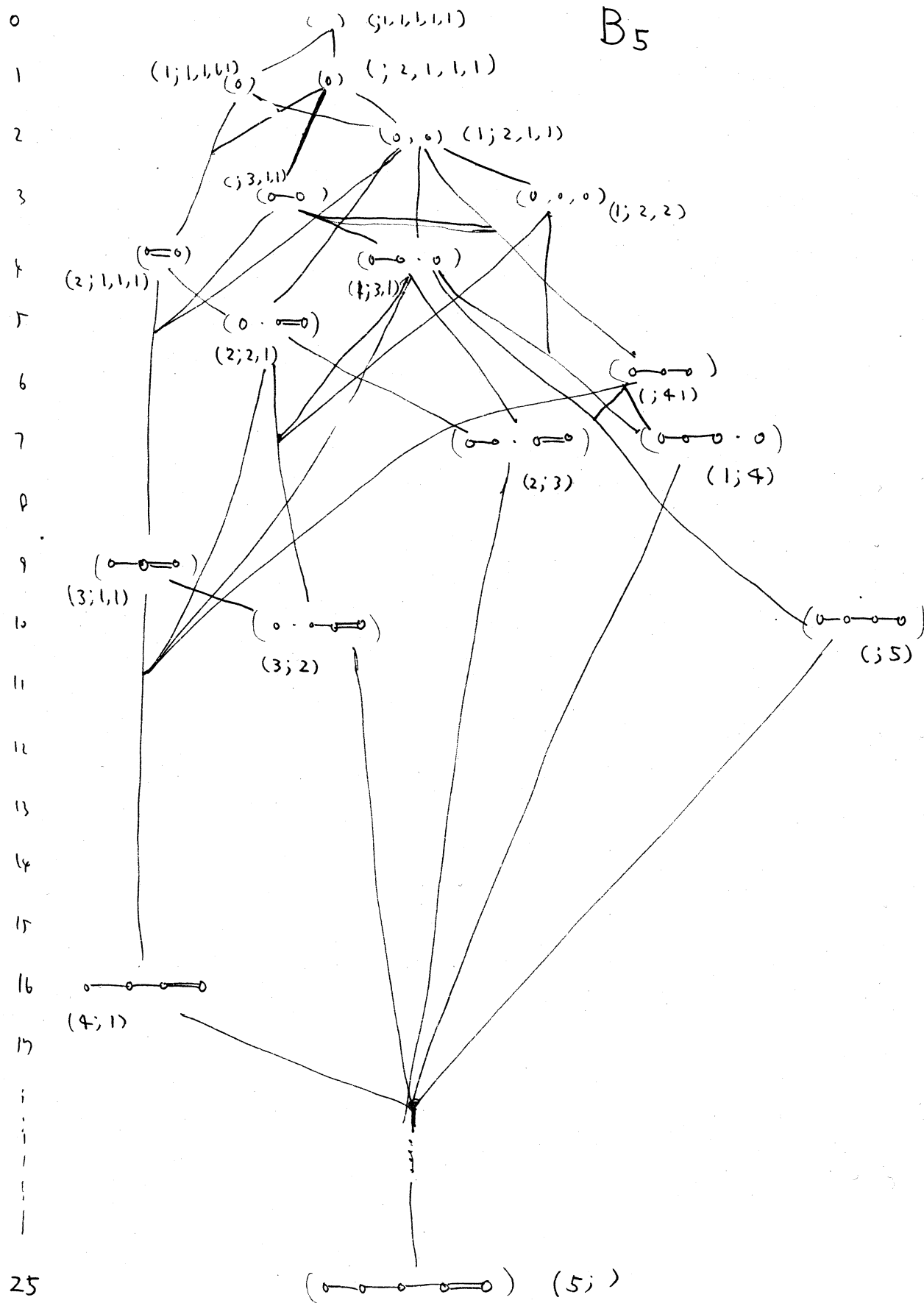
の normal に対応する。

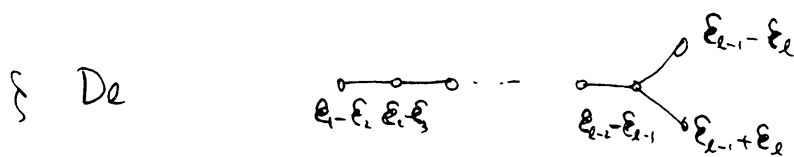
不等式の base には, $g_\nu (\xi_i^2 \text{ or } \nu \text{ or } \text{sum}) \quad 1 \leq \nu \leq \ell$ をとてよい。

Lagrangians の基底は, n_0 を 2 つに分けて, -1 を j 個へ
 1 つは -1 と $\sqrt{-1} n_i$ $1 \leq i \leq k$ を 2 つに分ける) により生じる。



交わりも、 ξ_i により与えられる。





$D_\ell \circ (\xi_i) \cap$ の作用は, すべて (i) の置換 $\epsilon_i \mapsto \epsilon_i \xi_i$
 $\epsilon_i = \pm 1$, $\prod \epsilon_i = 1$ である. ξ space にあいて, 面分の基底は,

$$(n_0; n_1, \dots, n_k) \quad \begin{matrix} * \\ m_0 = 0 \text{ or } \geq 2, n_i \geq 1, n_0 + n_1 + \dots + n_k = \ell \end{matrix} \quad \text{ただし}$$

$$(0; n_1, \dots, n_{k-1}, [n_k-1, 1]) \leftarrow \begin{matrix} n_1, \dots, n_k, \text{even} \rightarrow \text{奇} \\ n_k \geq 2 \end{matrix} \quad \text{整数の組により}$$

代表 () する。ここで, n_0 は, $(\xi_1, \dots, \xi_k) \rightarrow \xi$ n_0 だけ 0 で

あることを示し, $n_1, \dots, n_k$ は ξ_1 の n_1 個, $\dots$, n_k 個の ξ_k

等 (ξ non-zero である) を示してゐる。又, ξ_2 の n_2 個

の $[n_k-1, 1]$ は, $0 \neq \xi_{\ell-n_k+1} = \xi_{\ell-n_k+2} = \dots = \xi_{\ell-1} = -\xi_\ell$ を示す。

$n_1, \dots, n_k$ even であることは, 示す。 $(0; n_1, \dots, n_{k-1}, n_k) \geq 1$

D_ℓ の作用で ξ のつりえはない。尤も, $(0; n_1, \dots, [n_k-1, 1], \dots, n_k)$

とある, かつある。 e.g. $(; 4, [1, 1]) = (; [3, 1], 2)$

特に ℓ : odd の場合, ξ の ξ_2 の type の ξ は存在しない。

$n_0 = 1$ の ξ は存在する。また, operator $\chi_{\frac{\ell}{2}-1}$ は

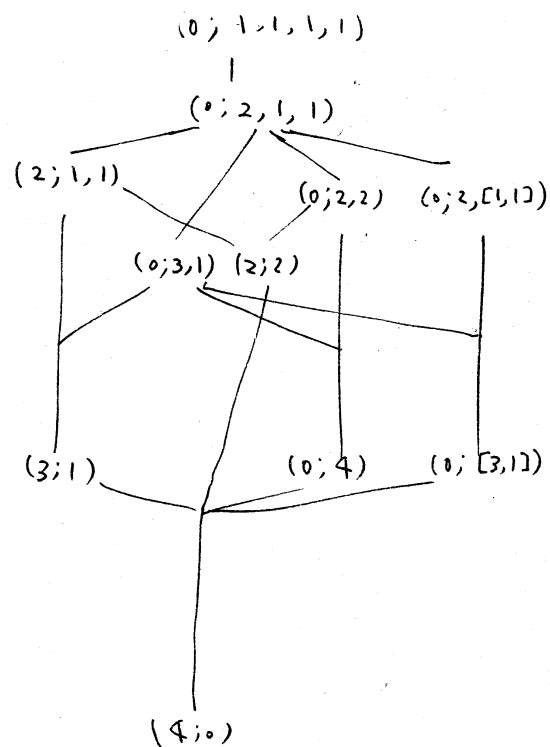
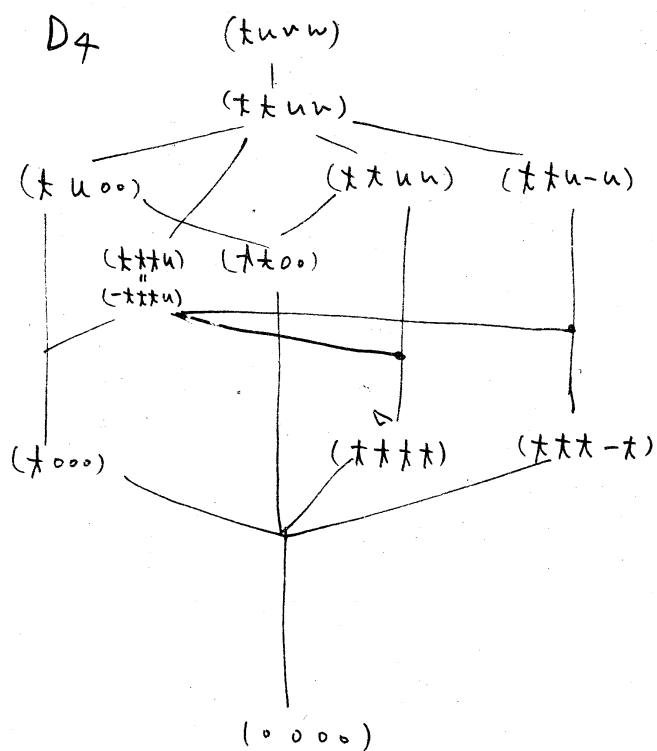
$\chi_{\frac{\ell}{2}} \neq 0$ ならば $\xi \mapsto \xi + \frac{\epsilon}{\xi}$ と ξ action に対す。 $\chi_{\frac{\ell}{2}} = 0$,

$\chi_{\ell-1} \neq 0$ ならば (e.g. $\xi_1 = 0, \xi_2, \dots, \xi_n \neq 0$) $\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, $\chi_{\frac{\ell}{2}} = \chi_{\ell-1} = 0$

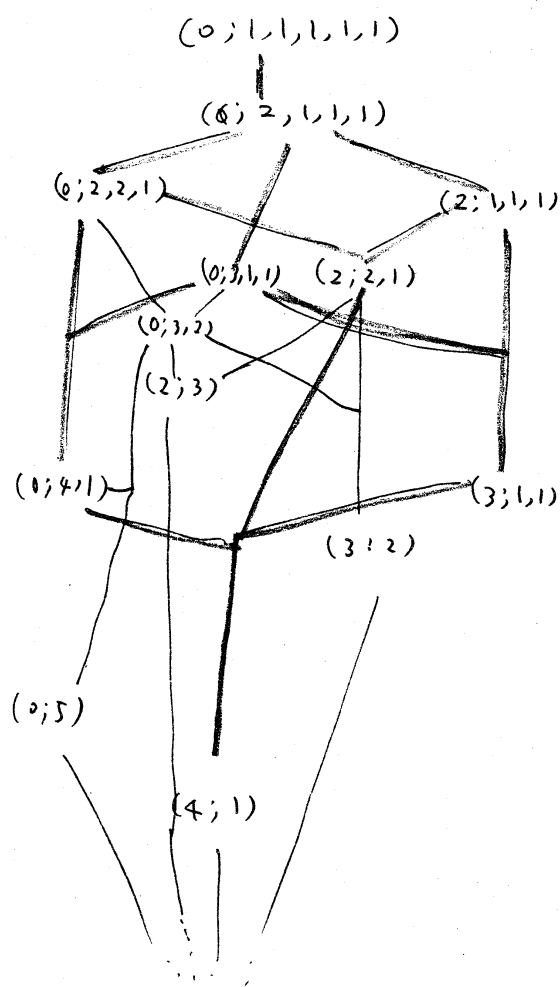
ならば zero 作用を受ける。

よって $(1; n_1, \dots, n_k)$ は $(0; 1, n_1, \dots, n_k)$ に含まれてゐる。

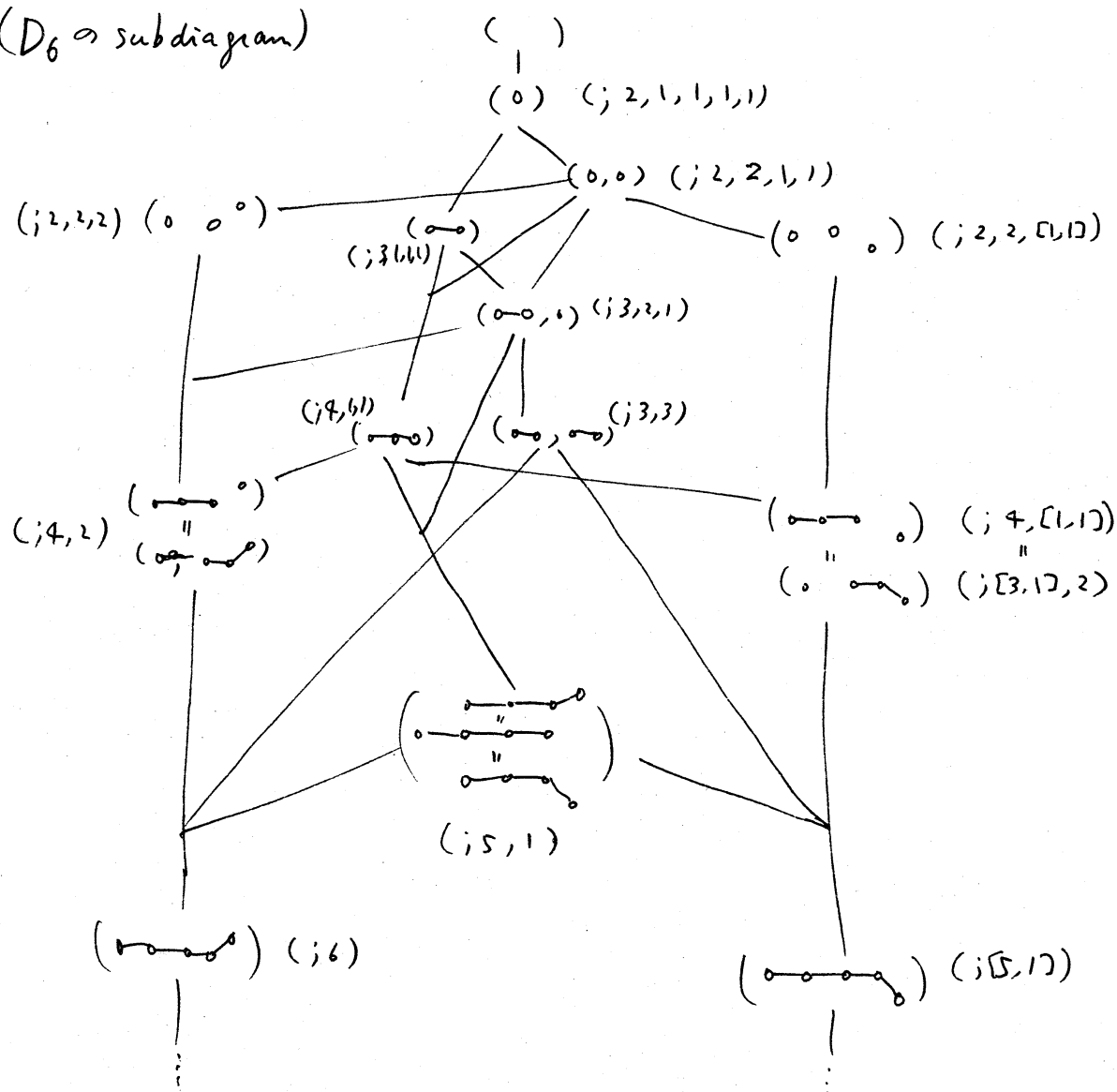
$$* \text{ vol} = n_0 + \frac{k}{2}(n_k-1), \text{ order} = - (n_0(n_0-1) + \sum_1^k \binom{n_i}{2})(\rho + \frac{1}{2}).$$



D_5 右に 2.17, (4; 1) は diagram
 $(\circ \rightarrow \circ)$ で表され, 群 D_5 垂直の
 作用により, その上の holonomy
 diagram は, D_4 のもの, 一部を
 融合させたものになる。



($D_6 \hookrightarrow$ subdiagram)



§4. 例外群に對するもの。

E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 .

G_2 は §3 の $I_2(6)$ と同値であるので、ここでは省略する。

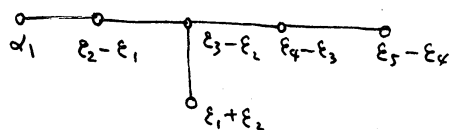
F_4 の不変式 f は既知であるが、 $f = g \cdot g^*$ と二因子分解を
 持ち、 $g^*(z_1, z_3, z_4, z_6) = g(z_1, -z_3, z_4, -z_6)$ である。

holonomy diagram は以下に示すように性質を持つ。

E_6 においては、holonomy diagram は、graph として
 二つの部分に分けられるが、 E_7 では一つである。
 E_8 においては、同様に二つの部分に分けられている。

E_ℓ における Lie 環 $\mathfrak{g}$ は決定できる。

E_ℓ の基本不変式は、 $(\xi_1, \dots, \xi_{\ell-1}, \xi_\ell)$ の homogeneous polynomial
 として、 $(\xi_1, \dots, \xi_{\ell-1})$ の $D_{\ell-1}$ 不変式を係数とする、 ξ_ℓ の多項式に
 なっている。これは具体的に (e.g. エルミット多項式等) 知られているが、後述のように本稿には必要でない。

§ E_6 

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \frac{1}{2}(\epsilon_2 + \dots + \epsilon_5) \\ = \frac{1}{2}\epsilon_1 - \frac{1}{2}(\epsilon_2 + \dots + \epsilon_5) - \frac{\sqrt{3}}{2}\epsilon'_6$$

$\mathbb{R}^8$ 内の $\xi_6 = \xi_7 = -\xi_8$ なる subspace をとる. $\epsilon_1, \dots, \epsilon_5$ と $\epsilon'_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\epsilon_6 + \epsilon_7 - \epsilon_8)$

により正規直交基底をとる. ϵ'_6 の係数を ξ'_6 と記す.

E_6 の作用は. $\xi_1, \dots, \xi_5$ のかゝる置換と, $\xi_i \mapsto \epsilon_i \xi_i$ ($1 \leq i \leq 5$, $\epsilon_i = \pm 1$)

$\prod \epsilon_i = 1$, $\xi'_6 \mapsto \xi'_6$, さらに, 次の元 (α_i に 1 個ずつ 縮映) で生成

される.

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = A \quad \text{と記す}$$

即ち $\xi_1, \dots, \xi_5$ に対しては, D_5 の作用がある.

この元 1 つ面分の群として, 次の 6 つが得られる.

$(0, 0, t, t, t, -\sqrt{3}t)$
 $(t, t, t, t, t, \sqrt{3}t)$

 $(0, 0, 0, t, t, \frac{-2}{\sqrt{3}}t)$,
 $(-t, t, t, t, t, \frac{5}{\sqrt{3}}t)$

 $(0, 0, 0, 0, -\sqrt{3}t, t)$,
 $(0, 0, 0, 0, 0, t)$

後 4 つの 2 つづつは, ξ'_6 の作用で, 互に同じである. 実際,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} \sqrt{3} \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}t \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}t \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} -2\sqrt{3} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ t \\ -t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow -2\sqrt{3} \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ \frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ \frac{2}{\sqrt{3}}t \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} 4 \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightarrow 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ t \\ -\frac{t}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \xrightarrow{A} 2 \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \\ t \\ t \\ -\frac{5}{\sqrt{3}}t \end{pmatrix} \rightarrow 2 \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \\ t \\ t \\ -\frac{5}{\sqrt{3}}t \end{pmatrix}$$

次元2のものも、同じ diagram をキコバて E_6 の作用でうつろいこわす。尚このとき D_4 の diagram $\cdot \circ \circ \circ \cdot$ がキコバれたら、より上にくる次元3の diagram $\cdot \circ \circ \circ \cdot$ $\cdot \circ \circ \cdot$ $\cdot \circ \cdot$ はキコバて同形になる。これは、 D_4 自身では3つとも異なり、 D_5 の sub diagram としてキコバれても2つであつた。このことは、直接には述べずにして確かめられる。

$$\begin{array}{ccccccc} \circ \circ \circ \cdot & \cdot \circ \circ \cdot & \cdot \circ \circ \circ \cdot & \cdot \circ \circ \cdot & \cdot \circ \circ \circ \cdot & \cdot \circ \circ \cdot & \cdot \circ \circ \circ \cdot \\ (t+t+t, u, \frac{t-u-v}{\sqrt{3}}) & (0,0,0, t, u, \frac{u}{\sqrt{3}}) & (t+t+t, u, v) & (-t, t, t, t, u, v) & (t, u, u, u, u, v) \end{array}$$

後の3つは parameter のとりかえと $F_1, \dots, F_5$ の D_5 の作用で同じでキコバておける。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ \frac{u}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} \begin{pmatrix} t+u+v \\ -(t+u+v) \\ -(t+u+v) \\ 3t-u-v \\ -t+3u-v \\ -3t-3u+v \\ \hline \sqrt{3} \end{pmatrix} \equiv_{\text{af}} \begin{pmatrix} T \\ -T \\ -T \\ U \\ V \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} T \\ T \\ T \\ U \\ V \\ -T-u-v \\ \hline \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

よって初めの2つも同じ。

$$\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \\ t \\ u \\ \frac{u}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \xrightarrow{4A} \begin{pmatrix} 6t+u+v \\ 2t-u-v \\ 2t-u-v \\ 2t-u-v \\ -2t+3u-v \\ -6t-3u+v \\ \hline \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ T \\ T \\ T \\ U \\ -T-u-v \\ \hline \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

よってキコバておけるものは同じ。

$(E_6, S) \propto S$ なる部分集合 S_1, S_2 を含む部分群は、 S_1 と S_2 が同型であるときに、交代になることがわかった。従って、holonomy diagram も、かなり簡単になる。

尚、Coxeter diagram は左右対称であるが、その対称性をいさぐさ orthogonal matrix に、

$$* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & -1 & -\sqrt{3} \\ & & & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。不変式

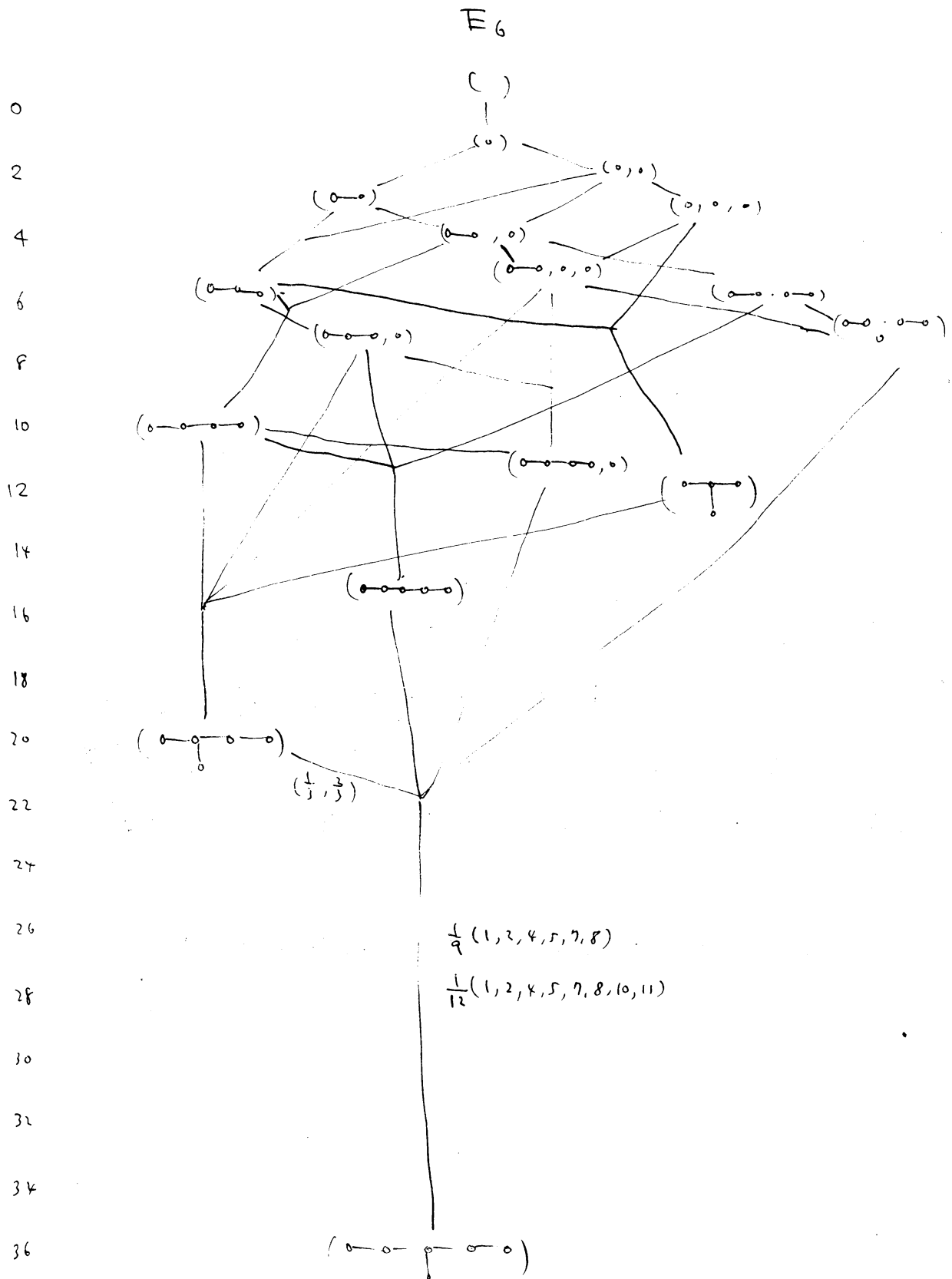
$z_2, z_5, z_6, z_8, z_9, z_{12}$ も、

これに用いてより変換をいける

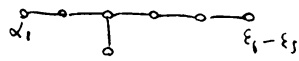
ように定められるべきである。

(cf F_4). $z_2 = \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \dots + \xi_5^2 + \xi_6^2)$ は $z_2^* = z_2$ である。

他の不変式は、 $\xi_1 \dots \xi_5$ に D_5 の作用を行い、 ξ_6' を不変にしたとき、不変であることが、 ξ_6' の多項式として、係数は $\xi_1 \dots \xi_5$ の D_5 の不変式であることがわかる。(この論法は E_7, E_8 についても、 D_6, D_7 の作用を用いて同様にいえる)



$\xi \quad E_7$



$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_6) - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_7'$$

$$\varepsilon_7' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_7 - \varepsilon_8)$$

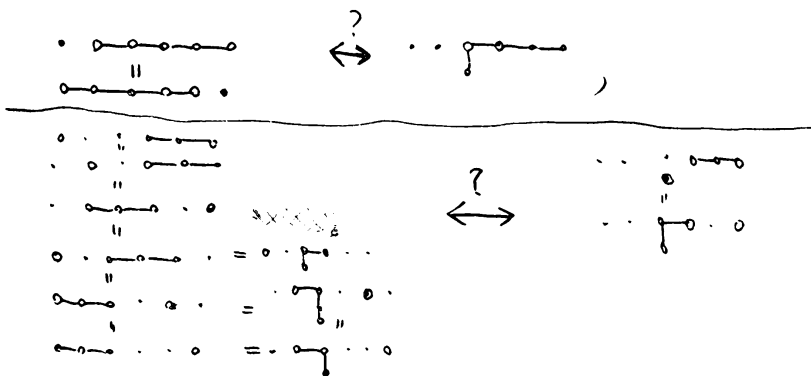
$\xi_1\varepsilon_1 + \dots + \xi_6\varepsilon_6 + \xi_7'\varepsilon_7'$ を作用として, $(\xi_1, \dots, \xi_6) \in D_6$ の

作用を, α_1 に対して

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \text{ により生成される.}$$

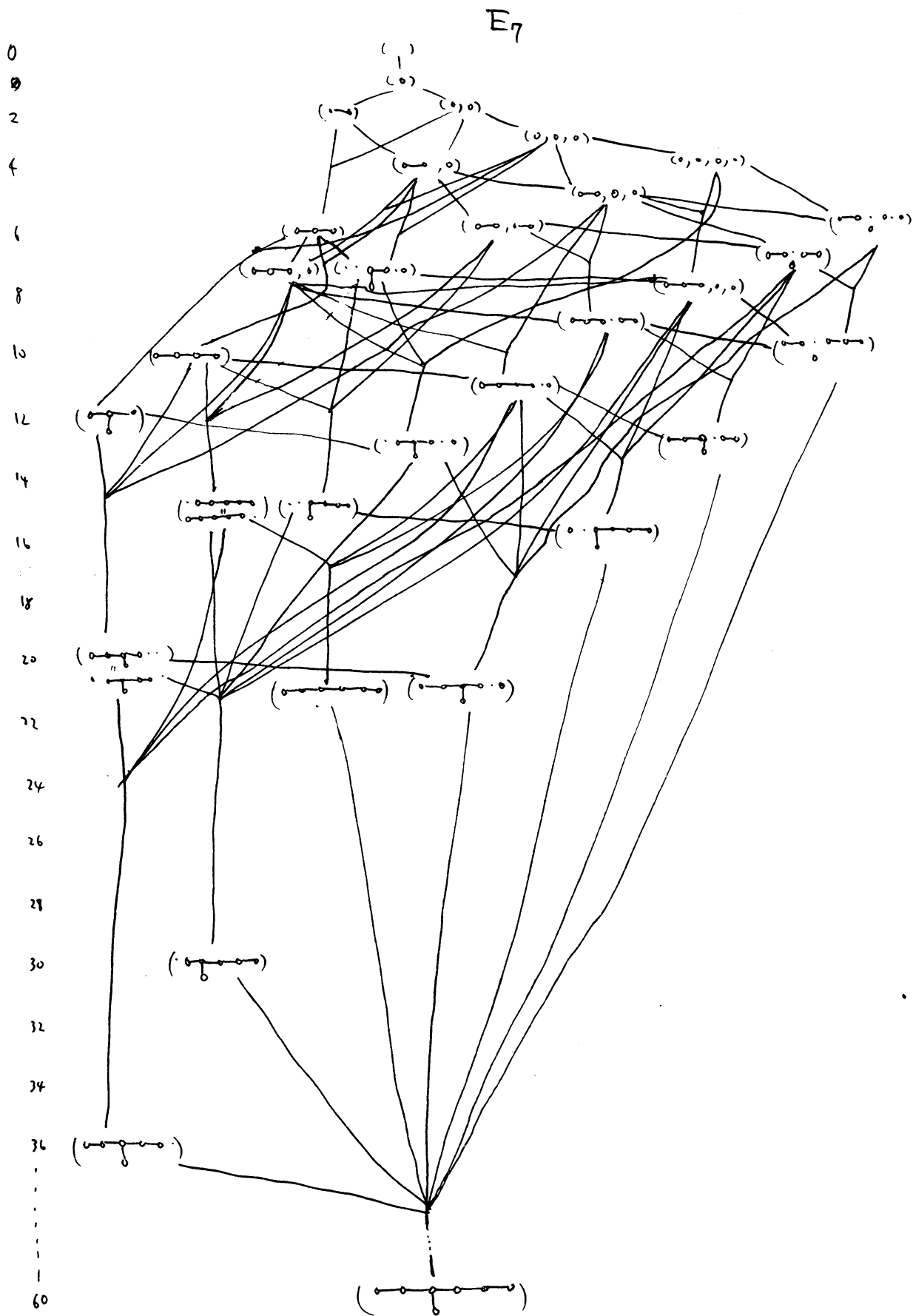
holonomy diagram の決定, 即ち (E_7, S) の $S \supset S'$ により生成される Dynkin diagram の決定には, すでに決定した E_6 ,

$D_n \leqslant E_6, A_n \leqslant E_6$ の結果を援用すれば, A_5 型の 2通り, $A_3 \times A_1$ 型の 2通りが同一かどうかの check をすればよいことがわかる。



こゝでは各々の役割でよいとわかる。

E_8 についても同様に行なうことが略する。



$$\S \quad F_4. \quad \overbrace{\varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_4, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)}$$

F_4 の root 系 (に対する 壁 の 定義式) は 48 個 (24 個) であるが, 下記 の 2 group に 分かれ, それぞれ F_4 の 作用で 安定 である。

$$1. \quad \pm \xi_i \pm \xi_j \quad 1 \leq i < j \leq 4$$

$$2. \quad \pm \xi_i, \quad \frac{1}{2}(\pm \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3 \pm \xi_4)$$

従って, 基本 不変式 $D = \prod^{24} (\quad)$, は $D = D_1 D_2$ と なる。

分解 を せよ, 具体的には $D_1 = \prod_{i,j}^{12} (\xi_i^2 - \xi_j^2)$, $D_2 = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \prod_{i,j}^8 (\xi_i \pm \xi_j \pm \xi_k \pm \xi_l)$

である。 $* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ により α_1 と α_2 は 2 通りある。

g_0, p_0 を, ξ_i^2 に 関する D 次 中核, D 次 基本 対称式 と する。

$$D_1^2 = \Delta_4(1, -p_1, p_2, -p_3, p_4) \quad (t^4 - p_1 t^3 + p_2 t^2 - p_3 t + p_4 = 0 \text{ の discriminant})$$

$$D_2^2 = p_4 ((p_1^2 - 4p_2)^2 - 8^2 p_4)^2 = p_4 ((2g_2 - g_1^2)^2 - 8^2 p_4)^2$$

基本 不変式 は weight 2, 6, 8, 12 の もの により 生成 される。

以下 weight は 半分 に して, $(1, 3, 4, 6)$ と する。特に, α の $*$

$$\alpha$$
 の 作用 に対して, $z_1^* = z_1, \quad z_3^* = -z_3, \quad z_4^* = z_4, \quad z_6^* = -z_6$

となる もの が 分かる。 z_1, z_3 は unique であり, z_4, z_6 は

$\text{mod } z_1^4, \text{ mod } z_3 z_1^3$ で unique である。以下 z_i は 2 次 の 式 に 与えらる。

$$z_1 = \frac{1}{2} g_1 = \frac{1}{2} p_1$$

$$z_3 = 3g_3 - \frac{15}{4} g_2 g_1 + \frac{15}{16} g_1^3 = 9p_3 - \frac{3}{2} p_2 p_1 + \frac{3}{16} p_1^3$$

$$z_4 = 9g_4 - \frac{21}{2} g_3 g_1 - \frac{21}{4} g_2^2 + \frac{63}{8} g_2 g_1^2 - \frac{39}{32} g_1^4$$

$$= -36 p_4 - 3 p_2^2 + \frac{9}{2} p_3 p_1 + \frac{3}{4} p_2 p_1^2 - \frac{3}{32} p_1^4$$

$$= -36p_4 - 3(p_2 - \frac{1}{4}p_1^2)^2 + z_3 z_1 = -36p_4 - 3p_2^2 + 9p_3 p_1 - z_3 z_1$$

$$\begin{aligned} z_6 &= 2(p_2 - \frac{1}{4}p_1^2)(36p_4 - (p_2 - \frac{3}{4}p_1^2)^2 - \frac{1}{4}p_1^4) - \frac{1}{6}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4 z_1^2 + \frac{1}{8}z_1^6 \\ &= 9\left\{(8p_2 - 3p_1^2)(p_4 - \frac{1}{36}p_2^2) - 3(p_3 - \frac{1}{6}p_2 p_1)^2\right\} + \frac{1}{6}z_3^2 - \frac{1}{2}z_4 z_1^2 - \frac{1}{8}z_1^6 \\ &= 72p_4 p_2 - \frac{27}{2}p_3^2 - \frac{45}{2}p_3 p_1^2 + \frac{9}{2}p_3 p_2 p_1 - 2p_2^3 + \frac{3}{4}p_2^2 p_1^2 - \frac{3}{16}p_2 p_1^4 + \frac{5}{12}p_1^6 \end{aligned}$$

$$\frac{f}{1} = D^2 z \cdot z < z, \quad f = g \cdot g^* \quad z \neq j + \pm 4j. \quad = = =,$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{27}(z_4 + z_1 z_3)^3 + \frac{1}{4}(z_6 + \frac{1}{2}z_1^2 z_4 - \frac{1}{6}z_3^2 + \frac{1}{8}z_1^6)^2 \\ g^* &= \frac{1}{27}(z_4 - z_1 z_3)^3 + \frac{1}{4}(z_6 - \frac{1}{2}z_1^2 z_4 + \frac{1}{6}z_3^2 - \frac{1}{8}z_1^6)^2 \quad \star\star) \end{aligned}$$

f は不変に於て $\mathbb{C}$ の $\mathbb{F}_6$ は, 下記の X_0, X_2, X_3, X_5 により

$$\star\star), \quad X_0^* = X_0, \quad X_2^* = -X_2, \quad X_3^* = X_3, \quad X_5^* = -X_5 \quad \text{で表す}$$

	D_1	D_3	D_4	D_6
X_0	z_1	$3z_3$	$4z_4$	$6z_6$
X_1	$3z_3$	$-15(z_4 + \frac{3}{20}z_1^4)z_1$	$-6(3z_6 + z_1^3 z_3)$	$(4z_4^2 - \frac{9}{2}z_4 z_1^4 + \frac{11}{2}z_1^2 z_3^2 - \frac{9}{8}z_1^8)$
X_3	$4z_4$	$-6(3z_6 + z_1^3 z_3)$	$-15z_1^3 z_4 + 7z_1 z_3^2 - \frac{9}{4}z_1^7$	$-9z_1^3 z_6 + 11z_1^2 z_3 z_4 - z_3^3 + \frac{3}{4}z_1^6 z_3$
X_5	$6z_6$	$4z_4^2 - \frac{9}{2}z_1^4 z_4 + \frac{11}{2}z_1^2 z_3^2 - \frac{9}{8}z_1^8$	$-9z_1^3 z_6 + 11z_1^2 z_3 z_4 - z_3^3 + \frac{3}{4}z_1^6 z_3$	$6z_1^2 z_3 z_6 + 5z_1^3 z_4^2 - \frac{11}{3}z_1 z_3^2 z_4 + 2z_1^5 z_3^2 + \frac{3}{4}z_1^6 z_4$

$$\begin{cases} X_0 f = 24f \\ X_2 f = 0 \\ X_3 f = -36z_1^3 f \\ X_5 f = 24z_1^2 z_3 f \end{cases}$$

$$\det(\text{matrix}) = 2^8 3^6 f.$$

$$\star\star) \quad g = 3^6 D_1^2, \quad g^* = -\frac{3^3}{2^6} D_2^2.$$

$$[X_2, X_3] = -\frac{21}{2} z_1^2 z_3 X_0 + \frac{3}{2} z_1^3 X_2 - 3 X_5$$

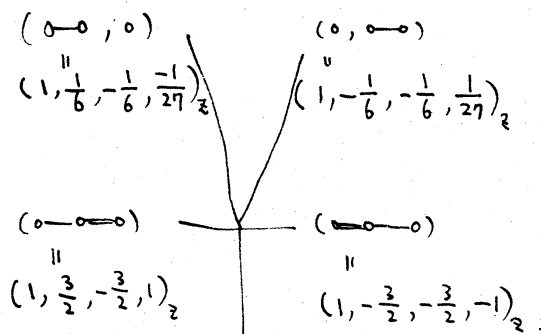
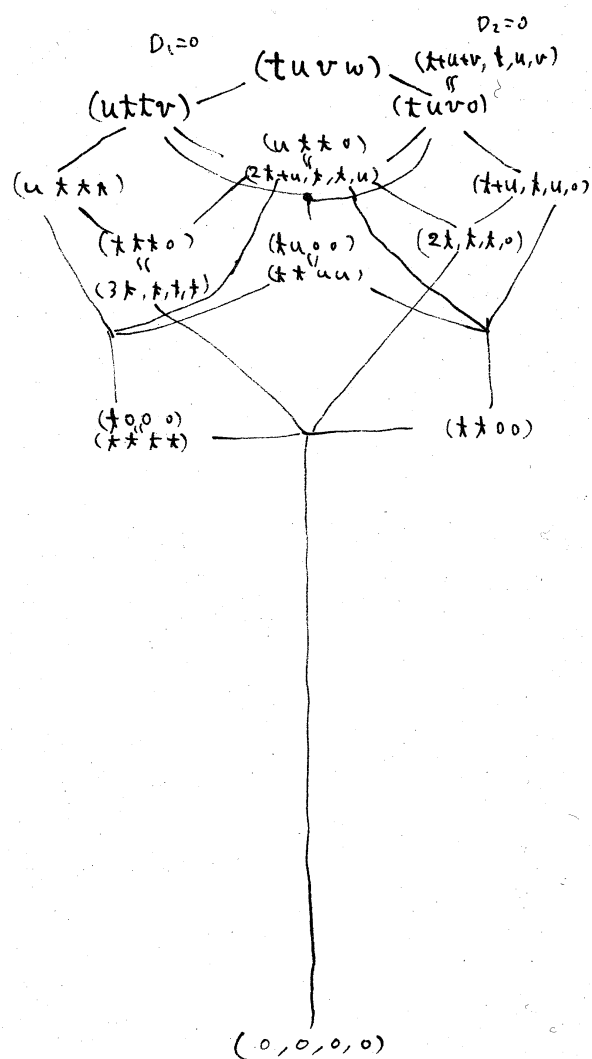
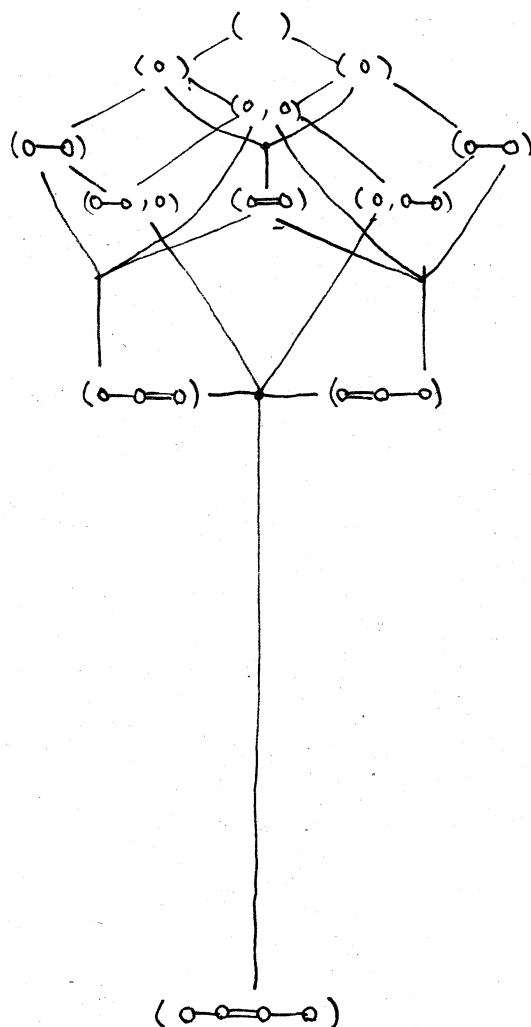
$$[X_2, X_5] = \left(-\frac{21}{2} z_1^3 z_4 + 6 z_1 z_3^2 - \frac{27}{8} z_1^7\right) X_0 + \frac{7}{2} z_1^2 z_3 X_2 + \left(3 z_4 - \frac{3}{4} z_1^8\right) X_3$$

$$[X_3, X_5] = \left(9 z_1^2 z_6 + 8 z_1 z_3 z_4 - \frac{3}{4} z_1^5 z_3\right) X_0 + \left(4 z_1^2 z_4 - \frac{2}{3} z_3^2 + \frac{3}{4} z_1^6\right) X_2 \\ + \frac{1}{2} z_1^2 z_3 X_3 - \frac{9}{2} z_1^3 X_5$$

(ξ_i) に対する F_4 -作用は, B_4 の作用と, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ により生成される. holonomy diagram は,

同型のグラフの3組あり, 対称的をもっている。

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24



(diagram 左右は *?)
i>3

§5 ルート系に対応しない Coxeter 群.

Coxeter 群で, ルート系に対応しないもの, $H_3, H_4, I_2(m)$ がある. 以下に, 詳しくのべることにより, 実降計算の方法を示すことにする. H_3, H_4 については, 詳しくのべた文献がみあたらないので, 特に詳細に記す.

1. $I_2(m)$. $\xrightarrow{m}$

$$I_2(3)=A_2, I_2(4)=B_2, I_2(6)=G_2, (I_2(2)=D_2 \text{ (112112)})$$

$m=5, m \geq 7$ はルート系に対応しない.

$E = \mathbb{R}^2$ の基底を (1) で表わし, 正規直交基底を e_1, e_2 とする.

$$\alpha = \frac{\pi}{m}, \quad e_k = \cos(k-\frac{1}{2})\alpha e_1 + \sin(k-\frac{1}{2})\alpha e_2 \quad k=1, 2, \dots, 2m.$$

$e_k \quad (1 \leq k \leq m)$ の方向の直交鏡映を s_k とする. s_1, s_m の

生成した群は, 11 かつ 2 の面体群で, $(s_1 s_m)^m = 1$. これは

$$(e_1 | e_1) = (e_m | e_m) = 1, (e_1 | e_m) = -\cos \alpha \text{ と対応してあり, Coxeter}$$

diagram は $\begin{array}{c} \circ \\ s_1 \end{array} \xrightarrow{m} \begin{array}{c} \circ \\ s_m \end{array}$ ことを $I_2(m)$ とよぶ. 鏡映は,

$s_1, s_2, \dots, s_m$ で表わし, $e_1, \dots, e_{2m}$ が, ルート系を代用する.

$$(e_1, e_2) s_1 = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (e_1, e_2) s_m = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha.$$

$S(E) \ni D = \prod_{k=1}^m e_k$ が anti-invariant. Coxeter 交換 = $s_1 s_m$ で表わし,

χ の位数が m , characteristic polynomial は $(T - \exp \frac{2\pi i}{m})(T - \exp \frac{2(m-1)\pi i}{m})$

であることより, Coxeter number は m , 不変式の次数は $2, m$.

である. 今, $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + i e_2), \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + i e_2)$ とおけば,

$$(\beta_1 | \beta_1) = (\beta_2 | \beta_2) = 0 \quad (\beta_1 | \beta_2) = -1.$$

$$(\beta_1, \beta_2) s_1 = (e^{-\alpha_1} \beta_2, e^{+\alpha_1} \beta_1), \quad (\beta_1, \beta_2) s_m = (e^{+\alpha_1} \beta_2, e^{-\alpha_1} \beta_1) \text{ 也 } 1)$$

不変式は $\beta_1 \beta_2, \beta_1^m - \beta_2^m$ である。一方 答 3 に,

$$(\sqrt{2}\lambda)^{-m} D = \beta_1^m + \beta_2^m \text{ であるから } \sim \tau',$$

$$(-2)^{-m} D^2 = (\beta_1^m - \beta_2^m)^2 + 4(\beta_1 \beta_2)^m.$$

さて, $S(E^*)$ に對しては, β_1, β_2 の代數によつて, 不変式を求め

$$\xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 = \eta_1 \beta_1 + \eta_2 \beta_2 \text{ であるから } \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - i\xi_2), \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + i\xi_2)$$

$$s_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha_1} \eta_2 \\ e^{-\alpha_1} \eta_1 \end{pmatrix}, \quad s_m \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha_1} \eta_2 \\ e^{+\alpha_1} \eta_1 \end{pmatrix} \text{ である,}$$

$$x_2 = \eta_1 \eta_2 \quad (= -\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2))$$

$$x_m = \eta_1^m - \eta_2^m \quad (= (\sqrt{2})^m (i)^{m-1} \prod_{k=0}^{m-1} (\cos k\alpha \xi_1 - \sin k\alpha \xi_2)) \quad 1)$$

* invariant である, anti-invariant は $D^* = \eta_1^m + \eta_2^m = (\sqrt{2}\lambda)^m \prod_{k=1}^m (\cos(k-\frac{1}{2})\alpha \xi_1 - \sin(k-\frac{1}{2})\alpha \xi_2)$ である 2)

Lie E_6^{α} であるから $1=12$, $(d\xi_1|d\xi_1) = (d\xi_1|d\xi_2) = 1$, $(d\xi_1|d\xi_2) = 0$ である

$$(d\eta_1|d\eta_1) = (d\eta_2|d\eta_2) = 0, \quad (d\eta_1|d\eta_2) = -1.$$

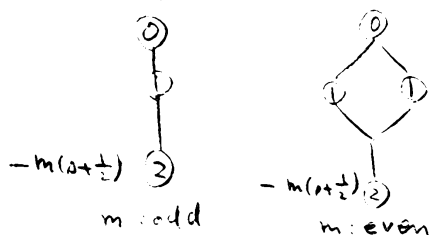
$$\therefore (dx_2|dx_2) = -2x_2, \quad (dx_2|dx_m) = -mx_m, \quad (dx_m|dx_m) = 2m^2 x_2^{m-1}.$$

従つて,

$$\boxed{\begin{aligned} X_0 &= 2x_2 D_2 + mx_m D_m \\ X_{m-2} &= mx_m D_2 + 2m^2 x_2^{m-1} D_m. \end{aligned}}$$

$$-\frac{1}{m^2} \det(\text{if } \xi) = x_m^2 + 4x_2^m \text{ であるから, } = (-2)^{-m} D^{*2}$$

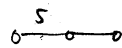
holonomy diagram は 下記, $h(s) = (s+1) \prod_{\mu=1}^{m-1} (s + \frac{1}{2} + \frac{\mu}{m})$.



$m: \text{odd} \Rightarrow s_1 \text{ と } s_m \text{ は } \alpha$
 $m: \text{even} \Rightarrow \quad \quad \quad \alpha$

これは ① の分岐に對しては 2 であることに注意せよ。

$$1) 2) \text{ 4) 5) 4) } (-\sqrt{2})^m \lambda^{-1} \prod_{k=1}^m (\cos k\alpha \xi_1 + \sin k\alpha \xi_2), \quad (-\sqrt{2}\lambda)^m \prod_{k=1}^m (\cos(k-\frac{1}{2})\alpha \xi_1 + \sin(k-\frac{1}{2})\alpha \xi_2) \text{ であるから.}$$

2. H_3 .

四元数の標準基を $(1, i, j, k)$ とし, $u = xi + yj + zk$ の形の
元からなる部分集合を E とし, $\mathbb{R}^3$ と同一視する.

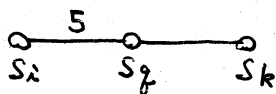
$$q = ai + bj + ck \quad a = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, b = \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, c = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

と置く. q の座標のまわりの偶置換と, 座標の符号によって
なづけ方により生じた 24 個の元と, $\pm i, \pm j, \pm k$ と計 30 個の
集合を R とする. (ルート系の代用品) $R \ni \alpha$ のとき,

E の直交鏡映で, α を $-\alpha$ にうつす s_α は, $u \mapsto \alpha u \alpha$

(四元数の積) と表示(する). $\{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$ が生成した, $GL(E)$

の部分群が H_3 であり, Coxeter diagram は (base $-i, j, -k$ ととり)



H_3 の鏡映は, R から生じる 15 個であり.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ の作用として表示すれば, } s_i = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} s_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} s_k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$s_j = \begin{pmatrix} b & c & -a \\ c & a & -b \\ -a & -b & c \end{pmatrix} \text{ であり, } s_j s_i s_j s_k s_i s_j = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \text{ etc. } \rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \\ & \downarrow & \\ & z & x \end{pmatrix}$$

従って, 不変式は, x^2, y^2, z^2 の函数で, 11 回置換で不変,
 s_j で不変をもつものを求めればよい. $p_2 = x^2 + y^2 + z^2, p_4 = x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2,$

$$p_6 = x^2 y^2 z^2, d = (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(x^2 - z^2) \text{ と表わせば, } \alpha_2 = p_2,$$

$$\alpha_6 = 11 p_6 - p_4 p_2 - \sqrt{5} d$$

$$\alpha_{10} = p_6 (19 p_4 - 13 p_2^2) - p_4^2 p_2 + p_4 p_2^3 + \frac{3}{\sqrt{5}} (p_4 + p_2^2) d \quad (\text{矢野})$$

* 同様に, 標準内積は $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (u \bar{v} + v \bar{u})$ と表示(する)

$$\frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial x_6}{\partial x} \right)^2 = 10 x_{10} + 4 x_2^2 x_6$$

$$2, \quad d^2 = -27 p_6^2 + 18 p_6 p_4 p_2 - 4 p_6 p_2^3 - 4 p_4^3 + p_4^2 p_2^2 \quad \Sigma 17) \quad \tau,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial x_6}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x_{10}}{\partial x} \right) &= 70 p_6^2 p_2 - 454 p_6 p_4 p_2^2 + 156 p_6 p_2^4 + 100 p_4^3 p_2 - 24 p_4^2 p_2^3 - 4 p_4 p_2^5 \\ &= -x_2 (5x_6^2 + 6x_{10}x_2 + 2x_6x_2^3) \end{aligned}$$

また 1 に複素数 5 計 4 はあり,

$$\frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial x_{10}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial x} \right) = -12 x_{10} x_6 x_2 + 4 x_{10} x_2^4 - \frac{3}{10} x_6^3 + \frac{3}{5} x_6^2 x_2^3 + \frac{6}{5} x_6 x_2^6$$

即ち Lie Eq 17,

$$\begin{cases} X_0 = x_2 D_2 + 3x_6 D_6 + 5x_{10} D_{10} \\ X_4 = 3x_6 D_2 + (10x_{10} + 4x_2^2 x_6) D_6 - x_2 (5x_6^2 + 6x_{10}x_2 + 2x_6x_2^3) D_{10} \\ X_8 = 5x_{10} D_2 - x_2 (5x_6^2 + 6x_{10}x_2 + 2x_6x_2^3) D_6 + (-12x_{10}x_6x_2 + 4x_{10}x_2^4 - \frac{3}{10}x_6^3 + \frac{3}{5}x_6^2x_2^3 + \frac{6}{5}x_6x_2^6) D_{10} \end{cases}$$

係数行列の rank 1 になる 2 は 3 種類あり, 各 2 codimension に定まる. 4 17, $(1, 0, 0), (1, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3^2}) \sim (3, 2, -6)$

$$(1, -\frac{2}{5}, \frac{38}{5^3}) \sim (5, -50, 19 \cdot 50)$$

$$[X_0, X_4] = 2X_4, \quad [X_0, X_8] = 4X_8$$

$$[X_4, X_8] = -2x_6x_2X_4 - 4(x_6^2 + 3x_{10}x_2 + x_6x_2^3)X_0 \quad //$$

$$D^{*2} = f(x) \tau, \quad f(x) = -250x_{10} + \frac{27}{10}x_6^5 + x_2 \varphi(x)$$

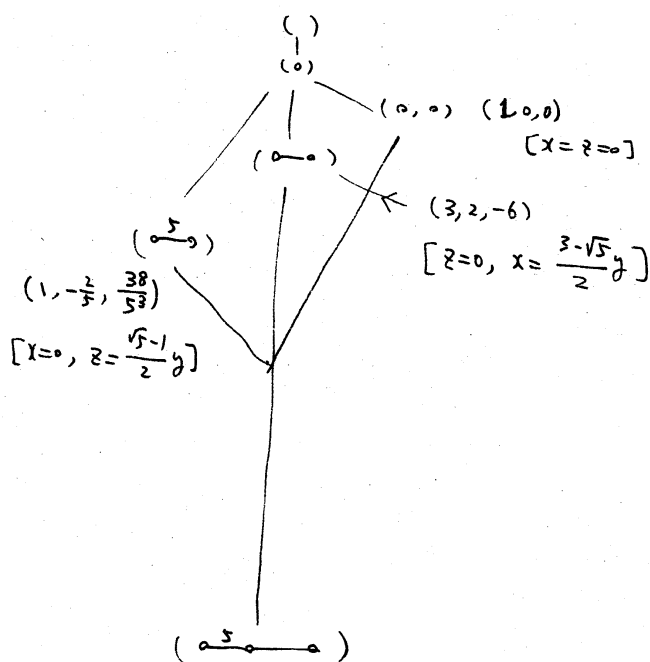
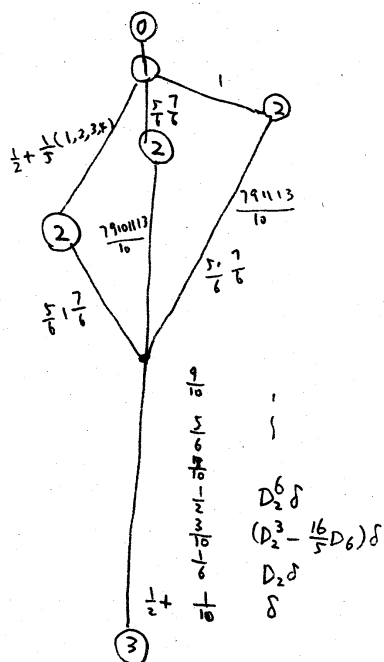
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 4(x_2^4 - 100x_6x_2)x_{10} + (45x_6^3 - 198x_6^2x_2^3 + 4x_6x_2^6)x_{10} \\ &\quad - \frac{158}{5}x_6^4x_2^2 - \frac{142}{5}x_6^3x_2^5 + \frac{4}{5}x_6^2x_2^8 \end{aligned}$$

$$x_2 = 1210 \quad x_6^2 + x_{10}^2 = 42.$$

$$x_0 f = 15f, \quad x_4 f = -2x_2^2 f, \quad x_8 f = (-20x_6x_2 + 2x_2^4) f.$$

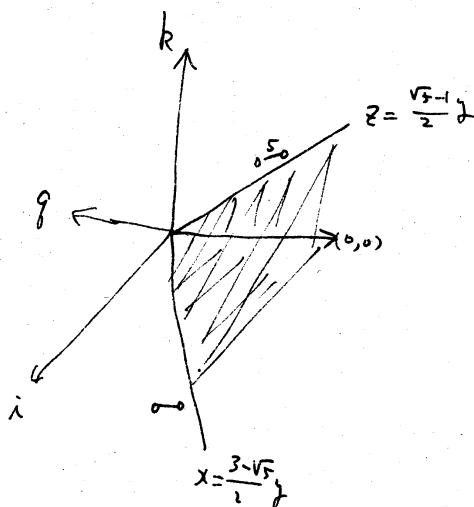
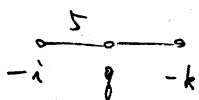
H_3

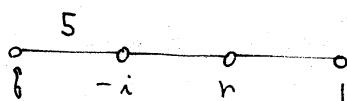
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15



$$b = (s+1) \prod_1^5 (s + \frac{1}{2} + \frac{\nu}{6}) \prod_1^9 (s + \frac{1}{2} + \frac{\nu}{10})$$

chamber



3. H_4 

$$f = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}, \quad a = \omega \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad b = \omega \frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \quad c = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}(-1 + \hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$$

$\xi_1 + \xi_2 \hat{i} + \xi_3 \hat{j} + \xi_4 \hat{k}$ に対する作用として, H_4 は,

$\{\xi_i\}$ の 陽変換, $\xi_i \mapsto \pm \xi_i$, ± 1 は, r, β に対応した,

$$R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & b & c & -a \\ & c & a & -b \\ & -a & -b & c \end{pmatrix} \quad \text{により生成される.}$$

次元 1 の diagram $\overset{5}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ, \overset{5}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ, \circ \text{---} \circ \text{---} \circ, \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$

はそれぞれ異なる. $\Rightarrow$ 元 2 の もつて,

$$\overset{5}{\circ} \text{---} \circ \text{---} \circ, \circ \text{---} \circ \text{---} \circ, \circ \text{---} \circ \text{---} \circ, \circ \text{---} \circ \text{---} \circ, \circ \text{---} \circ \text{---} \circ$$

$$(t, 0, t+u, u) \quad (0, t, u, t+u) \quad (0, 0, t, u) \quad (0, t, u, -2(at+bu))$$

$$\circ \text{---} \circ \text{---} \circ \quad ((2a+1)t + (2b+1)u, t, u, -2(at+bu)) \quad \text{2"ある. このとき}$$

が 2 の もつて 3 2 は, 陽変換? により等しい.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ u \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Q} \begin{pmatrix} 0 \\ bt+cu \\ ct+au \\ -at-bu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \\ U \\ 2(aT+bu) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ -2(at+bu) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2a+1)t + (2b+1)u \\ t \\ u \\ 2(at+bu) \end{pmatrix} \xrightarrow{R} \begin{pmatrix} t+u \\ (2a+1)t + 2bu \\ 2at + (2b+1)u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(aT+bu) \\ U \\ T \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ u \\ -2(at+bu) \end{pmatrix}$$

により, 残り 3 つも u とし. $(\forall) T(t=at, u(2)) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (2) \wedge (4)$

codim $1 \neq 9$ は, Coxeter diagram の 奇数個の頂で表すは
れていゝのである, (0) のみである. 従つて, この場合,

(H_4, S) の S の subset に生ずる群は, γ の diagram
が (1) である, 等価である.

基本不等式は $\text{height } (2, 12, 20, 30)$ である.

$$\Sigma_2 = \xi_1^1 + \dots + \xi_4^2.$$

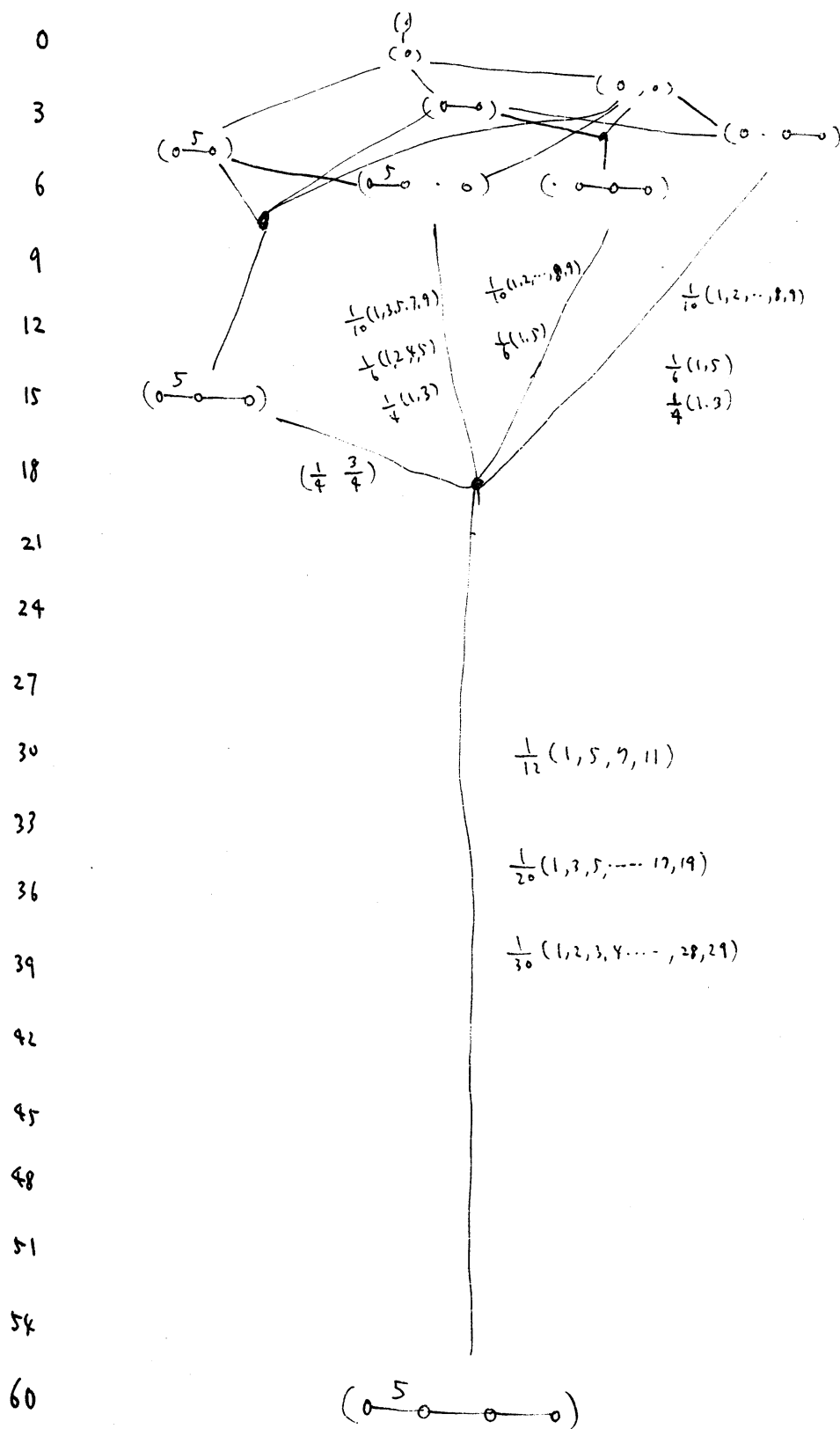
$$\Sigma_{12} \text{ は } d = \prod_{i < j} (\xi_i^2 - \xi_j^2) \text{ が関係してゐる.}$$

$$\Sigma_{12} = (p_8 p_4, p_8 p_2^2, p_6^2, p_6 p_4 p_2, p_4^2, p_4^2 p_2^2, p_4 p_2^4, p_2^6, d)$$

ここで p_{20} は ξ_4^2 の $\nu=2$ 基本対称式.

尚, $1, 8, 10$ 及び, 2 の座標の階層接点, 符号 $\pm$ のつ
かゝる符号の集合を Q とする, Q は 120 元からなり,
 $\text{norm } 1$ の 10 元群の有限部分群をなす. Q は, 10 -
元系に (1) の役割をばたいてゐる.

H4



正多面体との関連

H_3, H_4 は, 3, 4次元において, 特別な正多面体の存在と
かかわっている。次に, 正多面体の一覧表を (2) 。

次元	Coxeter群	Dynkin diagram	各面	diagram	②より
2次元					
正3角形	A_2		$\circ$	A_1	線分
正4角形	B_2		$\circ$	$\circ$	$\circ$
正6角形	G_2		$\circ$	$\circ$	$\circ$
正m角形	$I_2(m)$		$\circ$	$\circ$	$\circ$
3次元					④転群
正4面体	A_3			A_2	正3角形 $\mathcal{U}_4$
正6面体	B_3			B_2	正4角形 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \mathcal{U}_4 \\ \mathcal{U}_5 \end{matrix}} \right\} G_4$
正8面体	B_3			A_2	正3角形
正12面体	H_3			$I_2(5)$	正5角形 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \mathcal{U}_4 \\ \mathcal{U}_5 \end{matrix}} \right\} \mathcal{U}_5$
正20面体	H_3			A_2	正4角形
4次元					
正5面体	A_4			A_3	正4面体
正8面体	B_4			B_3	正6面体
正16面体	B_4			A_3	正4面体
正24面体	F_4			B_3	正8面体
正120面体	H_4			H_3	正12面体
正600面体	H_4			A_3	正4面体

n -次元 ($n \geq 5$)

図

正 $n+1$ 面体	$\circ - \circ - \cdots - \circ$	A_n	$\circ - \circ - \cdots - \circ$	A_{n-1}	正 n 面体
正 $2n$ 面体	$\circ - \circ - \cdots - \circ \Rightarrow \circ$	B_n	$\circ - \circ - \cdots - \circ \Rightarrow \circ$	B_{n-1}	正 $2(n-1)$ 面体
正 2^n 面体	$\circ - \circ - \cdots - \circ \times \circ$	C_n	$\circ - \circ - \cdots - \circ$	A_{n-1}	正 n 面体

ルート系に対応する α においては, α の Dynkin diagram で
 長さの長いルートの端の一倍をはずしたものが, 各面体の diagram
 になる。 H_3, H_4 では, α の端をはずすかによつて,
 異なる多面体に対応する。 Coxeter 群として同じものは
 互いに双対的。特に, Coxeter diagram が左右対称なものは
 自己双対。

- [1] N. Bourbaki : Lie 群 & Lie 環 3. Chap 4, 5, 6.
- [2] T. Yano : Theory of b-functions (to appear in
Publ. of RIMS)
- [3] K. Saito : Discriminant Loci

Appendix

GL(2) の不変式に由来する, simple な多項式について.

§1. Introduction.

$$x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + x_2 t^{n-2} + \dots + x_{n-1} t + x_n$$

の判別式 $\Delta(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ は $n=2, 3$ の時, $\mathbb{R}^{n+1}$ の原点 conormal にたいして simple である. $n \geq 4$ では, monic

($x_0=1$) にした上, $x_1=0$ とおく (A_n), $x_n \neq 0$ とする (B_n)

$x_n = x_{\frac{n}{2}}^2$ とする (D_n) によって, simple となる. $n=4$ の時.

より事情は, Δ を不変にする Lie 環を 4 個, 以下に説明する.

③④ ($n=4$) $\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ を不変にする Vector fields.

x_{-1}	x_0'	x_0	x_1	x_2	
	$4x_0$		x_1	$2x_0x_2$	D_0
$4x_0$	$3x_1$	x_1	$2x_2$	$3x_0x_3 + x_1x_2 + 3x_3x_0$	D_1
$3x_1$	$2x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$4x_0x_4 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 + 4x_4x_0$	D_2
$2x_2$	x_3	$3x_3$	$4x_4$	$3x_1x_4 + x_3x_2 + 3x_4x_1$	D_3
x_3		$4x_4$		$2x_4x_2$	D_4

初め 4 つは GL(2) の作用から生じている。もう一つは

discriminant の特異性より生じている。上の 5 個の $\det$ は

Δ に等しく, 従って Δ を不変にする Vector fields は 4 個が free basis になっている。

$\Delta(1, x_1, x_2, x_3)$ に作用する γ にするたが、 D_0 の係数を (x_0-1) の係数にしなければならぬ。

$$x_1 + x_2 \left(x_0 - \frac{1}{4} (x_0' + x_0) \right) = x_1 (x_0 - 1) D_0 + 2x_2^2 D_1 + (3x_3^2 + x_1 x_2) D_2 + (4x_4^2 + 2x_1 x_3) D_3 + 3x_1 x_4 D_4$$

$$\frac{1}{2} \left\{ x_2 + x_2 \left(x_0 - \frac{1}{2} (x_0' + x_0) \right) \right\} = 0 \quad D_0 + 3x_0 x_3 D_1 + (4x_0 x_4 + 2x_1 x_3) D_2 + (3x_1 x_4 + x_2 x_3) D_3 + 2x_2 x_4 D_4$$

従って,

	4	x_1	$2x_2$	$3x_3$	
$x_0 = 1 \pm 17$	$3x_1$	$2x_2$	$3x_3 + x_1 x_2$	$4x_4 + 2x_1 x_3$	
	$2x_2$	$3x_3$	$4x_4 + 2x_1 x_3$	$3x_1 x_4 + x_2 x_3$	
	x_3	$4x_4$	$3x_1 x_4$	$2x_2 x_4$	

ここで γ 1 列を x_4 倍するが、 B_4 の Lie 環を γ する。 γ 4 に $\pm$ するに $x_4 = x_2'^2$ とおけば、 D_4 を γ する。 A_3 を求めるには、 D_1 の係数を x_1 の係数に 1 とし、 $x_1 = 0$ とおく (この時は D_1 の係数を 0 にする) γ の操作には上の γ 1 列を用いるのはよい。

尚初めの例 $m=4$ は m が随分おたが x_2 が 2 重に重なる形である。

(111) $m=5$.

x_{-1}	x_0'	x_0	x_1	x_2	x_3
	$5x_0$		x_1	$2x_0 x_2$	
$5x_0$	$4x_1$	x_1	$2x_2$	$3x_0 x_3 + x_1 x_2$	$4x_4 x_0$
$4x_1$	$3x_2$	$2x_2$	$3x_3$	$4x_0 x_4 + 2x_1 x_3$	$3x_4 x_1 + 5x_5 x_0$
$3x_2$	$2x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_0 x_5 + 3x_1 x_4$	$2x_4 x_2 + 4x_5 x_1$
$2x_3$	x_4	$4x_4$	$5x_5$	$4x_1 x_5$	$x_4 x_3 + 3x_5 x_2$
x_4		$5x_5$			$2x_5 x_3$

§ 2.

以下

$$p(x) = x^n + x_1 x^{n-1} + \dots + x_n = \prod (x - \xi_i) \quad \text{と書く.}$$

$$\mathbb{C}_\xi^n \xrightarrow{\mathcal{G}_n} \mathbb{C}_x^n \quad \text{と射影空間の作用による,}$$

高次元版にちよってゐる。 y_1, y_0, y_n は (ξ_i) の n 次元の基底とすれば,

$(x_1, \dots, x_n)$ と $(y_1, \dots, y_n)$ は bi-holomorphic に変換される。

$$\text{実際, } \frac{p'(t)}{p(t)} = \sum \frac{1}{t - \xi_i} = \sum_{v \geq 0} \frac{y_v}{t^{v+1}} \quad (y_0 = n) \quad \text{より,}$$

$$n t^{n-1} + (n-1)x_1 t^{n-2} + \dots + x_{n-1} = (t^n + x_1 t^{n-1} + \dots + x_n) \sum_{v \geq 0} \frac{y_v}{t^{v+1}}$$

の両辺を比較して, (x) と (y) の変換の式を得ることができる。

Prop. 1 $\mathbb{C}_\xi^n$ 上の meromorphic vector field $\sum a_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ があり, $\mathcal{G}_n$ 不変

かつ $\mathbb{C}_x^n$ 上 holomorphic vector field であること。このとき

$\exists A(t; t_1, \dots, t_{n-1})$: holomorphic, symmetric in $(t_1, \dots, t_{n-1})$

$$\text{s.t. } a_i(\xi) = A(\xi_i; \xi_1 \dots \xi_n) / p'(\xi_i)$$

$$\therefore y\text{-coordinate を用いると, } \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad \text{より,}$$

$$\sum a_i(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \sum b_i(y) \left(i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \quad \text{であるから,}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^{n-1} & \dots & \xi_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{このより明らか. } \square$$

特に, $X_\nu = \sum_{i=1}^n \xi_i^{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i}$ には, $\sum_{i=1}^n y_{\nu+i} (i \frac{\partial}{\partial y_i})$ が対応する。
 3. このうち, X_{-1}, X_0, X_1 は, GL(2) に由来するものである。

$[X_\mu, X_\nu] = (\nu - \mu) X_{\mu+\nu}$ であり, 特に, X_ν , $\nu \geq 2$ は,

$[X_1, X_2]$ を inductive に $X_{\nu+1} = \frac{1}{\nu-1} [X_1, X_\nu]$ と定めて

おいてよい。

$$X_{n+\mu} + x_1 X_{n+\mu-1} + \dots + x_n X_\mu = 0 \quad (1)$$

という関係があり, $X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_{n-2}$ は独立である。

$$\begin{cases} e^{tX_\nu} f(\xi) = f\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\nu t \xi^2}}\right) & \nu \geq 1, \\ e^{tX_1} f(\xi) = f((1+t)\xi), & e^{tX_{-1}} f(\xi) = f(\xi+t). \end{cases} \quad (2)$$

GL(2) の ^{変換} 不変式 $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ があり, $\varphi(1, x_1, \dots, x_n)$ を不変にする Lie 環が, discriminant $\eta = 0$ と, $X_{-1}, X_0, X_1, X'_2, X'_3, \dots, X'_{n-2}$ という weight ν の作用素 X'_ν により 自由生成 されていることもあり, この程度存在するのである; 尤, ここで X'_ν $\nu \geq 3$ は, generic には $X'_{\nu+1} = \frac{1}{\nu-1} [X_1, X'_\nu]$ により X'_2 から作られていなくてはならない。 X'_ν $\nu \geq n-1$ も上式により inductive に定めて, 次の式が成り立つことを要する。

$$a_0 X_{n-1} + a_1(\xi) X_{n-2} + \dots + a_{n-1}(\xi) X_0 + a_n(\xi) X_{-1} = 0. \quad (3)$$

こゝに $a_\nu(\xi)$ は (ξ) の ν 次対称多項式である。

我々が求める Lie 環は, 本質的には X'_2 のみで足りる。

X_2' を $X_2 + Y_2$ の形をもって採ると (1.5). ところで

X_2 は discriminant の形であり, 従って Y_2 は Prop. 1 により

$$Y_2 = \sum \frac{A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}{p'(\xi_n)} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \quad \text{の形であるけれども必ずしも, 又は}$$

より強く,

$$Y_2 = \sum \frac{A(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_n - \xi_n)}{p'(\xi_n)} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \quad (4)$$

であると仮定してよい。実際, $[X_{-1}, \cdot]$ についての関係より,

$$[X_{-1}, Y_2] = aX_1 + bX_0 + (cX_2 + dX_1^2)X_{-1}$$

となるけれども必ずしも,

$$Y_2' = Y_2 - \frac{a}{n} X_1 X_1 - (b - \frac{2a}{n}) X_2 X_0 - \frac{d}{n-1} X_1 X_2 X_{-1} \\ + (-c + (b - \frac{2a}{n}) + \frac{n}{n-1} d) X_3 X_{-1} \quad \text{と表わされ,$$

$[X_{-1}, Y_2'] = 0$. i.e. Y_2' は translation invariant である,

(4) の形である。

次のように定義 $X_0^0 = \sum \xi_n^{v+1} \frac{\partial}{\partial \xi_n}$,

$$X_\nu = X_\nu^0 \quad \nu = -1, 0, 1.$$

$$X_2 = X_2^0 + Y_2, \quad Y_2 = \sum \frac{A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_n - \xi_n)}{p'(\xi_n)} \frac{\partial}{\partial \xi_n},$$

$A_{n+2}(t_1, \dots, t_{n-1})$ は (X) による homogeneous $n+2$ 次の多項式。

$$X_{\nu+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\nu-1} [X_1, X_\nu] \quad \nu \geq 2. \quad \text{と置く.}$$

Prop.

$$\textcircled{1} \quad [X_\mu, X_\nu] = (\nu - \mu) X_{\nu+\mu} \quad \begin{matrix} \mu = -1, 0, 1, \\ \nu = -1, 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} \quad X_\nu = X_\nu^0 + Y_\nu$$

$$Y_\nu = \sum \frac{A_{n+\nu}(\xi_1; \xi_2, \dots, \xi_n)}{p'(\xi_1)} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \quad \text{したがって} \quad (1) \quad \text{で}$$

$A_{n+\nu}(\xi_1; \xi_2, \dots, \xi_n)$ は $\xi_1, \dots, \xi_n$ について $n+\nu$ 次多項式,
 $(\xi_2, \dots, \xi_n)$ について symmetric であり, $\nu \geq 0$ ならば ξ_1 は $\xi_2, \dots, \xi_n$ の平均である。

$$A_{n+\nu}(\xi_1; \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{cases} 0 & \nu = -1, 0, 1 \\ \frac{1}{(\nu-2)!} L^{\nu-2} A_{n+2}(\xi_1-\xi_2, \dots, \xi_1-\xi_n) & (\nu \geq 2) \end{cases} \quad (6)$$

$$L = X_1 - n\xi_1 - \sum_{j=2}^n \xi_j$$

(7) inductionにより示す。 $\square$

我々の事情 (3) に $[X-1,]$ を行い, $X_{n-2}, \dots, X_{-1}$ が独立で
 $\xi_1 = 1$ を用いる。 $\square$

$$a_\nu(\xi) = \frac{(-1)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} (X_{-1})^{n-\nu} a_n(\xi) \quad (7)$$

又, (3) の $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$ の係数をみて,

$$\begin{aligned} & a_0 A_{2n-1} + a_1 A_{2n-2} + \dots + a_{n-3} A_{n+2} \\ &= - \left(\sum_{\mu=0}^n a_\mu \xi_1^{n-\mu} \right) (\xi_1 - \xi_2) \dots (\xi_1 - \xi_n) \end{aligned} \quad (8)$$

即ち 必要條件として

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_0}{(n-3)!} L^{n-3} + \frac{a_1}{(n-4)!} L^{n-4} + \dots + a_{n-3} \right) A_{n+2}(\xi_1-\xi_2, \dots, \xi_1-\xi_n) \\ &= - \left(\sum_{\mu=0}^n a_\mu \xi_1^{n-\mu} \right) p'(\xi_1) \end{aligned} \quad (9)$$

$$L = \xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n X_1 \xi_1^{-n+1} \xi_2^{-1} \cdots \xi_n^{-1} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} e^{tL} f(\xi) &= \xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n e^{tX_1} \frac{f(\xi)}{\xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n} \\ &= \xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n f\left(\frac{\xi}{1-t\xi}\right) \frac{(1-t\xi_1)^{n+1} (1-t\xi_2) \cdots (1-t\xi_n)}{\xi_1^{n+1} \xi_2 \cdots \xi_n} \\ &= (1-t\xi_1)^n \prod_{i=1}^n (1-t\xi_i) f\left(\frac{\xi}{1-t\xi}\right) \end{aligned}$$

$$\lambda, e^{-tX_1} g(\xi) = g(\xi - t) = \sum \frac{(-t)^k}{k!} (X_1)^k g(\xi)$$

$$f = A_{n+2} \quad g = a_n \quad \text{に適用して,} \quad (\text{前節で } t \rightarrow 1/t \text{ として})$$

$$\begin{aligned} a_n(\xi - t) &= (1 - \frac{\xi_1}{t})^n \prod_{i=1}^n (1 - \frac{\xi_i}{t}) A_{n+2}\left(\frac{t\xi}{t - \xi}\right) \\ &= \sum t^k a_{n-k}(\xi) \sum \frac{t^{-k} (L^k A_{n+2})}{k!} \\ &= \sum t^k \sum a_{n-k}(\xi) \frac{(L^{k-h} A_{n+2})}{(k-h)!} \quad \text{よって } \underline{h=3} \text{ の場合} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (9) \text{ の左辺に } -\xi_2 \text{ (, (上式左辺) } &= a_n(\xi - t) t^{\frac{n}{2}} \frac{\prod_{i=1}^n (t - \xi_i)}{t - \xi_1} A_{n+2}\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{t - \xi_1}, \dots, \frac{\xi_n - \xi_1}{t - \xi_1}\right) \\ \sum a_\mu \xi_1^{n-\mu} &= \sum \frac{(-\xi_1)^{n-\mu}}{(n-\mu)!} (X_1)^{n-\mu} a_n(\xi) = a_n(\xi - \xi_1) \quad \text{より} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_n(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n) \left(1 + (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{t - \xi_i}{\xi_i - \xi_1} A_{n+2}\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{t - \xi_1}, \dots, \frac{\xi_n - \xi_1}{t - \xi_1}\right) \right) \frac{dt}{t - \xi_1} = 0 \quad (10)$$

$$\text{この12項} \quad \text{に特殊解} \quad a_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \xi_1 \cdots \xi_n$$

$$A_{n+2}(\xi_1 - \xi_1, \dots, \xi_1 - \xi_n) = (\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_n) \text{ の連立方程式の 2 次式}$$

$$(i.e. \quad \overline{p_3} \cdot \overline{p_{n-1}}, \overline{p_4} \cdot \overline{p_{n-2}}, \dots) \quad \text{を} \quad \text{よ}.$$

$$\text{ここで } \overline{p_3} \cdot \overline{p_{n-1}} \text{ 等, 初めの } Y_2 \text{ の } \text{より} \text{ の } \text{より}, \quad Y_2 \text{ の } \text{より} \\ X_1, X_2, X_3 \text{ を表示する } \text{より}, \quad \underline{\text{不要である。}}$$

また $a_n = \xi_1 \cdots \xi_n$ とするとき, (10) を γ について A_{n+2} は ξ に γ による (かわき) こととなる。変数変換 $\gamma_1 = \xi_1, \gamma_2 = \xi_1 - \xi_2, \dots, \gamma_n = \xi_1 - \xi_n$ を行い。

$$L = \gamma_1^2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1} + 2\gamma_1 M - N \quad \begin{cases} M = \gamma_2 D_2 + \dots + \gamma_n D_n - n \\ N = (\gamma_1^2 D_2 + \dots + \gamma_n^2 D_n) - \sum_{i=1}^n \gamma_i \end{cases}$$

$M-2, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}$ は A_{n+2} を零化する。

$$L^v \equiv \sum_{\mu=0}^v C_{v,\mu} t^{v-\mu} N^\mu \pmod{\mathcal{O}(M-2) + \mathcal{O}\frac{\partial}{\partial \gamma_1}} \quad (11)$$

$$C_{00} = 1, \quad C_{v,\mu} = C_{v-1,\mu-1} + (v+\mu) C_{v-1,\mu}.$$

$$(L^0 \equiv 1, L^1 \equiv 4\gamma_1 - N, L^2 \equiv 20\gamma_1^2 - 10\gamma_1 N + N^2, L^3 \equiv 120\gamma_1^3 - 90\gamma_1^2 N + 18\gamma_1 N^2 - N^3, \dots)$$

今 $a_n = (-)^n \xi_1 \cdots \xi_n$ とするとき, $a_\mu = x_\mu = (-)^n (\xi_1 \cdots \xi_n \text{ の } \mu\text{-次型に対する形式})$

従って, $a_\mu|_{\xi_1=0} = (\gamma_2, \dots, \gamma_n \text{ の } \mu\text{-次型に対する形式}) = \bar{p}_\mu$

$$\sum a_\mu \xi_1^{n-\mu} = 0.$$

よって, (9) は, $\xi_1 = 0$ として (これは (9) の左辺の作用素は γ_1 を含むから)

$$\left(\frac{1}{(n-3)!} (-N)^{n-3} + \frac{\bar{p}_1}{(n-4)!} (-N)^{n-4} + \dots + \bar{p}_{n-3} \right) A_{n+2}(\gamma_2, \dots, \gamma_n) = 0. \quad (12)$$

この () 内の作用素は, $\frac{(-)^{n-3}}{(n-3)!} (N - \bar{p}_1)^{n-3}$ であることは

容易にわかる。 $N - \bar{p}_1 = (2\bar{p}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \dots + (n-1) \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-2}}) + \bar{p}_1 (\bar{p}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \dots + \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-1}} - 2)$

を用いて, $(N - \bar{p}_1)^{n-3} B(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n-1}) = 0$ の解は $\bar{p}_0$ の特殊な

2次式になることとなる (ある γ の解を explicit に与える)

時に weight $n+2$ 以上の任意の 2次式が解になることとなる

3。 (他に weight $n, n+1$ の特殊なものをみる。)

さて, (3) を要請するとき, 我々 $a_n = x_n$ とみてよい. ところが
 4.1.2. 今, $a_1, \dots, a_n$ は 函数的に独立 と仮定せよ. このとき,
 (3) は $[X_{-1},] [X_0,] [X_1,]$ とは等しい.

$$\begin{cases} X_{-1} = nD_{a_1} + (n-1)D_{a_2} + \dots + D_{a_n} \\ X_0 = a_1 D_{a_1} + 2a_2 D_{a_2} + \dots + na_n D_{a_n} \\ X_1 = (a_1^2 - 2a_2)D_{a_1} + \dots \end{cases}$$

となり, (X_0) に対する X_{-1}, X_0, X_1 の表示と全く等しい.
 よって, ここに X_2 を加えて Lie 環を構成するにあたっては,
 $a_0 = X_0$ としてよい.

以上をまとめて, 我々は次の場合を考察しよう.

「 X_{-1}, X_0, X_1 は discriminant 条件, $X_2 = X_2^0 + Y_2$

$$Y_2 = \sum \frac{A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n)}{p'(\xi_n)} \frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

ここで $A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n)$ は, $(\eta_2, \dots, \eta_n)$ の 基的対称式を $\bar{p}_i$ と

して, $\bar{p}_4, \bar{p}_{n-2}, \bar{p}_5, \bar{p}_{n-3}, \dots$ の一次結合.

$$X_{v+1} \equiv \frac{1}{v+1} [X_1, X_v] \quad v \geq 2 \quad \text{と定義するとき,}$$

$X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_{n-2}$ が Lie 環をなす.

recursion formula は $X_{n-1} + x_1 X_{n-2} + \dots + x_n X_{-1} = 0$.

特に, $n \geq 6$ ならば, 我々は求める新しい Lie 環は
 存在する. ところが, $n=6$ の場合には, 我々には
 存在する. したがって, $(G(5) \times SL(4), B \oplus D)$ の
 あり orbit の localization は 見出されなかった.

$(SL(5) \times GL(4), \mathfrak{so}(2))$ に $z \in \tau$, point

$$e_1 \wedge e_3 \otimes e_7 + e_4 \wedge e_5 \otimes e_7 + e_2 \wedge e_5 \otimes e_8 + e_3 \wedge e_4 \otimes e_8 + e_1 \wedge e_4 \otimes e_9 + e_2 \wedge e_3 \otimes e_9$$

は codimension 7 の orbit の generic point z である。 z の τ への

transversal π の方向 $z \in \tau$,

$$(x_0 e_3 \wedge e_5 + \frac{1}{3} x_1 e_1 \wedge e_5 + \frac{2}{3} x_2 e_1 \wedge e_3 + x_3 e_2 \wedge e_5 + \frac{4}{3} x_4 e_1 \wedge e_3 - \frac{4}{3} x_5 e_1 \wedge e_2 + 8 x_6 e_2 \wedge e_4) \otimes e_6$$

を z にかける, 不変式の localization は z の 7×7 の行列の

行列式 Δ である。 $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ は z への

不変式 Δ の Lie 代数の free basis である。

$\mathfrak{g}$	x_1	x_0'	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
D_0		$6x_0$		x_1	$-\frac{1}{3}x_0x_1 + \frac{1}{9}x_1^2$	$\frac{1}{3}x_1x_2$	$\frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_1x_3 + \frac{4}{3}x_1x_4$
D_1	$6x_0$	$5x_1$	x_1	$2x_2$		$\frac{1}{2}x_1x_3$	$4x_0x_5$
D_2	$5x_1$	$4x_2$	$2x_2$	$3x_3$	x_0x_4	$2x_1x_4 - 5x_0x_5$	$9x_0x_6 + x_1x_5$
D_3	$4x_2$	$3x_3$	$3x_3$	$4x_4$	$\frac{10}{3}x_0x_5 + \frac{2}{9}x_1x_6$	$\frac{4}{9}x_1x_5 - \frac{16}{9}x_0x_6 - \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{16}{9}x_2x_4$	$\frac{10}{3}x_1x_6 + \frac{2}{9}x_2x_5$
D_4	$3x_3$	$2x_4$	$4x_4$	$5x_5$	$9x_0x_6 + x_1x_5$	$2x_2x_5 - 5x_1x_6$	x_2x_6
D_5	$2x_4$	x_5	$5x_5$	$6x_6$	$4x_1x_6$	$\frac{1}{2}x_3x_5$	
D_6	x_5		$6x_6$		$\frac{1}{9}x_4^2 - \frac{1}{3}x_2x_5 + \frac{4}{3}x_2x_6$	$\frac{1}{9}x_4x_5$	$-\frac{1}{3}x_4x_6 + \frac{1}{9}x_5^2$

この式を $g(x_0, x_1, x_2, \dots, x_6)$ とする。初めの 4 つの作用素

から g は $GL(2)$ invariant である。

$g(1, 0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ は, z の Lie 代数の作用 τ 不変,

である。 $(\bar{g}, x_6 g(1, x_1, \dots, x_6), g(1, x_1, \dots, x_5, x_6^2))$ を x_2 の D_6 の付随

を4412: $\frac{1}{9}X_4^2$ があり, 24が消えてしまったが, 一方
作用素の27 simple にすぎない(不可能である。)

⑤

X_0	X_1	X_2	X_3	X_4
$2X_2$	$3X_3$	$4X_4$	$5X_5$	$6X_6$
$3X_3$	$4X_4 - \frac{4}{3}X_2^2$	$\frac{40}{3}X_5 - \frac{2}{3}X_2X_3$	$16X_6 + \frac{1}{2}X_3^2 - \frac{16}{9}X_2X_4$	$-\frac{8}{9}X_2X_5 + \frac{1}{9}X_3X_4$
$4X_4$	$5X_5 - X_2X_3$	$36X_6 - \frac{4}{3}X_2X_4$	$-2X_2X_5$	$\frac{4}{9}X_4^2 - \frac{4}{3}X_3X_5 + \frac{8}{3}X_2X_6$
$5X_5$	$6X_6 - \frac{2}{3}X_2X_4$	$-2X_2X_5$	$-\frac{1}{2}X_3X_5$	$-\frac{1}{9}X_4X_5$
$6X_6$	$-\frac{1}{3}X_2X_5$	$\frac{4}{9}X_4^2 - \frac{4}{3}X_3X_5 + \frac{8}{3}X_2X_6$	$-\frac{1}{9}X_4X_5$	$-\frac{10}{27}X_5^2 + \frac{8}{9}X_4X_6 + \frac{8}{27}X_2^2X_6$ $+\frac{2}{81}X_2X_4^2 + \frac{2}{27}X_2X_3X_5$

$$[X_1, X_2] = -4X_3 + \frac{-2}{3}X_2X_1$$

$$[X_1, X_3] = -3X_4 + \frac{1}{3}X_2X_2 + \frac{-1}{2}X_3X_1 + \frac{1}{3}X_4X_0$$

$$[X_1, X_4] = \frac{1}{6}X_3X_2 + \frac{1}{3}X_4X_1 + \frac{1}{3}X_5X_0$$

$$[X_2, X_3] = -\frac{2}{3}X_2X_3 + \frac{2}{3}X_5X_0$$

$$[X_2, X_4] = \frac{2}{9}X_4X_2 + \frac{-8}{9}X_5X_1 + \frac{8}{3}X_6X_0$$

$$[X_3, X_4] = \frac{1}{9}X_4X_3 + \frac{-1}{9}X_5X_2$$

$$[X_0, X_6] = 0$$

$$X_0f = 30f, \quad X_1f = 0, \quad X_2f = -\frac{4}{3}X_2f, \quad X_3f = X_3f, \quad X_4f = (2X_4 + \frac{8}{27}X_2^2)f$$

次に6次元の行列式の場合を(7)す。上の(5)の
対象であり、ことに注意せよ。(cf. p.) 又、 X_4 に3次元のTBがある。

$$\Delta(1, 0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$2x_2$	$3x_3$	$4x_4$	$5x_5$	$6x_6$
$3x_3$	$4x_4 - \frac{4}{3}x_2^2$	$5x_5 - x_2x_3$	$6x_6 - \frac{2}{3}x_2x_4$	$-\frac{1}{3}x_2x_5$
$4x_4$	$5x_5 - x_2x_3$	$6x_6 + 2x_2x_4 - \frac{3}{2}x_3^2$	$3x_2x_5 - x_3x_4$	$4x_2x_6 - \frac{1}{2}x_3x_5$
$5x_5$	$6x_6 - \frac{2}{3}x_2x_4$	$3x_2x_5 - x_3x_4$	$4x_2x_6 + 2x_3x_5 - \frac{4}{3}x_4^2$	$3x_3x_6 - \frac{2}{3}x_4x_5$
$6x_6$	$-\frac{1}{3}x_2x_5$	$4x_2x_6 - \frac{1}{2}x_3x_5$	$3x_3x_6 - \frac{2}{3}x_4x_5$	$2x_4x_6 - \frac{5}{6}x_5^2$

$$[x_1, x_2] = x_3 - x_2x_1 + x_3x_0$$

$$[x_1, x_3] = 2x_4 + \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{2}{3}x_4x_0$$

$$[x_1, x_4] = -\frac{1}{3}x_2x_3 + \frac{1}{3}x_5x_0$$

$$[x_2, x_3] = x_2x_3 - x_3x_2 + x_4x_1 - x_5x_0$$

$$[x_2, x_4] = 2x_2x_4 + \frac{1}{3}x_3x_3 + \frac{1}{2}x_5x_1 - 2x_6x_0$$

$$[x_3, x_4] = x_3x_4 + \frac{2}{3}x_4x_3 + \frac{2}{3}x_5x_2 - x_6x_1$$

$$x_0f = 30f, x_1f = 0, x_2f = 12x_2f, x_3f = 6x_3f, x_4f = 2x_4f$$

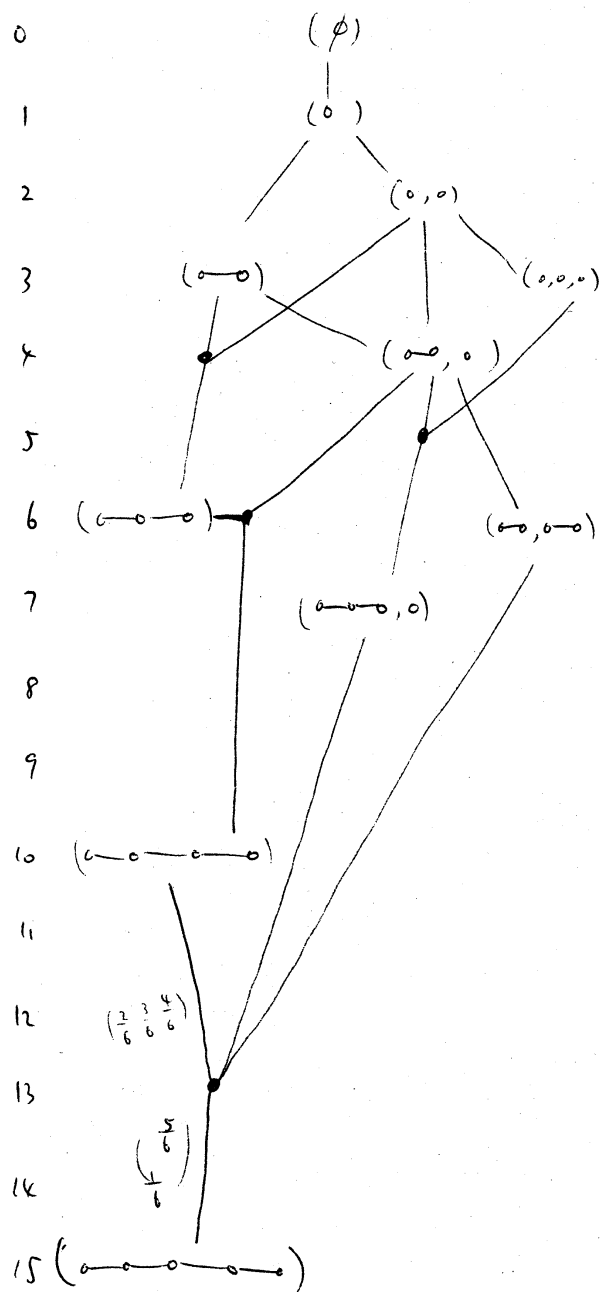
後に, 9.1(2) に由來する, simple 群 S_n の $n \geq 2$ かつ $n \neq 17$,

この $2 > 1$ なる n を証明する。

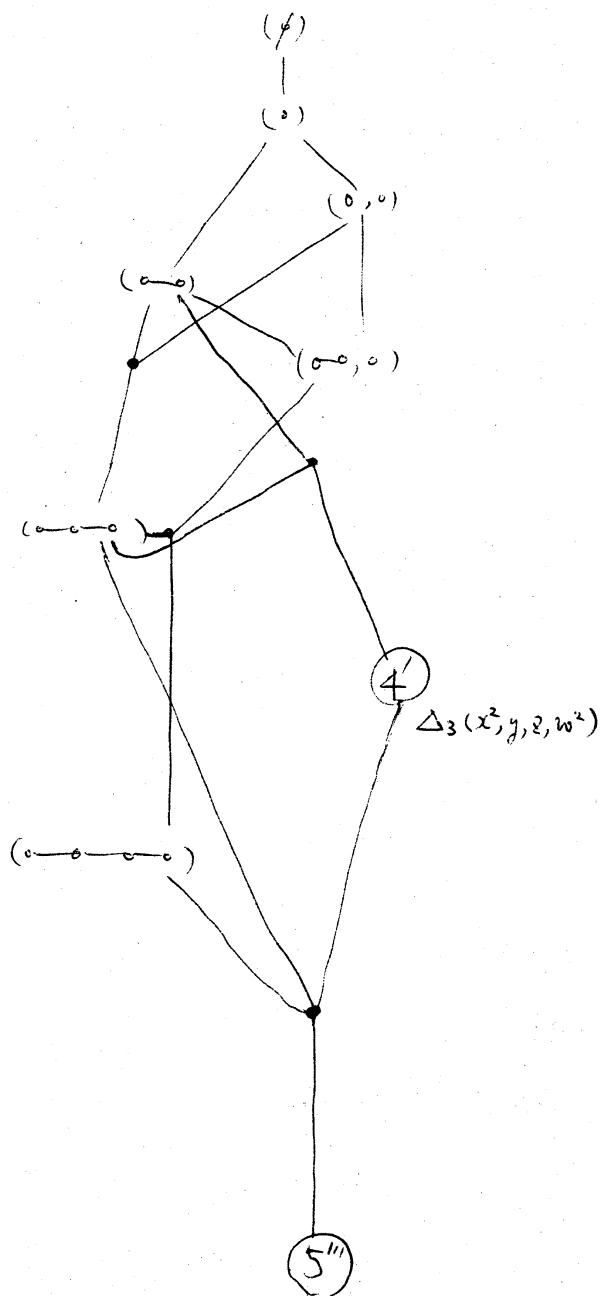
(一般に $x_0f = n(n-1)f, \dots, x_{n-2}f = 2 \cdot 1 x_{n-2}f$.)

この2つの不変式の holonomy diagram は次の通りである。

6次式 discriminant



5''



6 次式 の discriminant の 作用 對 於 $X_0, X_1, \dot{X}_2, \dot{X}_3, \dot{X}_4$

(5th) の 作用 對 於 $X_0, X_1, X_2', X_3', X_4' \in 1,$

$$Y_2 = X_2', Y_3 = -4X_3', Y_4 = 6X_4' - \frac{1}{3}X_2X_2' \quad \text{と 定 め る。}$$

$$X_v = \alpha \dot{X}_v + Y_v \quad v = 2, 3, 4 \quad \text{と 定 め る。}$$

$$[X_1, X_2] = X_3 - (\alpha + \frac{2}{3})X_2X_1 + \alpha X_3X_0$$

$$[X_1, X_3] = 2X_4 - \frac{2}{3}X_2X_2' + 2X_3X_1 + \frac{2}{3}(\alpha - 2)X_4X_0$$

$$[X_1, X_4] = -\frac{1}{3}X_2X_3 + (-2X_4 + \frac{2}{3}X_2^2)X_1 + (\frac{\alpha}{3} + 2)X_5X_0$$

$$\begin{aligned} [X_2, X_3] &= \alpha^2 [\dot{X}_2, \dot{X}_3] + \alpha ([X_2, Y_3] + [Y_2, \dot{X}_3]) + [Y_2, Y_3] \\ &= \alpha \{ X_2X_3 - X_3X_2 + \alpha X_4X_1 - \alpha X_5X_0 \} - \frac{2}{3}X_2X_3 - \frac{8}{3}X_5X_0 \\ &\quad + \alpha \{ [X_2, Y_3] + (Y_2, \dot{X}_3) - X_2Y_3 + X_3Y_2 + \frac{2}{3}X_2\dot{X}_3 \} \end{aligned}$$

$$[X_2, Y_3] + (Y_2, \dot{X}_3) - X_2Y_3 + X_3Y_2 + \frac{2}{3}X_2\dot{X}_3 = -\frac{136}{3}X_5X_0 + \frac{28}{3}X_4X_1 + 10Z$$

$$\begin{aligned} Z &= (-\frac{80}{3}X_2X_6 + 10X_3X_5 + \frac{8}{3}X_4^2 + \dots)D_3 + (-33X_5X_6 + \frac{7}{3}X_4X_5 + \dots)D_4 \\ &\quad + (-20X_4X_6 + \frac{86}{3}X_5^2 + \dots)D_5 + (\frac{100}{3}X_5X_6 + \dots)D_6 \end{aligned}$$

$$\text{よ ち ち } 4(\alpha+1)X_4X_1 - 3X_3X_2, \quad 5(\alpha-4)X_5X_0 - 2X_2X_3, \dots$$

の 結 合 で 未 だ 未 だ 未 だ 未 だ 未 だ 未 だ, $Z = \frac{86}{3}X_5^2D_5 + \frac{100}{3}X_5X_6D_6$ と

$$5(\alpha-4)X_5X_0 - 2X_2X_3 \quad \Rightarrow \quad 5(\alpha-4) \cdot (5X_5^2D_5 + 6X_5X_6D_6) \quad \text{と 定 め る。}$$

よ ち ち 不 可 能 で 未 だ 未 だ 未 だ 未 だ 未 だ 未 だ。 よ っ て, $m=6$ の とき, 4

の 求 め る も の は discriminant 以 外 に は (5th) し か 存 在 し な い。

こ の 場 合, $\dot{X}_2 = \frac{1}{51}[\overline{p}_4^2]$ の 2 が 適 (て い) に 2 に な っ た。

さて, $A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n)$ と (7), $\bar{p}_2, \dots, \bar{p}_{n-(n-2)}$ $4 \leq l \leq n-2$

をとったとき, Y_ν が X 座標でどのように表示されるかは,

次の方法で求めることができる。

$$Y_2 = \sum_1 \frac{A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_n)}{(\xi_1 - \xi_2) \cdots (\xi_1 - \xi_n)} \frac{\partial}{\partial \xi_1}.$$

$$Y_2 : p_\nu \mapsto \sum_1 \frac{A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_n)}{(\xi_1 - \xi_2) \cdots (\xi_1 - \xi_n)} p_{\nu-1}(\xi_2, \dots, \xi_n)$$

$$\begin{aligned} \Pi(t - \xi_\nu) &\mapsto - \sum_1 \frac{(t - \xi_2) \cdots (t - \xi_n)}{(\xi_1 - \xi_2) \cdots (\xi_1 - \xi_n)} A_{n+2}(\xi_1 - \xi_2, \dots, \xi_1 - \xi_n) \\ \sum_{\nu} (-)^{\nu} p_\nu t^{n-\nu} &\equiv - \tilde{A}_{n+2}(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n) \\ \sum x_\nu t^{n-\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} \end{aligned} \quad (13)$$

$$p_n(t) = \Pi(t - \xi_1) = \sum x_\nu t^{n-\nu} p_{n-\nu}(t) = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d}{dt} \right)^\nu p_n(t) \quad \text{と定義する.}$$

(esp. $p_1(t) = nt$)

$A_{n+2}(\eta_2, \dots, \eta_n) = B(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{n-1})$ である。ここで,

$$\tilde{A}_{n+2}(t - \xi_1, \dots, t - \xi_n) \stackrel{\text{def}}{=} B(p_1(t), \dots, p_{n-1}(t)) \pmod{p_n(t)} \quad (14)$$

と (7) と $n-1$ 次式とを定義する (Lagrange's

interpolation formula より, $\tilde{A}_{n+2}$ は (13) の定義に依る)。

従って, この $\tilde{A}_{n+2}(t - \xi)$ を展開し, $\sum_{\nu \geq 1} b_\nu t^{n-\nu}$ とおくと

$$-Y_2 = \sum b_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$$

である。特に、場合によっては、この形にすればよい。

$$\begin{aligned} p_{\nu+2}(t) p_{n-\nu}(t) &= \binom{n}{\nu+2} \binom{n}{\nu} \left(t^2 + \frac{2}{n} x_1 t + \left(-2 \frac{\nu n - (\nu+1)^2}{n(n-1)} x_2 + \frac{\nu(\nu-2)}{n^2} x_2^2 \right) \right) \cdot p_n(t) \\ &\quad + (t \text{ の高々 } n-1 \text{ 次}) \end{aligned}$$

b_ν は, $b_{n-\mu} = \frac{(-X_{-1})^\mu}{\mu!} b_n$ により定まるが, $\mu = 0$ と
 して $\mu = 0$ とおく. $\mu = 0$ の場合に Lie 代数を構成するに $X_1 = 0$
 とおく. $\mu = 0$ のとき b_ν を定まるより (14) を $\mu = 0$ に
 $\text{mod } \mathbb{C}[X] p_{n-1}(t)$ により t の高々 $n-2$ 次式にする
 がよい。

一方, Y_ν には, (6) と (11) により定まる。

$$N = (\eta_1^2 D_2 + \dots + \eta_n^2 D_n) - \sum \eta_i$$

$$= \bar{p}_1 \left(\bar{p}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \dots + \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-1}} - 1 \right) - \left(2\bar{p}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \dots + (n-1) \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-2}} \right)$$

$$\tilde{A}_{n+3}(t) \equiv \left[(4\eta_1 - N) A_{n+2}(\bar{p}) \right]_{\eta_1=t, \bar{p}_\nu=p_\nu(t)} \text{ mod } \mathbb{C}[X, t] p_n(t) + \mathbb{C}[X] p_{n-1}(t),$$

$$\tilde{A}_{n+4}(t) \equiv \frac{1}{2} \left[(20\eta_1^2 - 10\eta_1 N + N^2) A_{n+2}(\bar{p}) \right]_{\eta_1=t, \bar{p}_\nu=p_\nu(t)} //$$

etc.

$$\text{尚, } (-X_\nu) \text{ は, } t^{\nu+1} p_{n-1}(t) \text{ mod } //$$

と $\mu = 0$ とおく. $\mu = 0$ の場合に $X_1 = 0$ とおく. (e.g. $\bar{p}_1 = nt$)

特に, $A_{n+2}(\bar{p})$ が $\bar{p}$ の高々 n 次式であるから,

$$\tilde{A}_{n+3}(t) \equiv \left[\left\{ -(n(n-1)-4)t + \left(2\bar{p}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{p}_1} + \dots + (n-1) \bar{p}_{n-1} \frac{\partial}{\partial \bar{p}_{n-2}} \right) \right\} A_{n+2}(\bar{p}) \right]_{\bar{p}_\nu=p_\nu(t)}$$

$$\text{mod } \mathbb{C}[X, t] p_n(t) + \mathbb{C}[X] p_{n-1}(t), \quad X_1 = 0.$$

* $b_n = \tilde{A}_{n+2}(-\xi)$. 例として $\xi = 1$ の場合,

$$b_n = X_{n-\nu} X_{\nu+2} + \binom{n}{\nu+2} \binom{n}{\nu} \left(-2 \frac{n-(\nu+1)}{n(n-1)} X_2 + \frac{\nu(n-\nu-2)}{n^2} X_1^2 \right) X_n.$$

$\alpha_1 = 0$ とした, A_{n-1} 型の Lie 環 (cf. p.) において, 交換関係 $[X_1, \dot{X}_\nu] = (\nu-1) \dot{X}_{\nu+1} - \frac{2(n-\nu-1)}{n} x_2 \dot{X}_{\nu-1} + \frac{2(n-\nu-1)}{n} x_{\nu+1} X_0$. (15)*

が成立する。我々 12, 13 において, $Y_3, \dots$ を定義する。

又, X_1, X_0 は共通に 2 の故, 2 次式をもちて Y_ν を定義する。

$$Y_{\nu+1} \equiv \frac{1}{\nu-1} \left\{ [X_1, X_\nu] + \frac{2(n-\nu-1)}{n} x_2 Y_{\nu-1} \right\} \text{ mod } X_1, X_0. \quad (16)$$

$2 \leq \nu \leq n-2$. Y の形に定義すれば, (15) で $X_{n-1} = 0$ である

のことに注意して, $Y_{n-1} \equiv 0$ とする。

そこで, $\boxed{X_\nu = \alpha \dot{X}_\nu + Y_\nu}$ (12) とおき, $(X_0, X_1, \dots, X_{n-2})$ が Lie 環をなす必要条件として, $[X_2, X_3]$ が $X_0, X_1, \dots, X_5$ により表わされる条件を求めよう。 ($\alpha \neq \text{scalar}$)

$$\begin{aligned} [X_2, X_3] &= \alpha^2 [\dot{X}_2, \dot{X}_3] + \alpha \{ [\dot{X}_2, Y_3] + [Y_2, \dot{X}_3] \} + [Y_2, Y_3] \\ &= \alpha \left\{ X_5 + x_2 X_3 - \frac{3(n-4)}{n} x_3 X_2 + \frac{3(n-4)}{n} \alpha x_4 X_1 - \alpha x_5 X_0 \right\} \\ &\quad + \alpha \left\{ [\dot{X}_2, Y_3] + [Y_2, \dot{X}_3] - Y_5 - x_2 Y_3 + \frac{3(n-4)}{n} x_3 Y_2 \right\} + [Y_2, Y_3] \\ &\equiv \alpha X + \alpha Y + [Y_2, Y_3]. \end{aligned}$$

$\alpha Y + [Y_2, Y_3]$ が表示できるかは否かである。この D_2 の基底は

$$X_7, X_2 X_5, X_3 X_4, X_2^2 X_3$$

α -2 次結合である。これを, $X_5, X_5 X_0, X_4 X_1, X_2 X_3 X_0, X_2^2 X_1$

を用いて消去する。次に D_3 の基底を消去するに、

$$X_2 (3X_3 X_0 - 2X_2 X_1), \quad A X_4 X_1 - 3X_2 X_2, \quad B X_5 X_0 - 2X_2 X_3$$

と同様に $[\dot{X}_2, \dot{X}_\nu]$

$$= (\nu-2) \dot{X}_{\nu+2} + (\nu-2) x_{\nu+2} \dot{X}_\nu - (\nu-2) x_{\nu+2} X_0 - \frac{3(n-\nu-1)}{n} x_3 \dot{X}_{\nu-1} + \frac{3(n-\nu-1)}{n} x_{\nu+1} X_1$$

の一次結合で消去されなければならない。ここで, $A = 4\alpha + a_2$

$$B = 5\alpha + a_3, \quad Y_v = a_v x_{v+2} D_2 + (b_v x_{v+3} + \dots) D_3 \quad (2 \leq v \leq 5) \text{ とした。}$$

(Y_v は, X_0, X_1 を用いて, 確かにこの形に表すことができる)。
 よし, Y_6 は, 一般に X_4^2 が D_2 の係数に表すことができる。

この3つの作用より, D_i の係数がすべて2次以上である。

従って,

C1. 係数で 一次式 のものは, Y の係数比が X_5 のものと同じでなければならない。(n-7個の条件式)

以下 D_i の係数を mod (3次) で考える。 $\alpha Y + [Y_1, Y_2]$ の D_2 の係数を消去 (たゞ, この形になるようにした)。よ。

$$\begin{aligned} & (C_{26} X_2 X_6 + C_{35} X_3 X_5 + C_{44} X_4^2 + \dots) D_3 + \dots \\ & + (C_{4n} X_4 X_n + C_{5,n-1} X_5 X_{n-1} + \dots) D_{n-1} + (C_{5n} X_5 X_n + \dots) D_n. \\ & A X_4 X_1 - 3 X_3 X_2 = (-3(5\alpha + b_2) X_3 X_5 + 4 A X_4^2) D_3 + \dots + n A X_4 X_n D_{n-1} + 0 \cdot D_n \\ & B X_5 X_0 - 2 X_2 X_3 = (-2(6\alpha + b_3) X_2 X_6 + 3 B X_3 X_5) D_3 + \dots + (n-1) B X_5 X_{n-1} D_{n-1} + n B X_5 X_n D_n \end{aligned}$$

の2つにより, 確かに2次式は消去されなければならない。従って,

$$\begin{aligned} \text{C2.} \quad & C_{6,n-2} = C_{7,n-3} = \dots = C_{ij} = 0 \quad (i \leq j) \quad (n-5 \text{ 個の条件式}) \\ & C_{6,n-1} = C_{7,n-2} = \dots = 0 \quad (") \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{C3.} \quad & C_{44} : C_{4n} = 4 : n \quad (2 \text{ 個} \text{ --- }) \\ & C_{5,n-1} : C_{5,n} = n-1 : n. \end{aligned}$$

以上の方針により, $n=7.8$ のときに, 新しい Lie 環が
存在するかどうかを調べる。

Micro calculator, Hewlett-Packard Model 65 を用いて
計算により, γ_4 の不存在が示される。 γ_4 について
詳細は, 別紙資料にのべることにする。